Дискретизация

Наумкин В.С.

Лекция №2, 2021

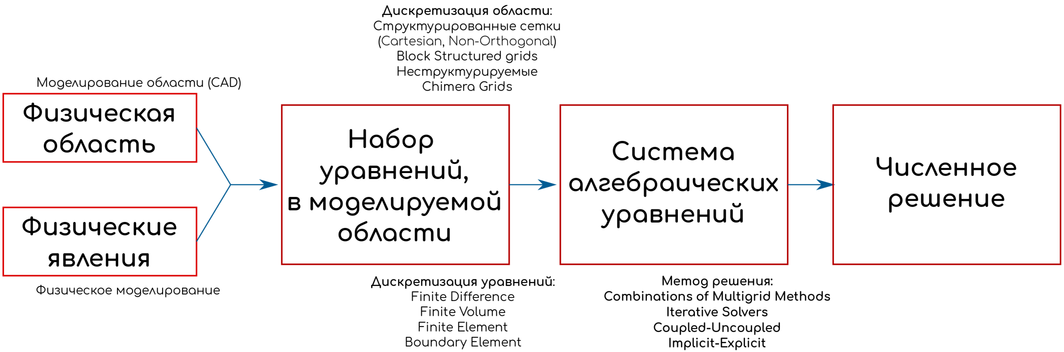
Содержание

- Из F. Moukalled, L. Mangani, M. Darwish *The Finite Volume Method in Computational Fluid Dynamics* // Springer International Publishing Switzerland.- 2016

Дискретизация

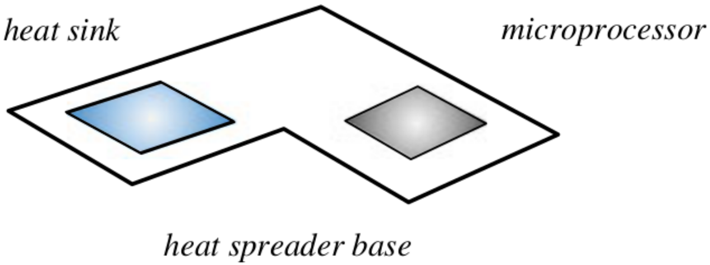
Дискретизация

Процесс дискретизации



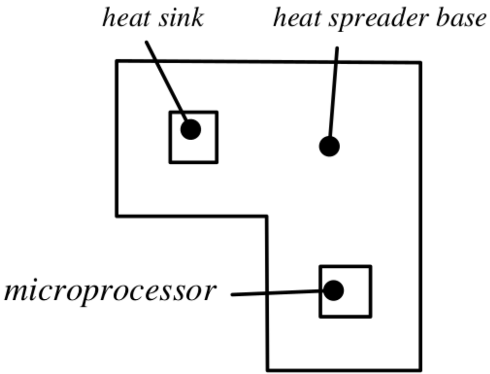
Пример процесса дискретизации

- Рассмотрим процесс дискретизации в задаче об охлаждении процессора.



