Метод конечных элементов в CFD. Часть 2

Наумкин Виктор Сергеевич

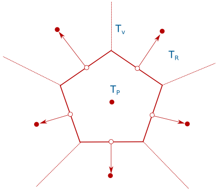
Лекция №11, 2021

Содержание

Green-Gauss Node-Based Gradient Schemes

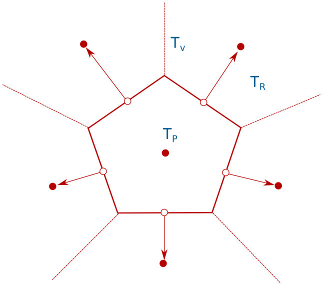
- В методе Гаусса-Грина градиент в ячейке рассчитывается из значений в центре поверхностей:

$$(\nabla T)_P = \frac{1}{V_P} \sum_{Faces} \left(T_f \hat{n}_f A_f \right) \tag{1}$$



- Известно только значение в центре ячейки T_P.Как рассчитать значение в центре поверхности T_f?

Green-Gauss Node Based

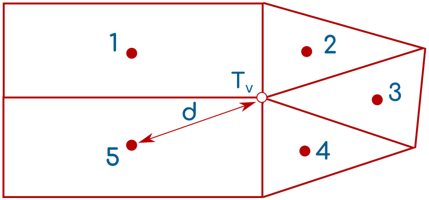


1. Расчёт значений в узлах из значений в центре.
2. Расчёт значения на поверхности из значений в узлах.
3. Расчёт градиента из значений на поверхности по формуле Гаусса-Грина.

1. Значение в узле - осреднение

- Чтобы получить значение в узле можно взять среднее значение от центров:

$$T_V = \frac{1}{N} \sum_{Cells} T_P = \frac{1}{5} \left(T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 \right) \tag{2}$$



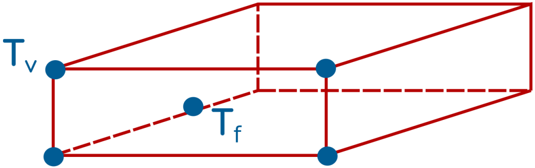
- Но T_2, T_3, T_4 ближе к узлу, чем другие центры ячеек.
- Узел не в середине окружающих его центров ячеек.
- Введём $|d|$ - расстояние от узла до центра ячейки.
- Используем $1/\,|d|$, чтобы вес ближайших к узлу ячеек был больше

$$T_V = \frac{\sum_{Cells} T_P \left(\frac{1}{|d]}\right)}{\sum_{Cells} \left(\frac{1}{|d]}\right)} \tag{3}$$

$$T_V = \frac{\frac{T_1}{d_1} + \frac{T_2}{d_2} + \frac{T_3}{d_3} + \frac{T_4}{d_4} + \frac{T_5}{d_5}}{\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \frac{1}{d_3} + \frac{1}{d_4} + \frac{1}{d_5}} \tag{4}$$

- Значение в центре поверхности получается осреднением значений в узловых точках:

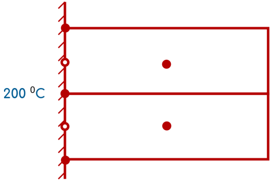
$$T_f = \frac{1}{N} \sum_{Nodes} T_V \qquad (5)$$



- Центр поверхности - в центре узлов.
- Узлы - не в середине центров ячеек.

Граничные ячейки

- Температура на границе постоянна вдоль поверхности граничной ячейки:

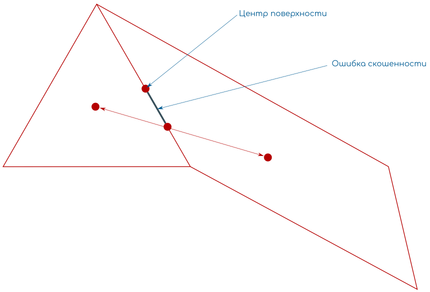


- $\Rightarrow$ Значение в узле и в центре поверхности равны граничному 200^0C

$$T_f = 200^0C, T_V = 200^0C \tag{6}$$

Ошибка скошенности

- Метод Гаусса-Грина, основанный на ячейке имеет ошибку скошенности.
- Значение на поверхности не рассчитывается в центре поверхности.
- Метод Гаусса-Грина, основанный на узле, не имеет ошибки скошенности.

