Министерство образования и науки Российской федерации
Федеральное агентство по образованию
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

В.Я. Долгих, В.И. Бутырин, Г.В. Недогибченко, Э.Б. Шварц

ПРАКТИКУМ ПО СПЕЦГЛАВАМ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ (ТФКП, ОИ, ТП)

Утверждено
Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

НОВОСИБИРСК
2014

УДК 51 (075.8)

Коллектив авторов:
В.Я. Долгих, В.И. Бутырин, Г.В. Недогибченко, Э.Б. Шварц

Рецензенты:
Хаблов В.В., канд. физ.-мат.наук, доцент,
Кузин Г.А., старший преподаватель

Работа подготовлена на кафедре
инженерной математики

Практикум по спецглавам высшей математики (ТФКП, ОИ, ТП): учебное пособие / колл. Авторов. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2014. – 80 с.

Данное учебное пособие предназначено для студентов НГТУ и включает в себя теоретические сведения и задачи по следующим разделам курса высшей математики: теория функций комплексного переменного, операционное исчисление и теория поля.

Подробно разобрано решение основных задач.

УДК 51 (075.8)

ЧАСТЬ 1

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

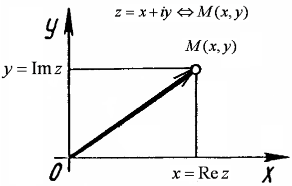
1.1. КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

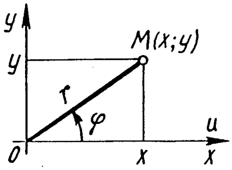
1. Комплексные числа

Комплексным числом z называется упорядоченная пара действительных чисел (x, y), записанных в определенном порядке: $z=(x, y)$. Одним из обозначений служит запись вида

$$z = x + i\,y, \tag{1}$$

называемая алгебраической формой записи комплексного числа z. В записи (1) x называется действительной, y - мнимой частями комплексного числа z (для этого употребляется также запись $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$); i называется «мнимой единицей». Комплексное число $\overline{z} = x - i\,y$ называется сопряженным комплексному числу $z = x + i\,y$. Два комплексных числа, отличающихся лишь знаком при мнимой части, называют комплексно-сопряженными. Понятия «больше» и «меньше» для комплексных чисел не определены.





Тригонометрическая форма записи комплексного числа имеет вид:

$$z = |z|\big(\cos(\arg z) + i \sin(\arg z)\big). \tag{2}$$

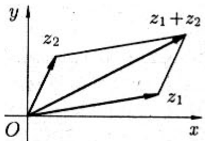
Здесь величина $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ называется модулем комплексного числа; аргумент комплексного числа $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi n,\ \ (n = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$ определяется из равенств

$\cos(\arg z) = \dfrac{x}{|z|}$, $\sin(\arg z) = \dfrac{y}{|z|}$. Главное значение аргумента комплексного числа равно $-\pi < \arg z \le \pi$. Существует также показательная форма записи комплексного числа

$$z = |z| e^{i(\arg z + 2\pi n)}. \qquad (3)$$

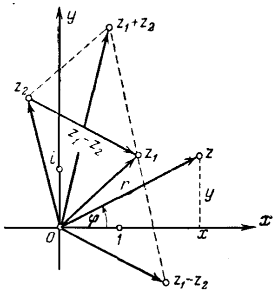
Сумма комплексных чисел $z_1 = x_1 + i\,y_1$, $z_2 = x_2 + i\,y_2$

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) =$$
$$= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$



Разность комплексных чисел $z_1 = x_1 + i\,y_1$, $z_2 = x_2 + i\,y_2$

$$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) =$$
$$= (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$
$$|z_1 - z_2| = |(x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2)| =$$
$$= |(x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$



Умножение комплексных чисел $z_1 = x_1 + i\,y_1$, $z_2 = x_2 + i\,y_2$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + i\,y_1)\cdot(x_2 + i\,y_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 + i^2 y_1y_2 =$$
$$= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$
$$z \cdot \bar{z} = (x + i\,y)\cdot(x - i\,y) = x^2 - ixy + iyx - i^2y^2 = x^2 + y^2.$$

Деление комплексных чисел $z_1 = x_1 + i\,y_1$, $z_2 = x_2 + i\,y_2$, $z_2 \ne 0$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + i\,y_1}{x_2 + i\,y_2} = \frac{(x_1 + i\,y_1)\cdot(x_2 - i\,y_2)}{(x_2 + i\,y_2)\cdot(x_2 - i\,y_2)} =$$

$$= \frac{\left(x_1 x_2 + y_1 y_2\right) + i\left(x_2 y_1 - x_1 y_2\right)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{\left(x_1 x_2 + y_1 y_2\right)}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{\left(x_2 y_1 - x_1 y_2\right)}{x_2^2 + y_2^2}$$

2. Вычисление корня, возведение в степень, формулы Эйлера

Вычисление корня из комплексного числа

$$w_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\arg z + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\arg z + 2k\pi}{n}\right), \quad (4)$$

$k = 0,1,\ldots,n-1$. Здесь $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ - модуль комплексного числа z. Аргумент $\arg z$ комплексного числа z определяется из выражений $\cos(\arg z) = \dfrac{x}{|z|}$, $\sin(\arg z) = \dfrac{y}{|z|}$.

Возведение в степень. Формула Муавра

$$z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), \quad \varphi = \operatorname{Arg} z. \qquad (5)$$

Формулы Эйлера

$$e^{iz} = \cos z + i\sin z, \qquad e^{-iz} = \cos z - i\sin z, \qquad (6)$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \qquad (7)$$

3. Связь основных элементарных функций комплексного переменного

$$\cos iz = \operatorname{ch} z; \qquad \sin iz = i\operatorname{sh} z; \qquad (8)$$

$$\operatorname{ch} iz = \cos z; \qquad \operatorname{sh} iz = i\sin z; \qquad (9)$$

$$e^z = \operatorname{ch} z + \operatorname{sh} z; \qquad e^{-z} = \operatorname{ch} z - \operatorname{sh} z; \qquad (10)$$

$$e^{iz} = \cos z + i\sin z; \qquad e^{-iz} = \cos z - i\sin z; \qquad (11)$$

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi); \qquad (12)$$

$$\operatorname{Arc}\sin z = -i\operatorname{Ln}\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right), \operatorname{Arc}\cos z = -i\operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right) \quad (13)$$

$$\operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{1 + iz}{1 - iz}, \qquad \operatorname{Arcctg} z = \frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{z - i}{z + i}; \qquad (14)$$

$$\operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 + 1}\right), \qquad \operatorname{Arch} z = \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right); \qquad (15)$$

$$\operatorname{Arth} z = \frac{1}{2}\operatorname{Ln}\frac{1 + z}{1 - z}, \qquad \operatorname{Arcth} z = \frac{1}{2}\operatorname{Ln}\frac{1 + z}{z - 1}; \qquad (16)$$

$$z^a = e^{a\operatorname{Ln} z}; \qquad a^z = e^{z\operatorname{Ln} a} \qquad (17)$$

(a, z – *комплексные числа*).

4. Аналитические функции. Условия Коши-Римана

Определение. Функция $f(z)$ называется аналитической в данной точке $z \in D$, если она дифференцируема как в самой точке z, так и в некоторой ее окрестности.