Пример процесса дискретизации

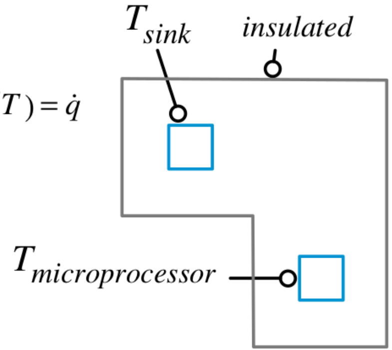
1. Моделирование области



Пример процесса дискретизации

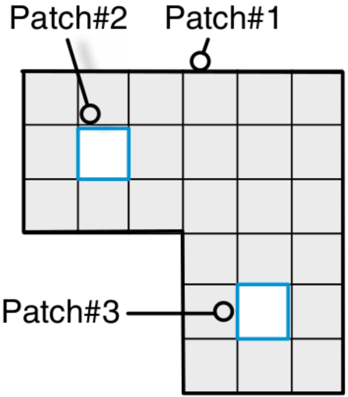
2. Физическое моделирование

$$-\nabla \cdot (k\nabla T) = \dot{q}$$



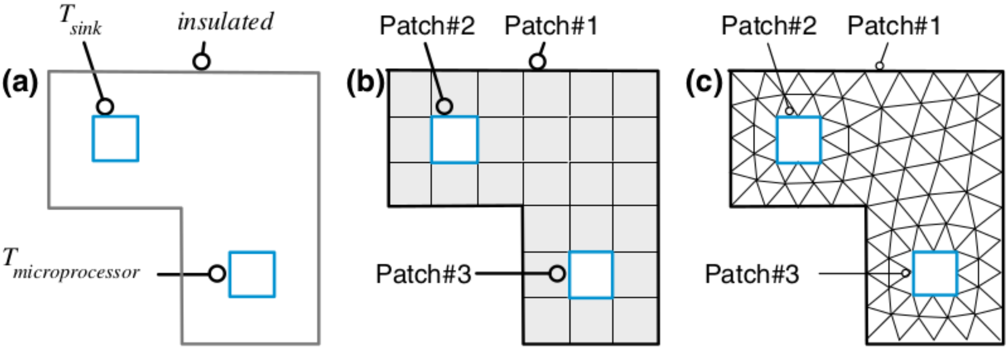
Пример процесса дискретизации

3. Дискретизация области



Пример процесса дискретизации

3. Дискретизация области-сетка



Пример процесса дискретизации

3. Дискретизация области-сетка

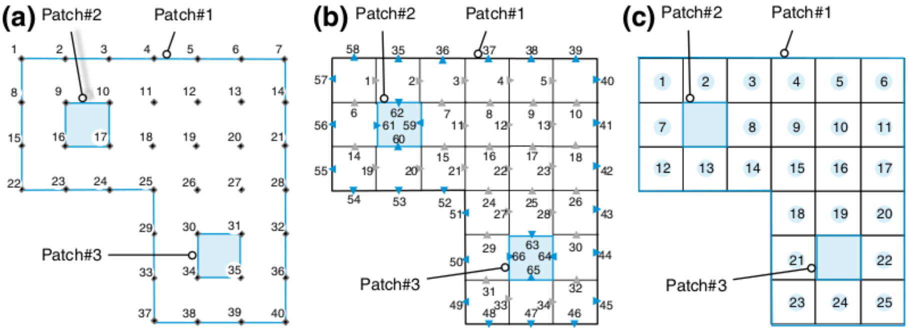
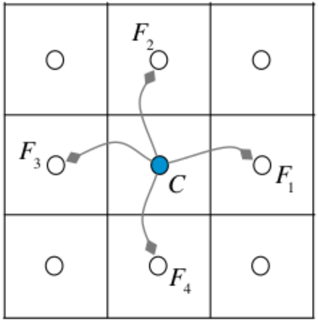


Рис.: a. Узлы сетки(vertices), b. Поверхности сетки (faces), c. Ячейки сетки (elements)

Топология сетки
Связь между элементами сетки

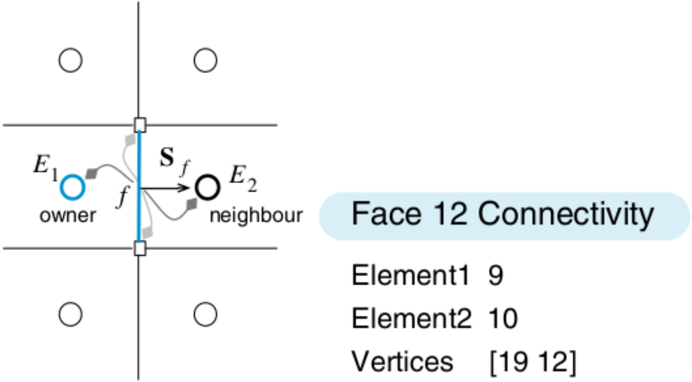


Element 9 Connectivity

Neighbours [10 4 8 15]
Faces [12 8 11 16]
Vertices [19 11 12 18]