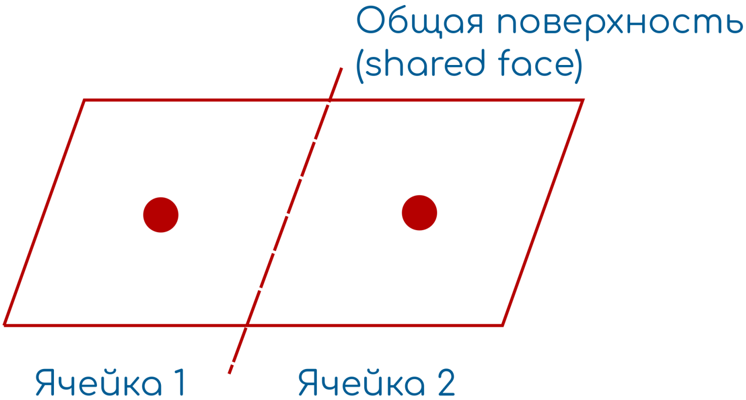


Summary

- Метод Гаусса-Грина, основанный на узле, использует осреднение по весу, т.к. некоторые центры ячеек лежат дальше от узлов, чем другие.
- Данная схема более точная, чем cell based схема, т.к. нет ошибки скошенности.
- Данная схема более тяжёлая в вычислительном плане, т.к. нужно рассчитывать значения как в узлах, так и на поверхности.

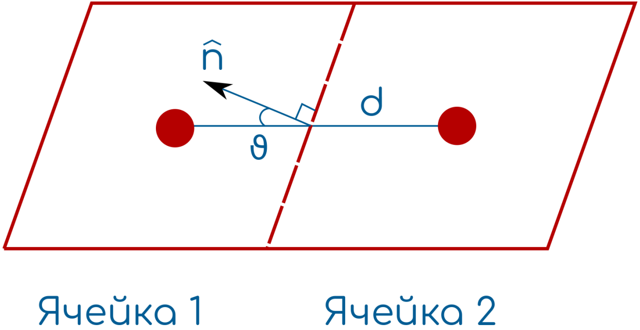
Неортогональность сетки

- Рассмотрим две ячейки, соединённых общей поверхностью.
- Подобное рассмотрение справедливо для гекса-, тетра-, призматических и полиэдральных сеток.



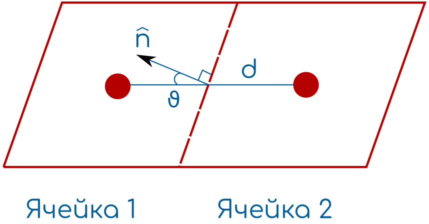
Векторы и нормали

- Рассмотрим вектор, соединяющий центры ячейки d.
- И нормальный вектор к поверхности $\hat{n}$.



Неортогональность

- Угол между вектором, соединяющим центры ячеек, и единичным нормальным вектором - это угол неортогональности θ.

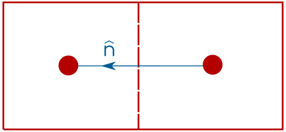


$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{d \cdot \hat{n}}{|d|\,|\hat{n}|}\right) \quad (7)$$

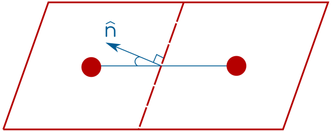
Данное определение используется в OpenFOAM.

Неортогональность

- $\theta = 0^0$ - ортогональная поверхность.
- $\theta < 70^0$ - обычно приемлемо для OpenFOAM.



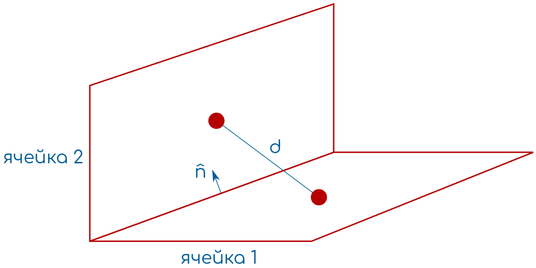
ϑ=0



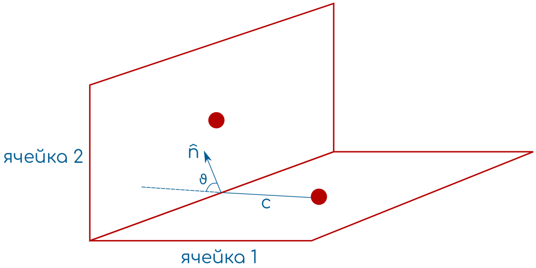
$\vartheta=30^0$

Выравнивание ячеек (центрирование)