Теорема. Для того чтобы функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ была дифференцируемой в точке z, необходимо и достаточно, чтобы функции $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$ были дифференцируемы в этой точке и выполнялись условия Коши-Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{18}$$

5. Интеграл по кривой и его вычисление

Пусть однозначная функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ определена и непрерывна в области D; L - кусочно-гладкая замкнутая или незамкнутая кривая, лежащая в D. Тогда вычисление интеграла сводится к вычислению (обычных) криволинейных интегралов второго рода

$$\int_L f(z)dz = \int_L udx - vdy + i\int_L vdx + udy \tag{19}$$

6. Теорема Коши и интегральные формулы Коши

Теорема Коши. Если функция $f(z)$ аналитическая в многосвязной области D, ограниченной внешним контуром L и внутренними контурами $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ и непрерывна в замкнутой области $\overline{D}$, то

$$\oint\limits_{L + \sum\limits_{m=1}^{k} \gamma_m^-} f(z)dz = 0. \tag{20}$$

Или в другой формулировке:

$$\oint\limits_L f(z)dz = \sum_{m=1}^{k} \oint\limits_{\gamma_m} f(z)dz. \tag{21}$$

Интегральные формулы Коши. Если функция $f(z)$ аналитическая в D, $z_0 \in D$ и $\gamma \subset D$ - контур, охватывающий точку z_0, то

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)dz}{z - z_0}, \ (z \in \gamma). \tag{22}$$

При этом функция $f(z)$ имеет всюду в D производные любого порядка, для которых справедливы формулы

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}}. \tag{23}$$

7. Ряды Лорана

Определение. Рядом Лорана называется ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-a)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n; \tag{24}$$

при этом ряд $\sum\limits_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-a)^n$ называется главной частью ряда Лорана, а ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ - правильной частью.

Теорема Лорана. Если функция $f(z)$ аналитическая в кольце $0 \le r < |z-a| < R$, то в этом кольце она единственным образом представима в виде ряда Лорана, коэффициенты которого вычисляются по формулам:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|<\rho} \frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}}, \ (r < \rho < R;\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \tag{25}$$

При решении некоторых задач рекомендуется пользоваться следующими разложениями элементарных функций (символ $z \in (z)$ означает, что ряд сходится во всех точках комплексной плоскости (z)):

1) $e^z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \ z \in (z);$

2) $\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!},\ z\in(z);$

3) $\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},\ z\in(z);$

4) $\ln(1+z)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n},\ |z|<1;$

5) $(1+z)^{\alpha}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}z^n,\ \ |z|<1,\ \alpha\in R;$

6) $\operatorname{arctg} z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{2n+1},\ |z|<1;$

7) $\frac{1}{1+z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n,\ \ |z|<1;$

8) $$\frac{1}{(1+z)^n}=\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\cdot\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left(\frac{1}{1+z}\right). \qquad 26)$$

8. Вычеты. Применение их к вычислению интегралов

Определение 1. Точка z_0 называется изолированной особой точкой функции $f(z)$, если существует окрестность $0<|z-z_0|<\delta$ этой точки с исключенной точкой z_0, в которой $f(z)$ аналитическая, кроме самой точки z_0.

Определение 2. Точка z_0 называется устранимой особой точкой, если разложение ее в ряд Лорана в окрестности этой точки не содержит главной части.

Определение 3. Точка z_0 называется полюсом кратности n функции, если в разложении ее в ряд Лорана в окрестности этой точки главная часть содержит конечное число членов, причем младшим отличным от нуля коэффициентом является c_{-n} $(c_{-n}\neq 0)$.

Определение 4. Точка z_0 называется существенно особой точкой функции $f(z)$, если главная часть ее разложения в ряд Лорана в окрестности этой точки содержит бесконечное число членов.

Определение 5. Вычетом функции $f(z)$ относительно точки z_0 (обозначается $\operatorname{res} f(z_0)$ или $\operatorname*{res}_{z_0} f(z)$) называется число, равное

$$\operatorname{res} f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L f(z)\,dz\,, \tag{27}$$

где L - простой замкнутый контур, лежащий в области аналитичности функции $f(z)$ и содержащий внутри себя только одну особую точку z_0.

В качестве L удобно брать окружность $|z - z_0| = \rho$ достаточно малого радиуса ρ. Из определения следует, что вычет функции $f(z)$ совпадает с коэффициентом c_{-1} разложения ее в ряд Лорана по степеням $z - z_0$: $\operatorname{res} f(z_0) = c_{-1}$. Отсюда следует, что вычет в правильной и устранимой особой точках равен нулю. Вычет $f(z)$ в простом полюсе равен

$$\operatorname{res} f(z_0) = \lim_{z \to z_0} \big(f(z)(z - z_0) \big). \tag{28}$$

Вычет функции $f(z)$ в полюсе z_0 порядка m равен

$$\operatorname{res} f(z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \Big(f(z)(z - z_0)^m \Big). \tag{29}$$

Если z_0 – существенно особая точка функции $f(z)$, то для определения $\operatorname{res} f(z_0)$ необходимо найти коэффициент c_{-1} в лорановском разложении функции $f(z)$ в окрестности точки z_0.

Теорема Коши о вычетах. Если функция $f(z)$ аналитическая на границе L области D и внутри области, за исключением конечного числа изолированных особых точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$, то

$$\int_L f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res} f(z_k). \tag{30}$$

9. Вычисление некоторых действительных интегралов с помощью вычетов

А) Если рациональная функция $R(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ не имеет полюсов на вещественной оси и степень знаменателя $Q(z)$, по крайней мере, на две единицы выше степени числителя $P(z)$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}dx=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{res}R(a_k),\qquad(31)$$

где $a_1,a_2,...,a_n$ - полюса функции $R(z)$, лежащие в верхней полуплоскости $(\operatorname{Im}z>0)$.

Б) Пусть $R(\sin x,\cos x)=F(z)$, если положить $e^{ix}=z$. Тогда

$$\int_{0}^{2\pi}R(\sin x,\cos x)dx=2\pi i\cdot\sigma,\qquad(32)$$

где σ есть сумма вычетов функции $F(z)$ относительно полюсов, заключенных внутри окружности $|z|=1$.

1.2. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Задача 1. Следующие выражения записать в алгебраической форме:

а) e^{2+2i}; б) $\cos(1+i)$; в) $\operatorname{sh}(1+i)$; г) $\operatorname{Ln}\left(\sqrt{3}+i\right)$;

д) $\operatorname{Arcsin}3$; е) $\operatorname{Arcctg}2i$; ж) $\operatorname{Arsh}i$; з) $\operatorname{Arch}1$.

Решение. При решении задачи 1 используются формулы (8) – (17). Решение задачи сводится к последовательным преобразованиям исходных выражений с помощью данных формул.

а) $e^{2+2i}=e^2\cdot e^{2i}=e^2(\cos 2+i\sin 2)$.

б) $\cos(1+i)=\cos 1\cdot\cos i-\sin 1\cdot\sin i=\cos 1\cdot\operatorname{ch}1-i\sin 1\cdot\operatorname{sh}1$.

в) $\operatorname{sh}(1+i)=\operatorname{sh}1\cdot\operatorname{ch}i+\operatorname{ch}1\cdot\operatorname{sh}i=\operatorname{sh}1\cdot\cos 1+i\operatorname{ch}1\cdot\sin 1$.

г) $\mathrm{Ln}\left(\sqrt{3}+i\right)$. Представим комплексное число в скобках в виде $z = x + iy = \sqrt{3} + i$, т.е. $x = \sqrt{3},\ y = 1$. Тогда модуль z равен $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3+1} = 2$. Аргумент комплексного числа z определяется из выражений $\cos(\arg z) = \dfrac{x}{|z|} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin(\arg z) = \dfrac{y}{|z|} = \dfrac{1}{2}$. Следовательно $\arg z = \pi/6$. Тогда [см. формулу (12)]

$$\mathrm{Ln}(\sqrt{3}+i) = \ln|z| + i\left(\arg z + 2k\pi\right) = \ln 2 + i\left(\pi/6 + 2k\pi\right).$$

д) $\mathrm{Arcsin}\,3 = -i\,\mathrm{Ln}\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right) = -i\,\mathrm{Ln}\left(3i + \sqrt{1-3^2}\right) = -i\,\mathrm{Ln}\left(i\left(3 \pm \sqrt{8}\right)\right)$. Далее вычисляем согласно пункту г). Представим комплексное число в скобках в виде $z = x + iy = i\left(3 \pm \sqrt{8}\right)$, т.е. $x = 0,\ y = 3 \pm \sqrt{8}$. Тогда модуль z равен $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \left|3 \pm \sqrt{8}\right|$. Аргумент комплексного числа z определяется из выражений $\cos(\arg z) = \dfrac{x}{|z|} = 0$, $\sin(\arg z) = \dfrac{y}{|z|} = \dfrac{3 \pm \sqrt{8}}{\left|3 \pm \sqrt{8}\right|} = 1$. Следовательно $\arg z = \dfrac{\pi}{2}$. Тогда

$$\mathrm{Arcsin}\,3 = -i\left(\ln\left|3 \pm \sqrt{8}\right| + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi - i\ln\left|3 \pm \sqrt{8}\right|.$$

