Уравнения в частных производных

Наумкин В.С.

Лекция №8, 2021

Содержание

Из Д.Мак-Кракен, У.Дорн. Численные методы и программирование на фортране

Уравнения в частных производных

- Рассмотрим линейные дифференциальные уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными:

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G, \tag{1}$$

- где A, B, C, D, E, F, G функции только от независимых переменных x и y.
- u - зависимая переменная.
- $u_{xy} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ - индексы обозначают частные производные.

типы ДУ

- Уравнения подразделяются на три типа:
  - $B^2 - 4AC < 0$ - эллиптические.
  - $B^2 - 4AC = 0$ - параболические.
  - $B^2 - 4AC > 0$ - гиперболические.
- От вида уравнения зависит метод решения.

Разностные уравнения

- Классическое определение производной функций одной переменной:

$$\frac{dx}{dy} = \lim_{h \to 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{h} \tag{2}$$

- Компьютеры не оперируют бесконечными величинами. Можно придать h некоторое малое, не нулевое значение, и попытаться проверить, что приближение получается достаточно точным (проблема точности) и что ошибка не возрастает в ходе процесса вычислений (проблема устойчивости).

- Этот метод сводится к тому, что производная заменяется конечной разностью.
- Поскольку имеется две независимые переменные, то они обе должны участвовать в разностном уравнении.
- Рассмотрим разности в направлении x. Разложение функции $u(x, y_0)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0, y_0 можно записать в виде:

$$u(x, y_0) = u(x_0, y_0) + (x - x_0)u_x(x_0, y_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2}u_{xx}(\xi, y_0) \tag{3}$$

- где ξ лежит в между x и x_0. Если $x = x_0 + h$, то после преобразований:

$$u_x(x_0, y_0) - \frac{u(x_0 + h, y_0) - u(x_0, y_0)}{h} = -\frac{h}{2}u_{xx}(\xi, y_0) \tag{4}$$

- Другими словами, если приближённо представить u_x с помощью правой разности:

$$u_x(x_0, y_0) = \frac{u(x_0 + h, y_0) - u(x_0, y_0)}{h} \tag{5}$$

- то ошибка вычислений составит:

$$E_T = -\frac{h}{2} u_{xx}(\xi, y_0), x_0 < \xi < x_0 + h. \tag{6}$$

- Левая разность:

$$u_x(x_0, y_0) = \frac{u(x_0, y_0) - u(x_0 - h, y_0)}{h} \tag{7}$$

- В дальнейшем понадобятся и левая и правая разности для вывода разностной формулы для u_{xx}.
- Используя правую разность:

$$u_{xx}(x_0, y_0) = \frac{u_x(x_0 + h, y_0) - u_x(x_0, y_0)}{h} \tag{8}$$

- Если в эту формулу подставить правые разности для u_x, то окончательный результат окажется «сдвинутым» вправо. Чтобы скомпенсировать этот эффект, используем левые разности для u_x:

$$u_x(x_0+h,y_0)=\frac{u(x_0+h,y_0)-u(x_0,y_0)}{h} \tag{9}$$

- В итоге получаем

$$u_{xx}(x_0,y_0)=\frac{u(x_0+h,y_0)-2u(x_0,y_0)+u(x_0-h,y_0)}{h^2} \tag{10}$$

- Ошибка ограничения, возникающая при замене производных разностями:

$$u(x,y_0)=u(x_0,y_0)+(x-x_0)u_x(x_0,y_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2}u_{xx}(x_0,y_0)+\frac{(x-x_0)^3}{6}u_{xxx}(x_0,y_0)+$$
$$+\frac{(x-x_0)^4}{24}u_{xxxx}(\xi,y_0)$$

- Пусть $x = x_0 + h; x = x_0 - h$. Сложим два получившихся равенства, отсюда ошибка ограничения:

$$E_T = -\frac{h^2}{12}u_{xxxx}(\xi, y_0); x_0 - h \le \xi \le x_0 + h \tag{11}$$