- Если ячейки не отцентрированы, то d может быть плохим вектором для использования.
- В примере $\theta \sim 0^0$



- В качестве альтернативы d может использоваться вектор из центра ячейки к центру поверхности c.
- В этом случае $\theta \sim 30^0$



В Ansys Fluent / CFX

- θ вычисляется с использованием d и c для всех поверхностей.
- Затем берётся наибольший угол, как неортогональность ячейки:

$$\theta_{cell} = \max\left[\cos^{-1}\left(\frac{d \cdot \hat{n}}{|d|\,|\hat{n}|}\right); \cos^{-1}\left(\frac{c \cdot \hat{n}}{|c|\,|\hat{n}|}\right)\right] \tag{8}$$

- Это называется orthogonality-quality ANSYS.
- θ нормируется, чтобы давать значения между 0 и 1.
- 1 для 0^0.

Почему неортогональность важный фактор в CFD?

Рассмотрим конечно-объёмную дискретизацию диффузионного члена:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \cdot (UU) = \frac{1}{\rho} \nabla p + \underline{\nabla (\nu \nabla U)} + g \tag{9}$$

- Проинтегрируем по всей ячейке:

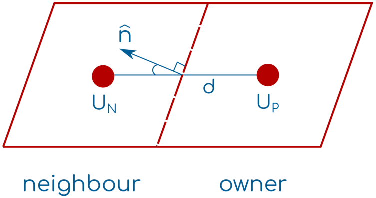
$$\int_V \nabla (\nu \nabla U) \, dV \tag{10}$$

- Используя теорему о дивергенции:

$$\int_V \nabla (\nu \nabla U) \, dV = \int_S [\nu (\nabla U) \cdot \hat{n}] \, dS = \sum_{f=1}^{N} \left[\nu_f (\nabla U)_f \cdot \hat{n} \right] S_f \tag{11}$$

- Сложность в оценке скалярного произведения нормального вектора и градиента скорости на поверхности ячейки:

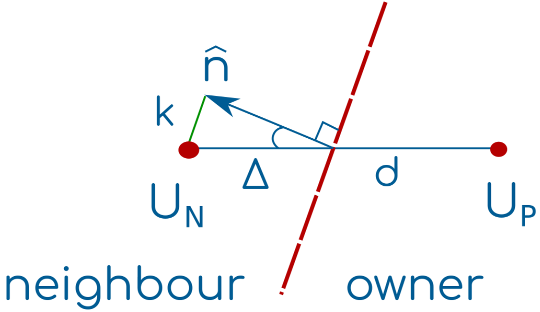
$$\nu_f \, (\nabla U)_f \cdot \hat{n}_f \tag{12}$$



- ν_f можно определить интерполяцией.
- Если $\hat{n} \| d$: $(\nabla U)_f \cdot \hat{n}_f = \dfrac{U_P - U_N}{|d|} |\Delta|$

- Обычно $\hat{n} \nparallel d$:
- Можно расщепить вектор $\hat{n}$ на ортогональную и неортогональную компоненты:

$$\hat{n} = \Delta + k \tag{13}$$



- Подставим в дискретизацию:

$$\sum_{f=1}^{N} \left[\nu_f \left(\nabla U \right)_f \cdot \hat{n} \right] S_f \tag{14}$$

$$\sum_{f=1}^{N} \left[\nu_f \left(\nabla U \right)_f \cdot \left(\Delta + k \right) \right] S_f \tag{15}$$

$$\underbrace{\sum_{f=1}^{N} \left[\nu_f \left(\nabla U \right)_f \cdot \Delta_f \right] S_f}_{implicit} + \underbrace{\sum_{f=1}^{N} \left[\nu_f \left(\nabla U \right)_f \cdot k_f \right] S_f}_{explicit} \tag{16}$$