е) $\mathrm{Arcctg}\,2i = \dfrac{i}{2}\mathrm{Ln}\left(\dfrac{2i - i}{2i + i}\right) = \dfrac{i}{2}\mathrm{Ln}\left(\dfrac{1}{3}\right)$. Далее вычисляем согласно пункту г). Представим комплексное число в скобках в виде $z = x + iy = 1/3$, т.е. $x = 1/3,\ y = 0$. Модуль z равен $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = 1/3$. Аргумент комплексного числа z определяется из выражений $\cos(\arg z) = \dfrac{x}{|z|} = 1$,

$\sin(\arg z)=\dfrac{y}{|z|}=0$. Тогда $\arg z=0$. Итак $\operatorname{Arcctg} 2i=\dfrac{i}{2}\left(\ln\dfrac{1}{3}+i\left(0+2k\pi\right)\right)=-k\pi-\dfrac{i}{2}\ln 3$.

ж) $\operatorname{Arsh} i=\operatorname{Ln}\left(z+\sqrt{z^2+1}\right)=\operatorname{Ln}\left(i+\sqrt{i^2+1}\right)=\operatorname{Ln} i$. Далее вычисляем согласно пункту г). Представим комплексное число в скобках в виде $z=x+iy=i$, т.е. $x=0,\ \ y=1$. Модуль z равен $|z|=\sqrt{x^2+y^2}=1$. Аргумент комплексного числа z определяется из выражений $\cos(\arg z)=\dfrac{x}{|z|}=0$, $\sin(\arg z)=\dfrac{y}{|z|}=1$. Тогда $\arg z=\dfrac{\pi}{2}$. Итак $\operatorname{Arsh} i=\ln 1+i\left(\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right)=i\left(\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right)$.

з) $\operatorname{Arch} 1=\operatorname{Ln}\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)=\operatorname{Ln}\left(1+\sqrt{1-1}\right)=\operatorname{Ln} 1$. Далее вычисляем согласно пункту г). Представим комплексное число в скобках в виде $z=x+iy=1$, т.е. $x=1,\ \ y=0$. Модуль z равен $|z|=\sqrt{x^2+y^2}=1$. Аргумент комплексного числа z определяется из выражений $\cos(\arg z)=\dfrac{x}{|z|}=1$, $\sin(\arg z)=\dfrac{y}{|z|}=0$. Тогда $\arg z=0$. Итак $\operatorname{Arch} 1=\ln 1+i\left(0+2k\pi\right)=2k\pi i$.

Задача 2. Извлечь корень соответствующей степени из данного числа. Ответ записать в алгебраической форме.

а) $\sqrt[3]{-2+2i}$, б) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{-2+2i}}$, в) $\sqrt[4]{i}$, г) $\sqrt[6]{-64}$.

Решение. При вычислении корня из комплексного числа используется формула (4).

а) $\sqrt[3]{-2+2i}$. Подкоренное выражение можно представить в виде $z = x + iy = -2 + 2i$. Тогда $x = -2,\ y = 2$. Следовательно $|z| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$, $\cos\arg(z) = \frac{x}{|z|} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$,

$\sin\arg(z) = \frac{y}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Значит $\arg z = \frac{3\pi}{4}$. Окончательно

$$w_k = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right),\ k = 0,1,2.$$

б) $\frac{1}{\sqrt[3]{-2+2i}}$. При решении этой задачи числитель и знаменатель дроби удобно умножить на сопряженное выражение $\frac{1}{\sqrt[3]{-2+2i}} = \ = \frac{\sqrt[3]{-2-2i}}{\sqrt[3]{-2+2i}\sqrt[3]{-2-2i}} = \frac{\sqrt[3]{-2-2i}}{\sqrt[3]{4+4}} = \sqrt[3]{-\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i}$. Подкоренное выражение можно представить в виде $z = x + iy = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$. Тогда $x = -\frac{1}{4},\ y = -\frac{1}{4}$. Откуда

$$|z| = \sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(-\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}},\quad \cos\arg(z) = \frac{x}{|z|} = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\sin\arg(z) = \frac{y}{|z|} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Значит, $\arg z = -\frac{3\pi}{4}$, т.е.

$$w_k = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right),\ k = 0,1,2.$$

в) $\sqrt[4]{i}$. Подкоренное выражение можно представить в виде $z = x + iy = i$, откуда $x = 0,\ y = 1$. Следовательно

$$|z| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1,\ \cos\arg(z) = \frac{x}{|z|} = 0,\ \sin\arg(z) = \frac{y}{|z|} = 1.$$

Значит $\arg z = \frac{\pi}{2}$. Тогда

$$w_k = \left(\cos\left(\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}\right)\right),\ k = 0,1,2,3.$$

г) $\sqrt[6]{-64}$. Подкоренное выражение можно представить в виде $z = x + i\,y = -64$. Откуда $x = -64,\ y = 0$. Следовательно

$$|z| = \sqrt{(-64)^2 + 0^2} = 64\,,\ \cos\arg(z) = \frac{x}{|z|} = -1\,,$$

$$\sin\arg(z) = \frac{y}{|z|} = 0\,.$$

Значит $\arg z = \pi$. Тогда

$$w_k = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{6}\right)\right),\ k = 0,1,2,3,4,5\,.$$

Или $\sqrt{3} \pm i,\ \pm 2i,\ -\sqrt{3} \pm i$.

ЗАДАЧА 3. Выяснить геометрический смысл соотношений:

а) $|z+3| + |z-3| = 10$,

б) $|z+3i| + |z-3i| < 10$,

в) $\operatorname{Im} z^2 > 2$,

г) $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{4}$,

д) $|z + a + i\,b| = |z + c + i\,d|$.

Решение.

а) $|z+3| + |z-3| = 10$. Введем обозначения: $c = 3;\ a = 5$. Тогда равенство можно записать в виде $|z+c| + |z-c| = 2a$. Модуль $|z+c|$ есть расстояние между точками z и $-c$; $|z-c|$ – расстояние между точками z и c. По условию сумма расстояний от точки z до двух данных точек $-c$ и c есть величина постоянная. Значит, точка z лежит на эллипсе. Уравнение этого эллипса имеет вид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, где $b^2 = a^2 - c^2$. Так как в нашем случае $b^2 = 5^2 - 3^2 = 16 = 4^2$, то решением задачи будет уравнение эллипса $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$.

б) $|z+3i| + |z-3i| < 10$. Введем обозначения: $c = 3;\ b = 5$. Тогда неравенство можно записать в виде $|z + i\,c| + |z - i\,c| < 2b$. Рассмотрим случай равенства

$|z+ic|+|z-ic|=2b$. Модуль $|z+ic|$ есть расстояние между точками z и $-ic$; $|z-ic|$ - расстояние между точками z и ic. По условию сумма расстояний от точки z до двух данных точек $-ic$ и ic есть величина постоянная. Значит, точка z лежит на эллипсе. Уравнение этого эллипса имеет вид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, где $a^2=b^2-c^2$. Так как $a^2=5^2-3^2=16=4^2$, то в случае равенства точка z лежит на эллипсе $\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{5^2}=1$. В нашем случае решением задачи будет внутренность эллипса $\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{5^2}<1$.

в) $\operatorname{Im} z^2>2$. Имеем $z^2=(x+iy)^2=x^2-y^2+i2xy$ и, следовательно, $\operatorname{Im} z^2=2xy$. По условию $2xy>2$ или $xy>1$. Последнее неравенство определяет множество точек в первом и третьем квадрантах, соответственно над и под гиперболой.