- Аналогично получаются производные в направлении y:

$$u_{yy}(x_0, y_0) = \frac{u(x_0, y_0 - k) - 2u(x_0, y_0) + u(x_0, y_0 + k)}{k^2} \tag{12}$$

- Теперь имеются разностные выражения для u_x, u_{xx}, u_y, u_{yy}. Используя эти выражения, можно полностью переписать дифференциальное уравнение в частных производных, получив из него уравнение в конечных разностях. Например уравнение Лапласа:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \tag{13}$$

- перепишется в виде:

$$\frac{u(x_0 + h, y_0) - 2u(x_0, y_0) + u(x_0 - h, y_0)}{h^2} + \frac{u(x_0, y_0 - k) - 2u(x_0, y_0) + u(x_0, y_0 + k)}{k^2} = 0 \tag{14}$$

Эллиптические уравнения

- Примером эллиптического уравнения является уравнение для расчёта напряжений, возникающих при упругом кручении длинного цилиндрического стержня. Сечение стержня может быть любой формы. Будем считать, что сечение стержня ограничено кривой ; область, ограниченную кривой, обозначим R.

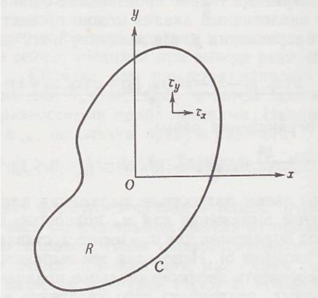


Рис.: Сечение цилиндра в задаче об упругом кручении

- Предположим, что ось z параллельна оси цилиндра и проходит через центр тяжести сечения O. Таким образом сечение цилиндра лежит в плоскости xy. Обозначим угол кручения на единицу длины через θ. Т.е. угол поворота плоскости $z = z_0$ относительно плоскости $z = 0$ будет равен $z_0 \cdot \theta$. Единственными ненулевыми напряжениями в задаче являются напряжения сдвига τ_x и τ_y в направлениях осей x и y в плоскости xy. Если определить функцию ψ с помощью соотношений:

$$\tau_x = \frac{E \cdot \theta}{2(1+\nu)} \frac{\partial \psi}{\partial y} \tag{15}$$

$$\tau_y = -\frac{E \cdot \theta}{2(1+\nu)} \frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{16}$$

- где E - модуль Юнга, ν- коэффициент Пуассона для материала стержня, то функция ψ является решением уравнения:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = -2 \quad (17)$$

$$\Delta\psi = -2 \quad (18)$$

$$\nabla^2\psi = -2 \quad (19)$$

- внутри области R, а на границе области C решение $\psi = const$.
- Обычно принимают $\psi = 0$, поскольку интересующие нас физические величины зависят только от производных ψ.

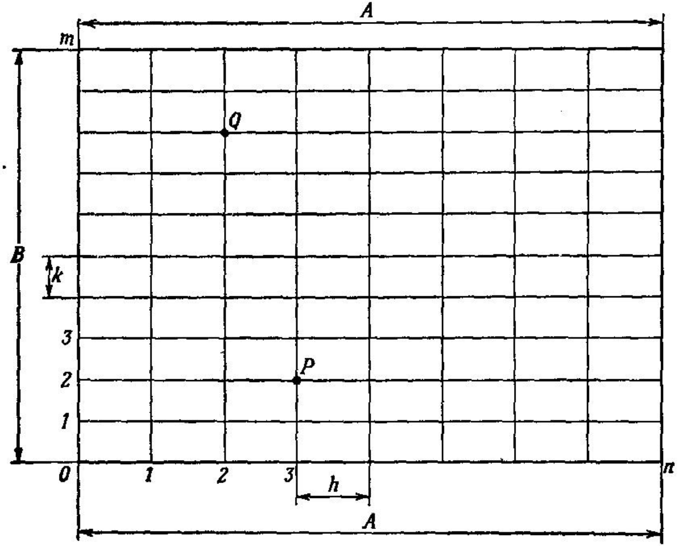
- Многие задачи приводят к уравнению Пуассона: распределение потенциалов на проводящей плоскости при задании потенциала на границе или задача о стационарных потоках тепла в двумерном теле.