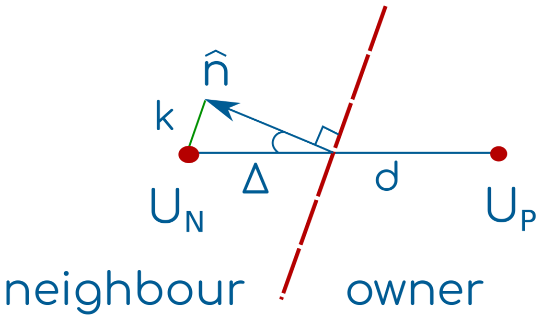
- Можно оценить явно ортогональный член:

$$(\nabla U)_f \cdot \Delta f = \frac{U_P - U_n}{|d|} \left|\Delta_f\right| \tag{17}$$

- Неортогональный член можно вычислить неявно (по скорости которая неизвестна) как источниковый или коррекционный член:

$$(\nabla U)_f \cdot k_f \tag{18}$$

- Если данный член вычислять явно, то увеличивается нестабильность.
- Чем выше неортогональность сетки, тем выше неявный (*explicit*) член и тем меньше явный (*implicit*) член.



- $\Theta \sim k$.
- Как только $\Theta \nearrow$, увеличивается коррекция неортогональности.

Limited Correction

- openFOAM предлагает ограничивать коррекцию.
- Коррекция неортогональности добавляется всегда, но её значение ограничено долей явного члена (γ):

$$(\nabla U)_f \cdot k < \gamma \left(\frac{U_P - U_N}{|d|} |\Delta_f| \right) \tag{19}$$

- Обычно $\gamma = 1$.
- Для очень плохих сеток можно уменьшить $(\gamma < 1)$ для улучшения стабильности и пожертвовать точностью.

Non-orthogonal Corrector Loops

- Необходимы дополнительные итерации, как только начинает использоваться коррекция неортогональности на рассчитанном поле скорости.
- Для хороших сеток, внешние циклы в SIMPLE являются достаточными для сходимости.
- Для плохих сеток требуются дополнительные циклы для давления (***inner loop***) - это ***Non-orthogonal Corrector Loops***.

- Решение на хорошей сетке:
  1. уравнение движения
  2. уравнение давления
  3. уравнения энергии, турбулентность и т.д.
- Решение на плохой сетке:
  1. уравнение движения
  2. уравнение давления
     - уравнение давления (Non-ortho Corrector)
     - уравнение давления (Non-ortho Corrector)
     - уравнение давления (Non-ortho Corrector)
  3. уравнения энергии, турбулентность и т.д.

Неортогональность сетки: The Over-Relaxed Approach

Background

- Большинство уравнений переноса скаляра, решаемых в CFD, содержат диффузионные члены:
  - уравнение движения: $\nabla \cdot (\mu((\nabla U) + (\nabla U)^T))$.
  - уравнение кинетической энергии: $\nabla \cdot \left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k}\right) \nabla k\right)$.
  - $\ldots$
- Все диффузионные члены требуют ***Non-Orthogonal Corrector***.
- Рассмотрим уравнение теплопроводности:

$$0 = \nabla (k \nabla T) \tag{20}$$

- k - коэффициент теплопроводности, T - температура.

- Для решения воспользуемся методом контрольного объёма, проинтегрируем по объёму ячейки

$$0 = \nabla\left(k\nabla T\right) \tag{21}$$

$$0 = \int\limits_V \nabla\left(k\nabla T\right) dV \tag{22}$$

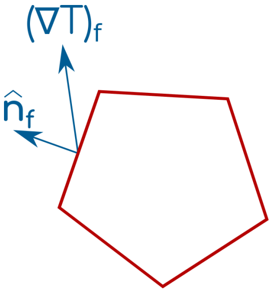
- Используя теорему о дивергенции:

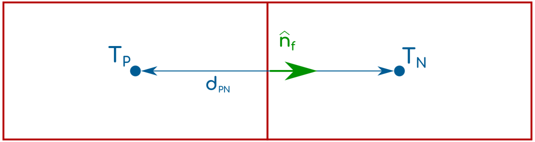
$$0 = \sum_{Faces}\left(k_f A_f\left(\nabla T_f \cdot \hat{n}_f\right)\right) \tag{23}$$

- Суммарное тепло $Q = kA\nabla T$ равно нулю - закон сохранения энергии.

$$0 = \sum_{Faces} \left(k_f A_f \left(\nabla T_f \cdot \hat{n}_f \right) \right) \tag{24}$$

- Тепловой поток направлен по градиенту температуры ∇T_f.
- Необходима компонента этого потока тепла по нормали к поверхности $\nabla T_f \cdot \hat{n}$.