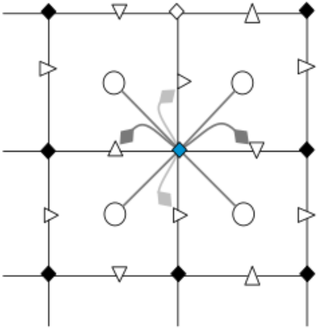
Топология сетки

Связь между поверхностями сетки



Топология сетки

Связь между вершинами сетки



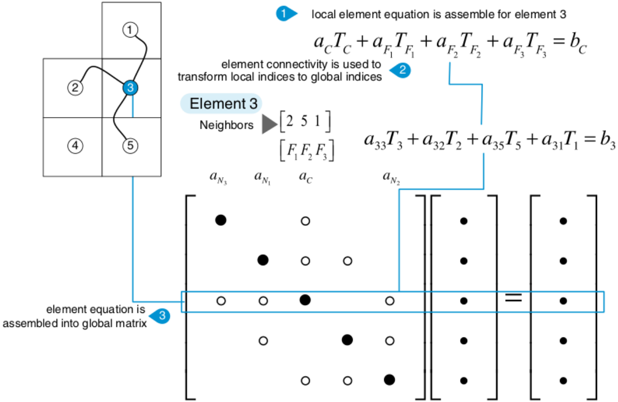
Vertex Connectivity

Elements [...]

Faces [...]

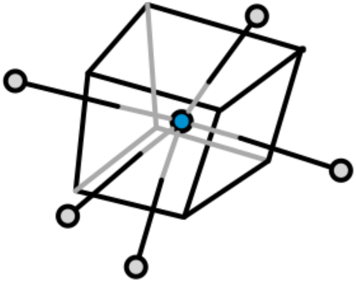
Топология сетки

Локальные элементы матрицы, помещённые в общую матрицу



Пример процесса дискретизации

4. Дискретизация уравнений



$$\underbrace{\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}}_{\text{transient term}} + \underbrace{\nabla\cdot(\rho\mathbf{v}\phi)}_{\text{convection term}} = \underbrace{\nabla\cdot(\Gamma\nabla\phi)}_{\text{diffusion term}} + \underbrace{Q}_{\text{source term}}$$

$$a_C\phi_C + \sum_{F\sim NB(C)} a_F\phi_F = b_C$$

Дискретизация уравнений

$$-\nabla \cdot (\lambda \nabla T) = q \quad (1)$$

- Система дифференциальных уравнений в частных производных трансформируется в набор алгебраических уравнений для каждого элемента расчётной области. Эта система уравнений помещается в глобальную матрицу и векторы:

$$\mathbf{A}\,[T] = \mathbf{b} \quad (2)$$

Дискретизация уравнений

- Рассмотрим процесс дискретизации для элементарного объёма C.
- Проинтегрируем уравнение (1) по объёму (площади) ячейки:

$$-\iint\limits_{V_C} \nabla \cdot (\lambda \nabla T)\, dV = \iint\limits_{V_C} q dV \qquad (3)$$

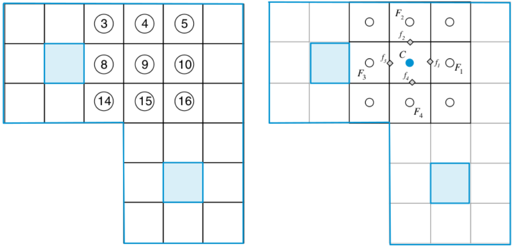


Рис.: Шаблон дискретизации

Дискретизация уравнений

- Используя теорему Гаусса-Остроградского, преобразуем объёмный интеграл в поверхностный.

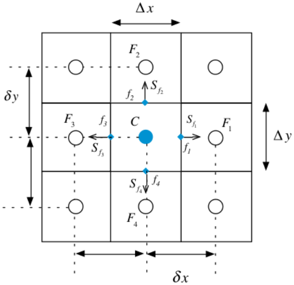
$$-\int\limits_{S_C} (\lambda \nabla T) \cdot \mathbf{S} = q_C V_C \tag{4}$$

$$-\sum_{f\sim nb(C)} (\lambda \nabla T)_f \cdot \mathbf{S}_f = q_C V_C \tag{5}$$

$$-(\lambda \nabla T)_{f_1} \cdot \mathbf{S}_{f_1} - (\lambda \nabla T)_{f_2} \cdot \mathbf{S}_{f_2} - (\lambda \nabla T)_{f_3} \cdot \mathbf{S}_{f_3} - (\lambda \nabla T)_{f_4} \cdot \mathbf{S}_{f_4} = q_C V_C \tag{6}$$