г) $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{4}$. Имеем $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right)=\operatorname{Re}\left(\frac{\bar{z}}{z\bar{z}}\right)=\operatorname{Re}\left(\frac{x-iy}{x^2+y^2}\right)=$ $=\frac{x}{x^2+y^2}$. По условию $\frac{x}{x^2+y^2}=\frac{1}{4}$ или $x^2+y^2-4x=0$. Это окружность $(x-2)^2+y^2=4$.

д) $|z+a+ib|=|z+c+id|$. В левой и правой частях равенства модули соответственных величин $z+a+ib$ и $z+c+id$. Вычислим модули, приравняем их и возведем в квадрат. Получим $(x+a)^2+(y+b)^2=(x+c)^2+(y+d)^2$. Или, после раскрытия скобок и приведения подобных, $2(a-c)x+2(b-d)y+a^2+b^2-c^2-d^2=0$. Это уравнение прямой линии.

Задача 4. Решить уравнение (ответ дать в алгебраической форме).

а) $\sin z + \cos z = 1$, б) $e^{2z} - (1+i)e^{z} + 1 + \frac{i}{2} = 0$,

в) $\operatorname{sh} z + \operatorname{ch} z = 1$, г) $\operatorname{sh}^2 z + \operatorname{ch}^2 z = 1$.

Решение.

а) $\sin z + \cos z = 1$. Так как $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, умножим левую и правую части уравнения на $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Получим $\sin z \cdot \cos\frac{\pi}{4} + \cos z \cdot \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ или $\sin\left(z + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Отсюда выразим z: $z = -\frac{\pi}{4} + \operatorname{Arcsin}\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\pi}{4} - i\operatorname{Ln}\left(i\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{1 - \frac{2}{4}}\right) = -\frac{\pi}{4} - i\operatorname{Ln}\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Имеем два множества решений уравнения z_1 и z_2. Для множества z_1 аргумент логарифма Ln равен $w_1 = x + iy = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, т.е. $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Тогда модуль w_1 равен $|w_1| = \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{2}{4}} = 1$. Аргумент w_1 определяется выражениями $\cos\arg w_1 = \frac{x}{|w_1|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\arg w_1 = \frac{y}{|w_1|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и равен $\arg w_1 = \frac{\pi}{4}$. Тогда решение примет вид

$$z_1 = -\frac{\pi}{4} - i\operatorname{Ln}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4} - i\left(\ln 1 + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)\right) = 2k\pi.$$

Для множества z_2 аргумент логарифма Ln равен $w_2 = x + iy = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, т.е. $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Тогда модуль w_2 равен $|w_2| = \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{2}{4}} = 1$. Аргумент w_2 определяется выражениями $\cos\arg w_2 = \frac{x}{|w_2|} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\arg w_2 = \frac{y}{|w_2|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

и равен $\arg w_2 = \frac{3\pi}{4}$. Тогда решение примет вид

$$z_2 = -\frac{\pi}{4} - i\,\mathrm{Ln}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4} - i\left(\ln 1 + i\left(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right)\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

б) $e^{2z} - (1+i)e^{z} + 1 + \frac{i}{2} = 0$. Введем промежуточную переменную $w = e^{z}$ и решим квадратное уравнение $w^2 - (1+i)w + 1 + \frac{i}{2} = 0$ относительно w. Решение уравнения есть $w_{1,2} = \frac{1}{2} + \frac{i}{2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)^2 - 1 - \frac{i}{2}} = \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \pm i$. Следовательно $e^{z_1} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$, $e^{z_2} = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}$. Из первого равенства имеем

$z_1 = \mathrm{Ln}\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i\right) = \ln\frac{\sqrt{10}}{2} + i\left(\mathrm{arctg}\,3 + 2k\pi\right)$, т.к.

$|w_1| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$, $\quad \mathrm{tg}\arg w_1 = \frac{x}{y} = 3$. Из второго равенства имеем

$z_2 = \mathrm{Ln}\left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right) = -\frac{1}{2}\ln 2 + i\left(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)$, т. к.

$|w_2| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\mathrm{tg}\arg w_1 = \frac{x}{y} = -1$.

в) $\mathrm{sh}\,z + \mathrm{ch}\,z = 1$. Так как $\mathrm{sh}\,z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}$, $\mathrm{ch}\,z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$, то данное уравнение можно представить в виде $\frac{e^{z} - e^{-z}}{2} + \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} = 1$ или, после преобразований, $e^{z} = 1$. То есть наше уравнение сводится к задаче б). А именно, $z = \ln 1 + i(0 + 2k\pi) = 2k\pi i$.

г) $\mathrm{sh}^2 z + \mathrm{ch}^2 z = 1$. Аналогично пункту в), подставляем в уравнение значения $\operatorname{sh} z$ и $\operatorname{ch} z$. Получим $\left(\frac{e^z - e^{-z}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^z + e^{-z}}{2}\right)^2 = 1$. После раскрытия скобок и преобразований, $e^{2z} + e^{-2z} = 2$. Умножим обе части равенства на e^{-2z}. Получим уравнение $e^{4z} - 2e^{2z} + 1 = 0$. Откуда $e^{2z} = 1$. Тогда $2z = \operatorname{Ln}(1) = \ln|1| + i(2k\pi) = i2k\pi$. Окончательно имеем $z = \pi k i$.

Задача 5. Восстановить аналитическую функцию по данной действительной или мнимой части ее.

$$\text{а) } \operatorname{Re} f(z) = e^x(x\cos y - y\sin y),\ f(0) = 0,$$

$$\text{б) } \operatorname{Im} f(z) = e^x\left(y\cos y + (x-1)\sin y\right),\ f(0) = 1.$$

Решение. При решении данной задачи используется то обстоятельство, что для аналитической функции должны выполняться условия Коши-Римана (18).

а) $u = \operatorname{Re} f(z) = e^x(x\cos y - y\sin y)$, $f(0) = 0$. Дифференцируя u по x, получим $\frac{\partial u}{\partial x} = e^x\left((x+1)\cos y - y\sin y\right) = \frac{\partial v}{\partial y}$. Тогда, интегрируя, приходим к выражению $v = \int e^x\left((x+1)\cos y - y\sin y\right)dy + g(x) = e^x(x\sin y + y\cos y) + g(x)$ где $g(x)$ некоторая неизвестная функция. Найдем производные

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^x\left((x+1)\sin y + y\sin y\right) + g'(x),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x\left((x+1)\sin y + y\sin y\right)$$

и подставим их во второе из условий Коши-Римана. Получим, что $g'(x) = 0$, т.е. $g(x) = const = c$. Следовательно

$$f(z) = e^x(x\cos y - y\sin y) + i\left(e^x(x\sin y + y\cos y) + c\right).$$

Подставляя начальные условия $f(0) = ic = 0$ получим, что $c = 0$. Тогда

$$f(z) = xe^x(\cos y + i\sin y) + ye^x(-\sin y + i\cos y) = xe^x e^{iy} +$$
$$+iye^x(\cos y + i\sin y) = xe^x e^{iy} + iye^x e^{iy} = ze^z.$$
Здесь использована формула Эйлера $\cos z + i\sin z = e^{iz}$.