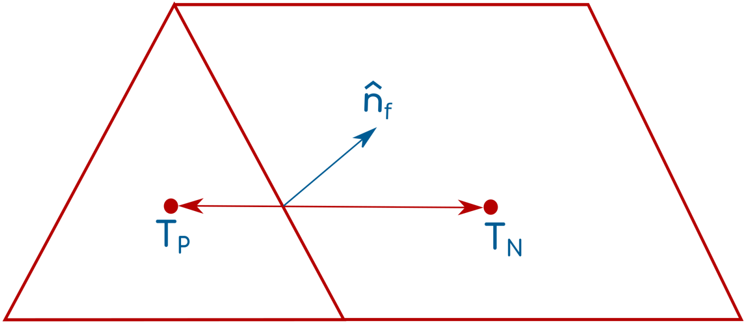


- Если $d_{PN} \parallel \hat{n}_f$:

$$\nabla T_f \cdot \hat{n}_f = \frac{T_N - T_P}{|d_{PN}|} \left|\hat{n}_f\right| \tag{25}$$

$$0 = \sum_{Faces} \left(k_f A_f \left(\nabla T_f \cdot \hat{n}_f\right)\right) \rightarrow \sum_{Faces} \left(k_f A_f \left(\frac{T_N - T_P}{|d_{PN}|} \cdot \left|\hat{n}_f\right|\right)\right) \tag{26}$$

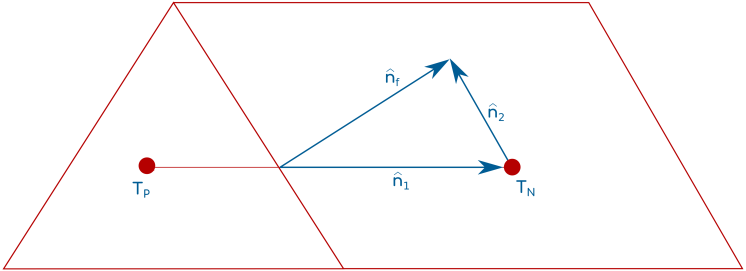
- Для большинства сеток $d_{PN} \nparallel \hat{n}_f$.
- Нельзя использовать предыдущее приближение.



- Разделим вектор $\hat{n}_f$ на две компоненты.

$$\hat{n}_f = \hat{n}_1 + \hat{n}_2 \tag{27}$$

- $d_{PN} \parallel \hat{n}_1$.
- $d_{PN} \nparallel \hat{n}_2$.



$$0 = \sum_{Faces} \left(k_f A_f \left(\nabla T_f \cdot \hat{n}_f\right)\right) \tag{28}$$

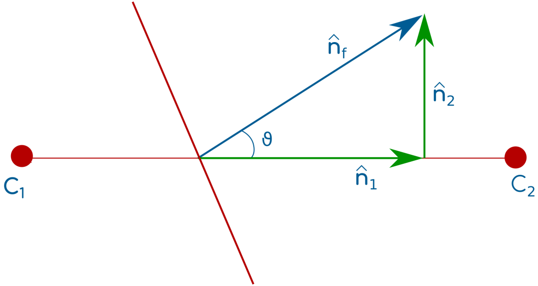
- Подставим $\hat{n}_f = \hat{n}_1 + \hat{n}_2$

$$0 = \sum_{Faces} \left(k_f A_f \left(\nabla T_f \cdot \hat{n}_1\right)\right) + \sum_{Faces} \left(k_f A_f \left(\nabla T_f \cdot \hat{n}_2\right)\right) \tag{29}$$

$$0 = \sum_{Faces} \left(k_f A_f \left(\frac{T_N + T_P}{|d_{PN}|}\right) |\hat{n}_1|\right) + \underbrace{\sum_{Faces} \left(k_f A_f \left(\nabla T_f \cdot \hat{n}_2\right)\right)}_{Non-Orthogonal Correction} \tag{30}$$

- Оценим второй член явно используя градиент температуры с предыдущей итерации. Этот член называется **Non-Orthogonal Correction**.

- Как выбрать $\hat{n}_1$ и $\hat{n}_2$?



- $\hat{n}_1 \parallel d_{PN}$. Можно выбрать любые вектора, но должно выполняться условие $\hat{n}_1 \parallel d_{PN}$.