Вывод разностных схем решения эллиптических уравнений

- Рассмотрим классическую задачу Дирихле:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2\psi}{\partial^2 y} = 0 \qquad (20)$$

- Это уравнение Лапласа в некоторой области и $\psi = f(x, y)$ на границе этой области, которой является кривая .


A
m
Q
B
k
3
P
2
1
0
1
2
3
h
n
A

- Начало координат расположим в точке (0,0). Обозначим $u(ih, jh) = u_{i,j}$.
- При этой системе обозначений граничное условие запишется в виде:

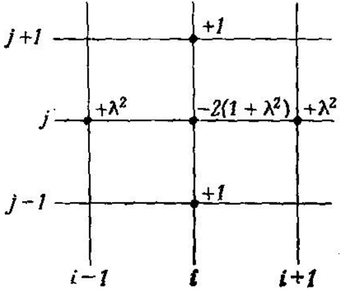
$$
\begin{aligned}
u_{i,0} &= f_{i,0}; i = 0, 1, 2, ...n,\\
u_{i,m} &= f_{i,m}; i = 0, 1, 2, ...n,\\
u_{0,j} &= f_{0,j}; j = 0, 1, 2, ...m,\\
u_{n,j} &= f_{n,j}; j = 0, 1, 2, ...m
\end{aligned}
$$

- Пусть теперь точка i, j будет точкой x_0, y_0. Обозначим $\lambda = \frac{k}{h}$. ДУ сведётся к разностному уравнению вида:

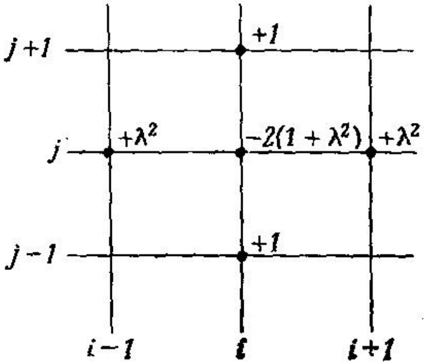
$$\lambda^2 u_{i+1,j} + \lambda^2 u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 2(1 + \lambda^2) u_{i,j} = 0 \tag{21}$$

- для $i = 1, 2...n - 1$ и $j = 1, 2..m - 1$.
- При $\lambda = 1$, т.е. при одинаковых величинах интервалов разбиения в горизонтальном и вертикальном направлениях, это соотношение означает, что значение $u_{i,j}$ является средним арифметическим из четырёх соседних с ним.

- Всего имеется $(m-1)(n-1)$ уравнений относительно $(m+1)(n+1)$ неизвестных. После того как $2(m+n)$ неизвестных будут исключены с помощью граничного условия, останется ровно $(m-1)(n-1)$ уравнений относительно $(m-1)(n-1)$ переменных.
- Попробуем найти свойства системы уравнений, которые бы помогли облегчить вычисления.



- Уравнение (21) можно представить схематически, начертив пять узлов разностного уравнения и обозначив около каждого из них соответствующий коэффициент. Этот рисунок является шаблоном. Он геометрически иллюстрирует разностную аппроксимацию ДУ.
- При $h \to 0, k \to 0$ разностное уравнение приближается к дифференциальному. Но приближается ли при $h \to 0, k \to 0$ решение разностного уравнения к решению ДУ? Для эллиптических уравнений — ДА, В случае параболических и гиперболических уравнений придётся соблюдать некоторые ограничения, которые бы обеспечивали такую сходимость.



