

1. Вычисление корня из комплексного числа

$$w_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\arg z + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\arg z + 2k\pi}{n} \right) \quad k=0,1,\dots,n-1.$$

Здесь $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ - модуль комплексного числа z . Аргумент $\arg z$ комплексного числа z определяется из выражений $\cos(\arg z) = \frac{x}{|z|}$, $\sin(\arg z) = \frac{y}{|z|}$.

2. Возведение в степень. Формула Муавра $z^n = |z|^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$, $\varphi = \text{Arg } z$

3. Формулы Эйлера

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z, \quad e^{-iz} = \cos z - i \sin z, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

4. Связь основных элементарных функций комплексной переменной

$$\cos iz = \text{ch } z; \quad \sin iz = i \text{sh } z;$$

$$\text{ch } iz = \cos z; \quad \text{sh } iz = i \sin z;$$

$$e^z = \text{ch } z + \text{sh } z; \quad e^{-z} = \text{ch } z - \text{sh } z;$$

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z; \quad e^{-iz} = \cos z - i \sin z;$$

$$\text{Ln } z = \ln |z| + i(\arg z + 2k\pi);$$

$$\text{Arcsin } z = -i \text{Ln} \left(iz + \sqrt{1 - z^2} \right), \quad \text{Arc cos } z = -i \text{Ln} \left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right)$$

$$\text{Arctg } z = -\frac{i}{2} \text{Ln} \frac{1+iz}{1-iz}, \quad \text{Arcctg } z = \frac{i}{2} \text{Ln} \frac{z-i}{z+i};$$

$$\text{Arsh } z = \text{Ln} \left(z + \sqrt{z^2 + 1} \right), \quad \text{Arch } z = \text{Ln} \left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right);$$

$$\text{Arth } z = \frac{1}{2} \text{Ln} \frac{1+z}{1-z}, \quad \text{Arcth } z = \frac{1}{2} \text{Ln} \frac{1+z}{z-1};$$

$$z^a = e^{a \text{Ln } z}; \quad a^z = e^{z \text{Ln } a} \quad (a, z - \text{комплексные числа}).$$

5. Ряд Лорана $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-a)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$.

6. Ряды Тейлора по степеням z для некоторых элементарных функций

1) $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots, |z| < \infty.$

2) $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots, |z| < \infty.$

3) $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots, |z| < \infty.$

4) $\operatorname{sh} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots, |z| < \infty.$

5) $\operatorname{ch} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots, |z| < \infty.$

6) $(1+z)^m = 1 + \frac{m}{1!} z + \frac{m(m-1)}{2!} z^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-(n-1))}{n!} z^n + \dots, |z| < 1.$

7) $\frac{1}{z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots, |z| < 1.$

8) $\frac{1}{z+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n = 1 - z + z^2 - \dots + (-1)^n z^n + \dots, |z| < 1.$

9) $\ln(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1} = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots + (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1} + \dots, |z| < 1.$

Операционное исчисление

Свойства изображений

Таблица 8.1

$f(t) \doteq F(p), \quad g(t) \doteq G(p)$		
I	$\sum_{i=1}^n k_i f_i(t) \doteq \sum_{i=1}^n k_i F_i(p),$	$k_i = \text{const}$
II	$f(at) \doteq \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$	$a = \text{const}, a > 0$
III	$\eta(t-\tau)f(t-\tau) \doteq e^{-p\tau}F(p)$	$\tau > 0$
IV	$e^{\lambda t}f(t) \doteq F(p-\lambda)$	$\lambda = \text{const}$
V	$f'(t) \doteq pF(p) - f(0),$ $f''(t) \doteq p^2F(p) - pf(0) - f'(0),$ $f^{(n)}(t) \doteq p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$	
$f(t) \doteq F(p), \quad g(t) \doteq G(p)$		
VI	$tf(t) \doteq -\frac{dF(p)}{dp}, \quad t^n f(t) \doteq (-1)^n \frac{d^n F(p)}{dp^n}$	
VII	$\int_0^t f(z)dz \doteq \frac{F(p)}{p}$	
VIII	$\frac{f(t)}{t} \doteq \int_p^\infty F(z)dz$	если $\int_p^\infty F(z)dz$ сходится
IX	$f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \doteq F(p)G(p)$	

Изображения некоторых функций

Таблица 8.2

№	$f(t)$	$F(p)$
1	$\eta(t)$	$\frac{1}{p}$
2	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
3	e^{at}	$\frac{1}{p-a}$
4	$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$
5	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
6	$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
7	$e^{-\lambda t} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p+\lambda)^2 + \omega^2}$
8	$e^{-\lambda t} \cos \omega t$	$\frac{p+\lambda}{(p+\lambda)^2 + \omega^2}$
9	$\text{sh } \lambda t$	$\frac{\lambda}{p^2 - \lambda^2}$
10	$\text{ch } \lambda t$	$\frac{p}{p^2 - \lambda^2}$
11	$t \sin \omega t$	$\frac{2\omega p}{(p^2 + \omega^2)^2}$

12	$t \cos \omega t$	$\frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}$
----	-------------------	---