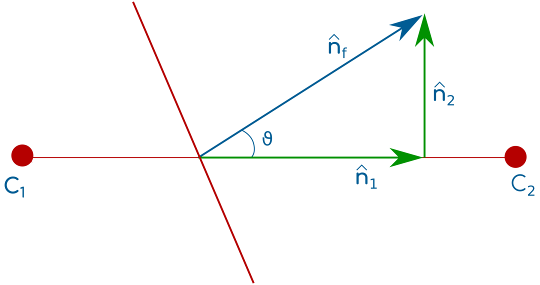
Метод 1. Прямоугольный треугольник. Минимальная коррекция.

- Пусть $\hat{n}_1 \perp \hat{n}_2$.

$$\hat{n}_1 = \hat{n}_f \cos\theta \qquad (31)$$

- Используем скалярное произведение: $a \cdot b = |a|\,|b| \cdot \cos\theta$.

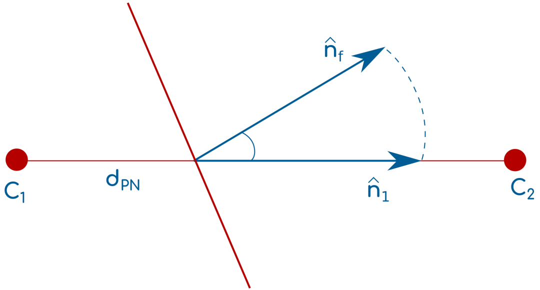
$$\hat{n}_1 = \hat{n}_f \left(\frac{\hat{n}_f \cdot d_{PN}}{|\hat{n}_f|\,|d_{PN}|} \right) \text{ и } \hat{n}_2 = \hat{n}_f - \hat{n}_1 \qquad (32)$$



Метод 2. Ротационное приближение. Ортогональная коррекция.

- Повернём $\hat{n}_f$ до параллельности с d_{PN}.

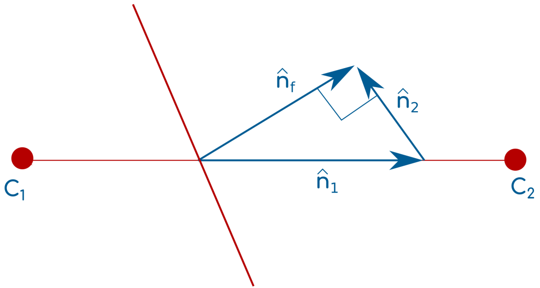
$$\hat{n}_1 = \hat{n}_f * \left(\frac{d_{PN}}{|d_{PN}|} \right) \qquad (33)$$



- В независимости от θ магнитуда $\hat{n}_1$ остаётся той же.

Метод 3. Over-Relaxed Approach.

- Сделаем $\hat{n}_2 \perp \hat{n}_f$.
- Получение $\hat{n}_1$ теперь немного сложнее...



$$\cos\theta = \frac{\hat{n}_f}{\hat{n}_1} \Rightarrow \hat{n}_1 = \frac{\hat{n}_f}{\cos\theta} \tag{34}$$

- Из скалярного произведения: $a \cdot b = |a|\,|b| \cdot \cos\theta$ выразим $\cos\theta$.

$$\left|\hat{n}_1\right| = \left|\hat{n}_f\right| \left(\frac{\left|\hat{n}_f\right| \left|d_{PN}\right|}{\hat{n}_f \cdot d_{PN}} \right) \tag{35}$$

- Это скаляр, который даёт магнитуду $\hat{n}_1$. Но нужен вектор!

- Умножим магнитуду $\hat{n}_1$ на направление d_{PN}:

$$\hat{n}_1 = |\hat{n}_1| * \left(\frac{d_{PN}}{|d_{PN}|}\right) \tag{36}$$

$$\hat{n}_1 = |\hat{n}_f| \left(\frac{|\hat{n}_f|\,|d_{PN}|}{\hat{n}_f \cdot d_{PN}}\right) * \left(\frac{d_{PN}}{|d_{PN}|}\right) \tag{37}$$

$$\hat{n}_1 = d_{PN} \left(\frac{|\hat{n}_f|^2}{\hat{n}_f \cdot d_{PN}}\right) \Rightarrow \tag{38}$$

$$\hat{n}_2 = \hat{n}_1 - \hat{n}_f \tag{39}$$

- При увеличении θ магнитуда $\hat{n}_1$ и $\hat{n}_2$ изменяются.

Какой из методов лучше?