Решение эллиптического разностного уравнения

- Запишем подробно некоторые из уравнений (21). Для удобства примем $\lambda = 1$ т.е. $h = k$, но общность выводов нетрудно проверить при любом $\lambda > 1$. Начнём с $i = 1, j = 1$ и при неизменном j пройдем значения $i = 1, 2, \cdots n - 1$.

$$\begin{aligned}
4u_{1,1} - u_{2,1} - u_{1,2} &= f_{1,0} + f_{0,1};\\
-u_{1,1} + 4u_{2,1} - u_{3,1} - u_{2,2} &= f_{2,0};\\
-u_{2,1} + 4u_{3,1} - u_{4,1} - u_{3,2} &= f_{3,0};\\
&\dots\\
-u_{n-2,1} + 4u_{n-1,1} - u_{n-1,2} &= f_{n-1,0} + f_{n,1}
\end{aligned}$$

- Увеличим j до двух и снова пробежим все значения $i = 1, 2 \ldots n - 1$:

$$
\begin{aligned}
-u_{1,1} - 4u_{1,2} - u_{2,2} - u_{1,3} &= f_{0,2}; \\
-u_{2,1} + u_{1,2} + 4u_{2,2} - u_{3,2} - u_{2,3} &= 0; \\
-u_{3,1} + u_{2,2} + 4u_{3,2} - u_{4,2} - u_{3,3} &= 0; \\
&\ldots \\
-u_{n-2,1} - u_{n-3,2} + 4u_{n-2,2} - u_{n-1,2} - u_{n-2,3} &= 0; \\
-u_{n-1,1} - u_{n-2,2} + 4u_{n-1,2} - u_{n-1,3} &= f_{n,2}
\end{aligned}
$$

- Продолжим до $j = m - 1$.

- Полученная система уравнений следующими свойствами:

1. Подавляющая часть коэффициентов системы равна нулю.
2. В каждом уравнении один из коэффициентов равен +4. Если в уравнении имеется пять коэффициентов, отличных от нуля, то сумма остальных четырёх коэффициентов равна -4, если же количество ненулевых коэффициентов меньше пят, то сумма остальных равна -2 или -3.

- Таким образом, в этой системе выполнены условия сходимости итерационного метода Гаусс-Зейделя (на основе её второго свойства). Первое свойство системы делает решение методом исключения весьма непривлекательным: исходная система с большим количеством равных нулю коэффициентов превратится после исключения неизвестных в полную треугольную систему. Учитывая, что m и n часто бывают довольно большими, решение системы уравнений с помощью метода исключения нельзя признать целесообразным.

- Запишем некоторые уравнения в том виде, в котором с ними производятся итерации. Обозначая верхними индексами порядковый номер итерации и полагая $u_{i,j}^{(0)} = 0$ для всех i, j.

$$u_{1,1}^{(1)} = \frac{1}{4}\left[f_{1,0} + f_{0,1} + u_{2,1}^{(0)} + u_{1,2}^{(0)}\right]$$

$$u_{2,1}^{(1)} = \frac{1}{4}\left[f_{2,0} + u_{1,1}^{(1)} + u_{3,1}^{(0)} + u_{2,2}^{(0)}\right]$$

$$\dots$$

$$u_{n-1,1}^{(1)} = \frac{1}{4}\left[f_{n-1,0} + f_{n,1} + u_{n-2,1}^{(1)} + u_{n-1,2}^{(0)}\right]$$

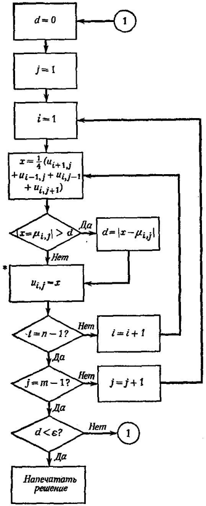
$$\dots$$

Основная схема решения системы уравнений

- Вводится двумерный массив, состоящий из m строк и n столбцов. Строки ноль и m а так же столбцы ноль и n представляют собой граничные условия, т.е. они задаются перед решением системы уравнений. После этого вычисляются значения в точках i, j с помощью двух циклов. Только что вычисленное значение $u_{i,j}$ сравнивается с тем, которое было вычислено на предыдущем шаге. Наибольшая разница между значениями сравнивается с допустимым значением ϵ чтобы определить сошёлся расчёт или нет. Если нет — то расчёт повторяется.
- Можно ввести коэффициенты релаксации, которые позволяют ускорить сходимость решения: для этого в блок-схеме в пункте отмеченным $(^*)$ следует вычислять следующее значение:

$$u_{i,j} = \omega x + (1 - \omega) u_{i,j} \tag{22}$$

- $x = u_{i,j}$,
- ω - ускоряющий множитель. В общем случае лежит в диапазоне от 1 до 2. Определяется подбором.