б) $v = \operatorname{Im} f(z) = e^x\big(y\cos y + (x-1)\sin y\big)$, $f(0) = 1$. Дифференцируя v по y, получим $\dfrac{\partial v}{\partial y} = e^x(x\cos y - y\sin y) = \dfrac{\partial u}{\partial x}$.
Тогда, интегрируя, приходим к выражению
$$u = \int e^x(x\cos y - y\sin y)dx + g(y) = e^x\big((x-1)\cos y - y\sin y\big) + g(y)$$
где $g(y)$ некоторая неизвестная функция. Найдем производные $\dfrac{\partial v}{\partial x} = e^x(y\cos y + x\sin y)$,
$\dfrac{\partial u}{\partial y} = -e^x(x\sin y + y\cos y) + g'(y)$ и подставим их во второе из условий Коши-Римана. Получим, что $g'(x) = 0$. Отсюда $g(x) = const = c$. Следовательно,
$$f(z) = e^x\big((x-1)\cos y - y\sin y\big) + c + ie^x\big(y\cos y + (x-1)\sin y\big).$$
Подставляя $f(0) = -1 + c = 1$, приходим к выводу, что $c = 2$.
Тогда
$$f(z) = e^x\big((x-1)\cos y - y\sin y\big) + 2 + ie^x\big(y\cos y + (x-1)\sin y\big) =$$
$$= e^x\big((x-1)\cos y + i^2 y\sin y\big) + 2 + ie^x\big(y\cos y + (x-1)\sin y\big) =$$
$$= e^x\big((x-1)(\cos y + i\sin y) + iy(\cos y + i\sin y)\big) + 2 =$$
$$= e^x(\cos y + i\sin y)(x + iy - 1) + 2 = e^x e^{iy}(z-1) + 2 = e^z(z-1) + 2$$
Здесь использована формула Эйлера $\cos z + i\sin z = e^{iz}$.

Задача 6. Вычислить интеграл по дуге C от точки z_1 до точки z_2 (ответ дать в алгебраической форме).

а) $\displaystyle\int_C (1 + i + z)\operatorname{Re} z\,dz \quad C: y = x^2,\ z_1 = 0,\ z_2 = 1 + i$, б) $\int\limits_C \left(1-i+\bar{z}\right)\operatorname{Im}\bar{z}\,dz$ $\quad C$ *– прямая*, $z_1=0,\ z_2=1+i$.

Решение. Вычисление интеграла сводится к вычислению (обычных) криволинейных интегралов второго рода по формуле (19).

а) $\int\limits_C (1+i+z)\operatorname{Re} z\,dz$ $\quad C: y=x^2,\ z_1=0,\ z_2=1+i$. Так как $\operatorname{Re} z = x$, то интеграл примет вид $\int\limits_C (1+i+x+iy)x dz =$

$=\int\limits_C \left(x+x^2+i(x+xy)\right)dz$. Или, переходя к криволинейным интегралам,

$$\int\limits_C \left(x+x^2\right)dx-(x+xy)dy+i\int\limits_C (x+xy)dx+\left(x+x^2\right)dy.$$

Из уравнения линии $y=x^2$ имеем $dy=2xdx$. Подставляя y и dy в выражение для интеграла и учитывая, что $0\le x\le 1$, имеем $\int\limits_0^1 \left(x+x^2-2x^2-2x^4\right)dx+i\int\limits_0^1 \left(x+x^3+2x^2+2x^3\right)dx=$

$$=\int\limits_0^1 \left(x-x^2-2x^4\right)dx+i\int\limits_0^1 \left(x+2x^2+3x^3\right)dx=\left.\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-2\frac{x^5}{5}\right|_0^1+$$

$$+i\left.\left(\frac{x^2}{2}+2\frac{x^3}{3}+3\frac{x^4}{4}\right)\right|_0^1=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{2}{5}+i\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\right)=-\frac{7}{30}+\frac{23}{12}i$$

б) $\int\limits_C \left(1-i+\bar{z}\right)\operatorname{Im}\bar{z}\,dz$ $\quad C$ – прямая, $z_1=0,\ z_2=1+i$. Так как $\operatorname{Im}\bar{z}=-y$, то интеграл примет вид $-\int\limits_C (1-i+x-iy)ydz=$

$=\int\limits_C \left(-y-xy+i\left(y+y^2\right)\right)dz$. Или, переходя к криволинейным интегралам,

$$\int_C (-y-xy)dx-\left(y+y^2\right)dy+i\int_C \left(y+y^2\right)dx-(y+xy)dy.$$

Уравнение прямой в нашем случае имеет вид $y=x$. Поэтому $dy=dx$. Подставляя y и dy в выражение для интеграла и учитывая, что $0\le x\le 1$, имеем

$$\int_0^1 \left(-x-x^2-x-x^2\right)dx+i\int_0^1 \left(x+x^2-x-x^2\right)dx=$$

$$=-2\int_0^1 \left(x+x^2\right)dx=-2\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=-\frac{5}{3}.$$

Задача 7. Вычислить интеграл от аналитической функции (ответ дать в алгебраической форме).

а) $\int_0^i z\cos z dz$, б) $\int_i^1 (z+i)\operatorname{ch} z dz$.

Решение.

а) $I=\int_0^i z\cos z dz$. Для вычисления интеграла нужно применить формулу интегрирования по частям $\int_a^b u dv=uv\big|_a^b-\int_a^b v du$. Примем $u=z$, $dv=\cos z dz$. Тогда $du=dz$, $v=\sin z$. Подставим в формулу и получим, что исходный интеграл

$$I=z\sin z\big|_0^i-\int_0^i \sin z dz=i\sin i+\cos z\big|_0^i=$$

$$=i\sin i+\cos i-1=-\operatorname{sh}1+\operatorname{ch}1-1=\frac{1}{e}-1.$$

б) $\int_i^1 (z+i)\operatorname{ch} z dz$. Для вычисления интеграла нужно применить формулу интегрирования по частям

$\int\limits_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v du$. Примем $u = z + i$, $dv = \text{ch}\, z dz$. Тогда $du = dz$, $v = \text{sh}\, z$. Подставим в формулу и получим, что исходный интеграл

$$I = (z+i)\,\text{sh}\, z\Big|_i^1 - \int\limits_i^1 \text{sh}\, z dz = (1+i)\,\text{sh}1 - (i+i)\,\text{sh}\, i - \text{ch}1 + \text{ch}\, i =$$

$$= \text{sh}1 + i\,\text{sh}1 + 2\sin1 - \text{ch}1 + \cos1 = \text{sh}1 - \text{ch}1 + 2\sin1 + \cos1 +$$

$$+ i\,\text{sh}1 = -\frac{1}{e} + 2\sin1 + \cos1 + i\,\text{sh}1.$$

Задача 8. Вычислить интеграл по контурам L_1, L_2, L_3 используя интегральную формулу Коши, теорему Коши.

$$\int\limits_L \frac{e^{z+i\pi}dz}{\left(z^2+\pi^2\right)(z-i\pi)},\ L_1: |z| = 3,\ L_2: |z-i\pi| = 1,\ L_3: x^2 + \frac{y^2}{16} = 1.$$

Решение. При решении данной задачи используются теорема Коши и интегральные формулы Коши (20)-(23). Данный интеграл можно представить в виде $I = \int\limits_L \frac{e^{z+i\pi}dz}{(z+i\pi)(z-i\pi)^2}$. Подынтегральная функция аналитическая везде, за исключением точек $z = i\pi$ и $z = -i\pi$.

а) Рассмотрим интеграл I по контуру L_1. Данный контур – это окружность на плоскости xOy радиуса $R = 3$ с центром в начале координат. Точки $z = i\pi$ и $z = -i\pi$ находятся вне этого контура. Следовательно, подынтегральная функция аналитическая в замкнутой области, ограниченной этим контуром. Тогда, по теореме Коши, интеграл I от аналитической функции по замкнутому контуру L_1 равен нулю,

т. е. $I = \int\limits_{L_1} \frac{e^{z+i\pi}dz}{(z+i\pi)(z-i\pi)^2} = 0$.