Дискретизация уравнений

- Рассмотрим поверхность f_1:



$$\mathbf{S}_{F_1} = \Delta y_{f_1} \mathbf{i} \tag{7}$$

$$\delta x_{f_1} = x_{F_1} - x_C \tag{8}$$

$$\nabla T_{f_1} = \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{f_1} \mathbf{i} + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{f_1} \mathbf{j} \tag{9}$$

$$\nabla T_{f_1} \cdot \mathbf{S}_{f_1} = \left(\frac{\partial T}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial T}{\partial y}\mathbf{j}\right)_{f_1} \cdot \Delta y_{f_1} \mathbf{i} = \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{f_1} \Delta y_{f_1} \tag{10}$$

Дискретизация уравнений

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{f_1} = \frac{T_{F_1} - T_C}{\delta x_{f_1}} \tag{11}$$

$$\nabla T_{f_1} \cdot \mathbf{S}_{f_1} = \frac{T_{F_1} - T_C}{\delta x_{f_1}} \Delta y_{f_1} \tag{12}$$

$$-(\lambda \nabla T)_{f_1} \cdot \mathbf{S}_{f_1} = a_{F_1}\left(T_{F_1} - T_C\right) \tag{13}$$

$$a_{F_1} = -\lambda \frac{\Delta y_{f_1}}{\delta x_{f_1}} \tag{14}$$

Дискретизация уравнений

$$-\sum_{f\sim nb(C)} (\lambda \nabla T)\cdot \mathbf{S}_f = \sum_{F\sim NB(C)} a_F (T_F - T_C) = \tag{15}$$

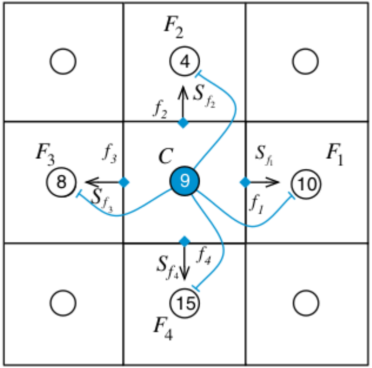
$$-\left(a_{F_1} + a_{F_2} + a_{F_3} + a_{F_4}\right) T_C + a_{F_1}T_{F_1} + a_{F_2}T_{F_2} + a_{F_3}T_{F_3} + a_{F_4}T_{F_4} = q_C V_C \tag{16}$$

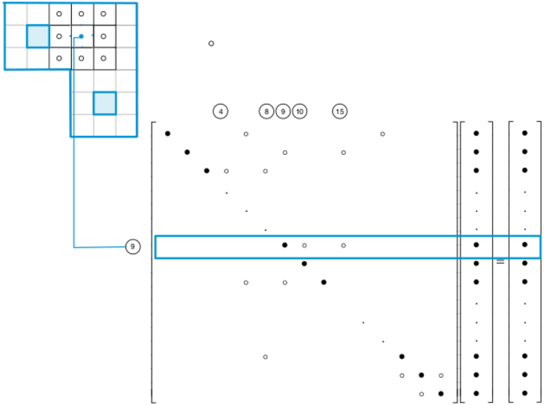
$$a_C T_C + \sum_{F\sim NB(C)} a_F T_F = b_C \tag{17}$$

$$a_C = \sum_{F\sim NB(C)} a_F = -\left(a_{F_1} + a_{F_2} + a_{F_3} + a_{F_4}\right) \tag{18}$$

$$b_C = q_C V_C \tag{19}$$

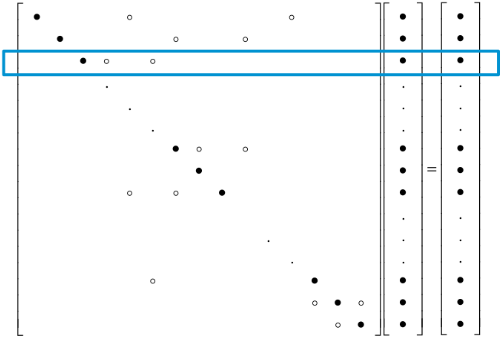
Дискретизация уравнений





Пример процесса дискретизации

5. Решение системы алгебраических уравнений



Решение системы алгебраических уравнений

- Прямой метод: нахождение обратной матрицы.

$$[T] = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \tag{20}$$

- Итеративный метод: Gauss-Seidel iterative method.

$$T_C = \frac{-\sum\limits_{F\sim NB(C)} a_F T_F + b_C}{a_C} \tag{21}$$