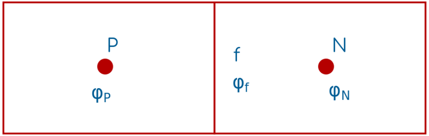
- Из Jasak (1996) стр. 141:
- при $\theta = 30^0$
  - Все методы дают одно и то же решение, если используется достаточное количество циклов коррекции.
  - Over-relaxed approach даёт самую размазанную сходимость, т.е. наиболее стабилен.
- При $\theta = 45^0$:
  - Метод прямоугольного треугольника и метод поворота расходятся при $\theta > 45^0$.
  - Over-relaxed approach сходится при больших углах $\theta = 60^0$.
  - $\Rightarrow$ данный метод предпочтительнее.

Плохие сетки

$$0 = \sum_{Faces} \left(k_f A_f \left(\frac{T_N + T_P}{|d_{PN}|} \right) |\hat{n}_1| \right) + \sum_{Faces} \left(k_f A_f \left(\nabla T_f \cdot \hat{n}_2 \right) \right) \quad (40)$$

- Для плохих сеток(большие θ) явный источниковый член может привести к расхождению решения.
- $\Rightarrow$ источниковый член ограничивается или отбрасывается полностью на плохих ячейках.
- Это приводит к локальной ошибке только на плохих ячейках и может привести к сходимости решения.
- Наибольшая ошибка в over-relaxed approach с увеличением $\hat{n}_2$.

Разница между Upwind, Linear Upwind и Central Differencing



- Допустим известны φ_P и φ_N, необходимо найти φ_f.
- Linear/Central Differensing - схема второго порядка.

$$\varphi = \psi \varphi_N + (1 - \psi)\varphi_P \tag{41}$$

$$\psi = \frac{|x_f - x_P|}{|x_N - x_P|}, 0 \leqslant \psi \leqslant 1 \tag{42}$$

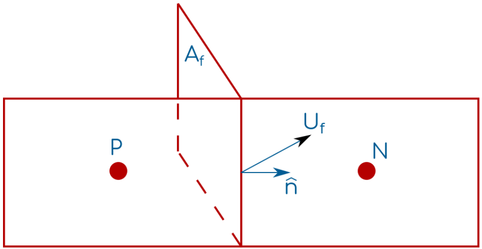
- Central Differensing - используется для диффузионных членов $\nu\nabla^2 U$ и никогда не должна использоваться для конвективных членов в RANS $(\nabla(UU))$
- Может использоваться в LES для конвективных членов, когда требуется бóльшая точность.

Upwind Differencing

- Зависит от направления массового потока.

$$F_f = \rho_f A_f (U_f \cdot \hat{n}) \tag{43}$$

- $\varphi_f = \varphi_P, F_f > 0$ - поток вытекает из ячейки.
- $\varphi_f = \varphi_N, F_f < 0$ - поток втекает в ячейку.



Upwind Differencing

- φ -постоянна между центром ячейки и поверхностью. Это схема первого порядка точности.
- Upwind differensing - не точна!
- Стабильна при доминантном конвективном потоке.
- Можно использовать как начальное приближение.

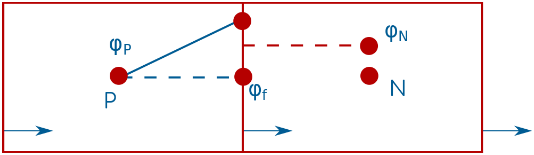
Linear Upwind Differencing

- Linear Upwind Differencing более точная чем Upwind.
- Для улучшения точности используется градиент.
- Изменение φ между центром ячейки и поверхностью линейно.
- Номинально это схема второго порядка.

$$\varphi_f = \begin{cases} \varphi_P + (\nabla_P) \cdot r, F_f > 0 \\ \varphi_N + (\nabla_N) \cdot r, F_f < 0 \end{cases} \tag{44}$$

Linear Upwind Differencing

- Linear Upwind Differencing хороша для конвективных членов.
- Недостаток схемы: иногда градиент даёт значение на поверхности выше значения центра ячейки.



Advanced Discretiation Schemes

- \- используют комбинацию:
  - Linear/Central для точности (φ_{CD})
  - Upwind для стабильности φ_{UD}

$$\varphi_f = \Psi \varphi_{UD} + (1 - \Psi) \varphi_{CD} \tag{45}$$

- Ψ - функция для переключения между схемами.