б) Рассмотрим интеграл I по контуру L_2. Данный контур – это окружность на плоскости xOy радиуса $R = 1$ с центром в точке с координатами $(0, i\pi)$. Точка $z = -i\pi$ находится вне этого контура. Точка $z = i\pi$ центр окружности L_2.Следовательно, подынтегральная функция имеет особенность в области, ограниченной контуром L_2. Преобразуем интеграл к виду

$$I = \int_{L_2} \frac{\frac{e^{z+i\pi}}{z+i\pi} dz}{(z-i\pi)^2}.$$

Тогда, согласно интегральным формулам Коши, интеграл I от аналитической функции по замкнутому контуру L_2 равен

$$I = \int_{L_2} \frac{\frac{e^{z+i\pi}}{z+i\pi} dz}{(z-i\pi)^2} = \frac{2\pi i}{1!} \frac{d}{dz}\left(\frac{e^{z+i\pi}}{z+i\pi}\right)\Bigg|_{z=i\pi} =$$

$$= 2\pi i \frac{e^{z+i\pi}(z+i\pi) - e^{z+i\pi}}{(z+i\pi)^2}\Bigg|_{z=i\pi} = 2\pi i \frac{e^{2\pi i}(2\pi i - 1)}{-4\pi^2}.$$

Применяя формулу Эйлера (6), имеем

$$I = -\frac{i}{2\pi}(2\pi i - 1)(\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = 1 + \frac{i}{2\pi}.$$

в) Рассмотрим интеграл I по контуру L_3. Данный контур – это эллипс на плоскости xOy с центром в начале координат. Большая полуось эллипса (по оси Oy) равна 4, малая полуось (по оси Ox) равна 1. Точки $z = -i\pi$ и $z = i\pi$ находятся внутри этого эллипса. Следовательно, согласно теореме Коши, интеграл I по контуру L_3 равен сумме интегралов I_1 и I_2 по контурам γ_1 и γ_2 вокруг точек $z = -i\pi$ и $z = i\pi$ соответственно. Интеграл I_2 по контуру γ_2 равен интегралу I по контуру L_2 (см. п. б)), т.е. $I_2 = 1 + \frac{i}{2\pi}$. Рассмотрим интеграл I_1 по контуру γ_1. Для этого преобразуем исходный интеграл к виду

$$I_1=\int\limits_{\gamma_1}\frac{\dfrac{e^{z+i\pi}}{(z-i\pi)^2}dz}{z+i\pi}.$$

Тогда, согласно интегральным формулам Коши, интеграл I_1 от аналитической функции по замкнутому контуру γ_1 равен

$$I_1=\int\limits_{\gamma_1}\frac{\dfrac{e^{z+i\pi}}{(z-i\pi)^2}dz}{z+i\pi}=2\pi i\left.\frac{e^{z+i\pi}}{(z-i\pi)^2}\right|_{z=-i\pi}=2\pi i\frac{1}{-4\pi^2}=-\frac{i}{2\pi}.$$

Следовательно, интеграл I по контуру L_3 равен

$$I=I_1+I_2=-\frac{i}{2\pi}+1+\frac{i}{2\pi}=1.$$

Задача 9. Разложить функцию в ряд Лорана в указанной области.

1. $\dfrac{z}{z^2+z-42}$, а) $6<|z|<7$, б) $|z|>7$, в) $0<|z+7|<13$;
2. $\dfrac{z+5}{z^2+13z+42}$, $|z+7|>1$;
3. $\dfrac{z+1}{z^2-z-42}$, $0<|z+6|<13$;
4. $\dfrac{z-5}{z^2-13z+42}$, $|z-6|>1$.

Решение. В данной задаче будет использовано разложение в ряд суммы геометрической прогрессии

$$\frac{1}{1+z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n\quad |z|<1.$$

1. а) $f(z)=\dfrac{z}{z^2+z-42}$ $6<|z|<7$. Представим функцию $f(z)$ в виде суммы простейших дробей

$$f(z)=\frac{z}{z^2+z-42}=\frac{7}{13}\frac{1}{z+7}+\frac{6}{13}\frac{1}{z-6}.$$

Разложим в ряд каждое из слагаемых отдельно. Преобразуем первое слагаемое, разделив числитель и знаменатель на 7, к виду:

$$\frac{7}{13}\frac{1}{z+7}=\frac{1}{13}\frac{1}{1+\frac{z}{7}}.$$

Воспользовавшись разложением геометрической прогрессии, получим следующее выражение для разложения первого слагаемого функции $f(z)$ в ряд Лорана:

$$\frac{7}{13}\frac{1}{z+7}=\frac{1}{13}\frac{1}{1+\frac{z}{7}}=\frac{1}{13}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z}{7}\right)^n=\frac{1}{13}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{7^n}.$$

Данный ряд сходится, т. к. $|z|<7$. Посмотрим, как разложить в ряд второе слагаемое. Если применить тот же прием, что и для первого, $\frac{6}{13}\frac{1}{z-6}=-\frac{1}{13}\frac{1}{1-\frac{z}{6}}$, то аналогичный ряд будет расходится, т. к. $|z|>6$. Поэтому разделим числитель и знаменатель на z. Получим

$$\frac{6}{13}\frac{1}{z-6}=\frac{6}{13z}\frac{1}{1-\frac{6}{z}}=\frac{6}{13z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(-\frac{6}{z}\right)^n=\frac{6}{13z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{6^n}{z^n}=\frac{1}{13}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^n}{z^n}$$

Этот ряд сходится, т. к. $|z|>6$. Итак,

$$f(z)=\frac{1}{13}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{7^n}+\frac{1}{13}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^n}{z^n}.$$

1. б) $f(z)=\frac{z}{z^2+z-42}=\frac{7}{13}\frac{1}{z+7}+\frac{6}{13}\frac{1}{z-6}$ $\quad |z|>7$. Как и в предыдущем примере, второе слагаемое можно представить в виде

$$\frac{6}{13}\frac{1}{z-6}=\frac{1}{13}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^n}{z^n}.$$

Этот ряд сходится, т.к. $|z|>7$. Первое слагаемое в прежнем виде представить нельзя, т. к. геометрическая прогрессия $\frac{1}{13}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{7^n}$ расходится, т.к. $|z|>7$. Разделим числитель и знаменатель на z:

$$\frac{7}{13}\frac{1}{z+7}=\frac{7}{13z}\frac{1}{1+\frac{7}{z}}=\frac{7}{13z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{7}{z}\right)^n=\frac{1}{13}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{7^n}{z^n}.$$

Этот ряд сходится. Итак,

$$f(z)=\frac{1}{13}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}7^n+6^n}{z^n}.$$

1. в) $f(z)=\dfrac{z}{z^2+z-42}=\dfrac{7}{13}\dfrac{1}{z+7}+\dfrac{6}{13}\dfrac{1}{z-6}$,

$0<|z+7|<13$. Первое слагаемое в правой части имеет нужный вид. Преобразуем второе слагаемое $\dfrac{6}{13}\dfrac{1}{z-6}=\dfrac{6}{13}\dfrac{1}{-13+z+7}=-\dfrac{6}{13^2}\dfrac{1}{1-\frac{z+7}{13}}$. Раскладывая в ряд, получим

$$-\frac{6}{13^2}\frac{1}{1-\frac{z+7}{13}}=-\frac{6}{13^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(-\frac{z+7}{13}\right)^n=-6\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+7)^n}{13^{n+2}}.$$

Ряд сходится. Итак, $f(z)=\dfrac{7}{13}\dfrac{1}{z+7}-6\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+7)^n}{13^{n+2}}$.

2. $f(z)=\dfrac{z+5}{z^2+13z+42}=\dfrac{2}{z+7}-\dfrac{1}{z+6}$, $|z+7|>1$. Первое слагаемое в правой части имеет нужный вид. Преобразуем второе слагаемое $\dfrac{1}{z+6}=\dfrac{1}{-1+z+7}=\dfrac{1}{z+7}\dfrac{1}{1-\frac{1}{z+7}}$. Раскладывая в ряд, получим

$$\frac{1}{z+7}\frac{1}{1-\frac{1}{z+7}}=\frac{1}{z+7}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(-\frac{1}{z+7}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z+7)^n}.$$

Данный ряд сходится. Итак,

$$f(z)=\frac{2}{z+7}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z+7)^n}=\frac{1}{z+7}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(z+7)^n}.$$

3. $f(z)=\dfrac{z+1}{z^2-z-42}=\dfrac{8}{13}\dfrac{1}{z-7}+\dfrac{5}{13}\dfrac{1}{z+6}$, $\quad 0<|z+6|<13$.