$d = 0$
1
$j = 1$
$i = 1$
$x = \frac{1}{4}(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1})$
$|x - \mu_{i,j}| > d$
Да
$d = |x - \mu_{i,j}|$
Нет
$u_{i,j} = x$
$i = n - 1?$
Нет
$i = i + 1$
Да
$j = m - 1?$
Нет
$j = j + 1$
Да
$d < \varepsilon?$
Нет
1
Да
Напечатать решение

Алгоритм Томаса / Метод прогонки

Алгоритм Томаса
из wikipedia

- используется для решения систем линейных уравнений вида $Ax = F$, где A -трёхдиагональная матрица.
- Система уравнений $Ax = F$ равносильна соотношению:

$$A_i x_{i-1} + B_i x_i + C_i x_{i+1} = F_i \tag{23}$$

- Метод прогонки основывается на предположении, что искомые неизвестные связаны рекуррентным соотношением:

$$x_i = \alpha_{i+1} x_{i+1} + \beta_{i+1} \tag{24}$$

$$i = n-1, n-2 \cdots, 1 \tag{25}$$

- Используя это соотношение, выразим x_{i-1} и x_i через x_{i+1} и подставим в (23)

$$(A_i \alpha_i \alpha_{i+1} + B_i \alpha_{i+1} + C_i)\, x_{i+1} + A_i \alpha_i \beta_{i+1} + A_i \beta_i + B_i \beta_{i+1} - F_i = 0 \tag{26}$$

- Это соотношение будет выполняться независимо от решения, если потребовать

$$A_i \alpha_i \alpha_{i+1} + B_i \alpha_{i+1} + C_i = 0 \tag{27}$$

$$A_i \alpha_i \beta_{i+1} + A_i \beta_i + B_i \beta_{i+1} - F_i = 0 \tag{28}$$

- Отсюда следует:

$$\alpha_{i+1} = \frac{-C_i}{A_i \alpha_i + B_i} \tag{29}$$

$$\beta_{i+1} = \frac{F_i - A_i \beta_i}{A_i \alpha_i + B_i} \tag{30}$$

- Из первого уравнения получим:

$$\alpha_2 = \frac{-C_i}{B_1} \tag{31}$$

$$\beta_2 = \frac{F_i}{B_i} \tag{32}$$

- После нахождения прогоночных коэффициентов α и β получим решение системы. При этом

$$x_i = \alpha_{i+1} x_{i+1} + \beta_{i+1}, i = n-1, \cdots 1 \tag{33}$$

$$x_n = \frac{F_n - A_n \beta_n}{B_n + A_n \alpha_n} \tag{34}$$

- Другим способом объяснения существа метода прогонки, более близким к терминологии конечно-разностных методов и объясняющим происхождение его названия, является следующий: преобразуем уравнение (23) к эквивалентному ему уравнению

$$A' x = F' \tag{35}$$

- с надиагональной (наддиагональной) матрицей

$$A' = \begin{vmatrix} B'_1 & C_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & B'_2 & C_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B'_3 & C_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & B'_{n-1} & C_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B'_n \end{vmatrix} \qquad (36)$$

- Вычисление проводятся в два этапа. На первом вычисляются компонент матрицы B'_i и вектора F', начиная с $i = 2$ до $i = n$:

$$B'_1 = B_1;\ B'_i = B_i - \frac{A_i}{B'_{i-1}} C_{i-1} \tag{37}$$

$$F'_1 = F_1;\ F'_i = F_i - \frac{A_i}{B'_{i-1}} F'_{i-1} \tag{38}$$

- На втором этапе, для $i = n, n-1, \cdots, 1$ вычисляется решение:

$$x_n = \frac{F'_n}{B'_n} \tag{39}$$

$$x_i = \frac{F'_i - C_i x_{i+1}}{B'_i} \tag{40}$$

- Для применимости формул метода прогонки достаточно свойства диагонального преобладания у матрицы A.