Второе слагаемое в правой части имеет нужный вид. Преобразуем первое слагаемое

$$\frac{8}{13}\frac{1}{z-7}=\frac{8}{13}\frac{1}{-13+z+6}=-\frac{8}{13^2}\frac{1}{1-\dfrac{z+6}{13}}.$$

Разложим последнее выражение в ряд, получим

$$-\frac{8}{13^2}\frac{1}{1-\dfrac{z+6}{13}}=-\frac{8}{13^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(-\frac{z+6}{13}\right)^n=-8\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+6)^n}{13^{n+2}}.$$

Ряд сходится. Итак, $f(z)=\dfrac{5}{13}\dfrac{1}{z+6}-8\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z+6)^n}{13^{n+2}}$.

4. $f(z)=\dfrac{z-5}{z^2-13z+42}=\dfrac{2}{z-7}-\dfrac{1}{z-6}$, $|z-6|>1$. Второе слагаемое в правой части имеет нужный вид. Преобразуем первое слагаемое $\dfrac{2}{z-7}=\dfrac{2}{-1+z-6}=\dfrac{2}{z-6}\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{z-6}}$. Раскладывая, получим

$$\frac{2}{z-6}\frac{1}{1-\dfrac{1}{z-6}}=\frac{2}{z-6}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{-1}{z-6}\right)^n=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z-6)^{n+1}}=$$

$=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(z-6)^n}$ сходящийся ряд. Итак,

$$f(z)=-\frac{1}{z-6}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z-6)^n}=\frac{1}{z-6}+2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(z-6)^n}.$$

Задачи 10-11. Вычислить интегралы с помощью вычетов.

а) $I=\displaystyle\int\limits_{|z|=4}\frac{\operatorname{sh}(z+\pi i)\,dz}{z^4+\pi^2z^2}$; $\qquad$ б) $I=\displaystyle\int\limits_{|z-2|=1}\frac{z+2}{z-2}e^{\frac{z}{z-2}}dz$;

в) $I=\displaystyle\int\limits_{|z|=1}(z+2)\cos\frac{z+2}{z}\,dz$.

Решение. При решении данных задач будут использованы формулы пункта 8 «Кратких сведений из теории».

а) $$I=\oint\limits_{|z|=4}\frac{\operatorname{sh}(z+\pi i)dz}{z^4+\pi^2z^2}=\oint\limits_{|z|=4}\frac{\operatorname{sh}(z+\pi i)dz}{z^2(z+\pi i)(z-\pi i)}.$$

Особыми точками подынтегральной функции являются: $z=0$ – простой полюс, $z=\pi i$ - устранимая особая точка (т.к. $\lim\limits_{z\to 0}\frac{\operatorname{sh}(z+\pi i)}{z^4+\pi^2z^2}=\frac{i}{2\pi^3}$) и $z=-\pi i$ – устранимая особая точка (т.к. $\lim\limits_{z\to 0}\frac{\operatorname{sh}(z+\pi i)}{z^4+\pi^2z^2}=-\frac{i}{2\pi^3}$). Внутри окружности $|z|=4$ лежат все три точки. Поэтому $I=2\pi i(\operatorname{res}f(0)+\operatorname{res}f(-\pi i)+\operatorname{res}f(\pi i))$. Для простого полюса $\operatorname{res}f(0)=\lim\limits_{z\to 0}\frac{\operatorname{sh}(z+\pi i)}{z^4+\pi^2z^2}\cdot z=-\frac{1}{\pi^2}$ Вычет в устранимой особой точке равен нулю, т.е. $\operatorname{res}f(-\pi i)=\operatorname{res}f(\pi i)=0$. Окончательно $I=2\pi i\left(-\frac{1}{\pi^2}\right)=-\frac{2i}{\pi}$.

Замечание. Если Вы ошибетесь в определении порядка полюса в сторону завышения, но правильно выполните все действия, то получите правильный результат.

Пример. Рассмотрим предыдущую задачу.
Пусть особыми точками подынтегральной функции являются: $z=0$ – полюс второго порядка, $z=\pi i$ - полюс первого порядка и $z=-\pi i$ – устранимая особая точка (т.к. $\lim\limits_{z\to 0}\frac{\operatorname{sh}(z+\pi i)}{z^4+\pi^2z^2}=-\frac{i}{2\pi^3}$). Внутри окружности $|z|=4$ лежат все три точки. Поэтому $I=2\pi i(\operatorname{res}f(0)+\operatorname{res}f(-\pi i)+\operatorname{res}f(\pi i))$. Для полюса второго порядка

$$\operatorname{res}f(0)=\frac{1}{1!}\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left(\frac{\operatorname{sh}(z+\pi i)}{z^2+\pi^2}\right)=$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{\operatorname{ch}(z+\pi i)\left(z^2+\pi^2\right)-\operatorname{sh}(z+\pi i)\cdot 2z}{\left(z^2+\pi^2\right)^2}=\frac{\pi^2\operatorname{ch}\pi i}{\pi^4}=\frac{\cos\pi}{\pi^2}=-\frac{1}{\pi^2}$$

Для полюса первого порядка

$$\operatorname{res} f(\pi i)=\lim_{z\to\pi i}\frac{\operatorname{sh}(z+\pi i)}{z^2(z+\pi i)}=\frac{\operatorname{sh}2\pi i}{-\pi^2\cdot 2\pi i}=\frac{i\sin 2\pi i}{-2\pi^3 i}=0.$$

Вычет в устранимой особой точке равен нулю, т.е. $\operatorname{res} f(-\pi i)=0$. Окончательно $I=2\pi i\left(-\frac{1}{\pi^2}\right)=-\frac{2i}{\pi}$.

б) $I=\int\limits_{|z-2|=1}\frac{z+2}{z-2}e^{\frac{z}{z-2}}dz$. В области $|z-2|=1$ подынтегральная функция $f(z)=\frac{z+2}{z-2}e^{\frac{z}{z-2}}$ имеет существенно особую точку $z=2$. Вычет $f(z)$, в этом случае, равен коэффициенту c_{-1} разложения ее в ряд Лорана. Преобразуем подынтегральную функцию.

$$f(z)=\frac{z-2+4}{z-2}e^{\frac{z-2+2}{z-2}}=\left(1+\frac{4}{z-2}\right)e^{1+\frac{2}{z-2}}=e\cdot f_1(z)+4e\cdot f_2(z)$$

где $f_1(z)=e^{\frac{2}{z-2}}$, $f_2(z)=\frac{e^{\frac{2}{z-2}}}{z-2}$. По теореме Коши о вычетах $I=2\pi i\left(e\cdot\operatorname{res} f_1(2)+4e\cdot\operatorname{res} f_2(2)\right)$. Разложим функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ в ряд Лорана (26). Получим

$$f_1(z)=e^{\frac{2}{z-2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!(z-2)^n}.$$

В этом разложении коэффициент $c_{-1}=2$, т. е. $\operatorname{res} f_1(2)=c_{-1}=2$. Далее

$$f_2(z)=\frac{e^{\frac{2}{z-2}}}{z-2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!(z-2)^{n+1}}.$$

Здесь $c_{-1}=1$, т.е.

$\text{res}\, f_2(2)=c_{-1}=1$. Следовательно

$$I=2\pi i\left(e\cdot 2+4e\cdot 1\right)=12\pi ei.$$

в) $I=\int\limits_{|z|=1}(z+2)\cos\dfrac{z+2}{z}dz$. В области $|z|=1$ подынтегральная функция $f(z)=(z+2)\cos\dfrac{z+2}{z}$ имеет существенно особую точку $z=0$. Вычет $\text{res}\, f(0)$, в этом случае, равен коэффициенту c_{-1} разложения ее в ряд Лорана. Преобразуем подынтегральную функцию.

$$f(z)=(z+2)\cos\frac{z+2}{z}=(z+2)\cos\left(1+\frac{2}{z}\right)=(z+2)\left(\cos 1\cos\frac{2}{z}-\right.$$

$$\left.-\sin 1\sin\frac{2}{z}\right)=\cos 1\cdot z\cos\frac{2}{z}+2\cos 1\cdot\cos\frac{2}{z}-\sin 1\cdot z\sin\frac{2}{z}-$$

$$-2\sin 1\cdot\sin\frac{2}{z}=\cos 1\cdot f_1(z)+2\cos 1\cdot f_2(z)-\sin 1\cdot f_3(z)-2\sin 1\cdot f_4(z)$$

где $f_1(z)=z\cos\dfrac{2}{z}$, $f_2(z)=\cos\dfrac{2}{z}$, $f_3(z)=z\sin\dfrac{2}{z}$,

$f_4(z)=\sin\dfrac{2}{z}$.

По теореме Коши о вычетах

$$I=2\pi i\left(\cos 1\cdot\text{res}\, f_1(0)+2\cos 1\cdot\text{res}\, f_2(0)-\sin 1\cdot\text{res}\, f_3(0)-\right.$$

$\left.-2\sin 1\cdot\text{res}\, f_4(0)\right)$. Разложим функции $f_1(z)$, $f_2(z)$, $f_3(z)$ и $f_4(z)$ в ряд Лорана (26). $f_1(z)=z\cos\dfrac{2}{z}=z\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n)!z^{2n}}$. В этом разложении коэффициент c_{-1} равен $c_{-1}=-\dfrac{2^2}{2!}=-2$, т.е. $\text{res}\, f_1(0)=-2$. Далее, $f_2(z)=\cos\dfrac{2}{z}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n)!z^{2n}}$. Здесь $c_{-1}=0$, т. к. в разложении присутствуют только четные степени, т. е. $\text{res}\, f_2(0)=0$. Аналогично

$f_3(z) = z\sin\dfrac{2}{z} = z\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n 2^{2n+1}}{(2n+1)!z^{2n+1}}$. Так как в разложении тоже присутствуют только четные степени, то $c_{-1} = 0$, т.е. $\operatorname{res} f_3(0) = 0$. $f_4(z) = \sin\dfrac{2}{z} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n 2^{2n+1}}{(2n+1)!z^{2n+1}}$. В этом разложении коэффициент c_{-1} равен $c_{-1} = \dfrac{2}{1!} = 2$ и $\operatorname{res} f_4(0) = 2$. Следовательно, искомый интеграл равен

$$I = 2\pi i(-2\cos 1 - 4\sin 1) = -4\pi i(\cos 1 + 2\sin 1).$$

Задача 12. Вычислить несобственный интеграл с помощью вычетов.

$$I = \int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{\left(x^2+2\right)^2\left(x^2+3\right)}.$$

Решение. Подынтегральная функция четная, поэтому

$I = \displaystyle\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{\left(x^2+2\right)^2\left(x^2+3\right)} = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\left(x^2+2\right)^2\left(x^2+3\right)}$. Для функции $R(z) = \dfrac{1}{\left(z^2+2\right)^2\left(z^2+3\right)}$ числитель – многочлен нулевой степени, знаменатель – многочлен шестой степени. Полюса функции $z = \pm i\sqrt{2}$ и $z = \pm i\sqrt{3}$ лежат вне вещественной оси, причем в верхней полуплоскости лежат полюса $z = i\sqrt{2}$ кратности два и $z = i\sqrt{3}$ - простой полюс. Поэтому для вычисления интеграла можно воспользоваться формулой (31) $I = \dfrac{1}{2}2\pi i\left(\operatorname{res} R\left(i\sqrt{2}\right) + \operatorname{res} R\left(i\sqrt{3}\right)\right)$. Вычислим вычеты. Для простого полюса $z = i\sqrt{3}$ вычет равен

$$\operatorname{res} R\left(i\sqrt{3}\right) = \lim_{z\to i\sqrt{3}}\frac{z - i\sqrt{3}}{\left(z^2+2\right)^2\left(z^2+3\right)} = \lim_{z\to i\sqrt{3}}\frac{1}{\left(z^2+2\right)^2\left(z+i\sqrt{3}\right)} =$$

$$=\frac{1}{(-3+2)^2\left(i\sqrt{3}+i\sqrt{3}\right)}=\frac{1}{i2\sqrt{3}}.$$

Для полюса $z=i\sqrt{2}$ кратности два вычет равен

$$\operatorname{res} R\left(i\sqrt{2}\right)=\lim_{z\to i\sqrt{2}}\frac{d}{dz}\left(\frac{\left(z-i\sqrt{2}\right)^2}{\left(z^2+2\right)^2\left(z^2+3\right)}\right)=$$

$$=\lim_{z\to i\sqrt{2}}\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\left(z+i\sqrt{2}\right)^2\left(z^2+3\right)}\right)=\lim_{z\to i\sqrt{2}}-\frac{2\left(z^2+3\right)+\left(z+i\sqrt{2}\right)\cdot 2z}{\left(z+i\sqrt{2}\right)^3\left(z^2+3\right)^2}=$$

$$=-\frac{2(-2+3)+\left(i\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)\cdot 2i\sqrt{2}}{\left(i\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)^3(-2+3)^2}=-\frac{3}{i8\sqrt{2}}.$$

Подставляя $\operatorname{res} R\left(i\sqrt{3}\right)$ и $\operatorname{res} R\left(i\sqrt{2}\right)$ в формулу, получим

$$I=\pi i\left(\frac{1}{i2\sqrt{3}}-\frac{3}{i8\sqrt{2}}\right)=\frac{\pi\left(4\sqrt{2}-3\sqrt{3}\right)}{8\sqrt{6}}.$$

Задача 13. Найти интеграл от заданной ветви многозначной функции по кривой C от точки z_1 до точки z_2.

а) $\int\limits_C \ln z dz,\ C-$прямая, $z_1=1+i,\ z_2=-1+i,\ \ln(1+i)=\ln\sqrt{2}+\frac{\pi i}{4}$

б) $\int\limits_C z\ln z dz,\ C-$часть окружности $|z|=1,\ z_1=i, z_2=-1,$
$\ln 1=-2\pi i$.

в) $\int\limits_C \sqrt[4]{z^2}dz,\ C-$часть окружности $|z|=1,\ z_1=1,\ z_2=i,\ \sqrt[4]{1}=-1$

Решение. При решении данной задачи, сначала выделяется ветвь многозначной функции, а затем производим интегрирование по методике задачи 6, с использованием формулы (19).

а) $\int\limits_C \ln z dz, C-$прямая, $z_1=1+i, z_2=-1+i$. Согласно формуле (12) $\mathrm{Ln}(1+i)=\ln\sqrt{2}+i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)$. Учитывая условие $\ln(1+i)=\ln\sqrt{2}+\frac{\pi i}{4}$, получаем, что $k=0$. Так как контур интегрирования есть прямая между точками $z_1=1+i$ и $z_2=-1+i$, параллельная оси Ox ($dy=0$), то переменная z имеет вид $z=x+i$. Тогда подынтегральную функцию можно представить в виде $\ln z=\ln\sqrt{1+x^2}+i\cdot\arccos\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. Следовательно, искомый интеграл, с учетом формулы (19), можно записать в виде

$$\int_C \ln z dz=\int_1^{-1}\ln\sqrt{1+x^2}dx+i\int_1^{-1}\arccos\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx.$$

Вычислим первый из интегралов с помощью интегрирования по частям:

$$\int_1^{-1}\ln\sqrt{1+x^2}dx=\left|\begin{array}{ll} u=\ln\sqrt{1+x^2}, & du=\dfrac{xdx}{1+x^2}, \\ dv=dx, & v=x \end{array}\right|=x\ln\sqrt{1+x^2}\Big|_1^{-1}-$$

$$-\int_1^{-1}\frac{x^2dx}{1+x^2}==-\ln\sqrt{2}-\ln\sqrt{2}-\int_1^{-1}dx+\int_1^{-1}\frac{dx}{1+x^2}=$$

$$=-\ln 2-x\Big|_1^{-1}+\mathrm{arctg}\,x\Big|_1^{-1}=-\ln 2+1+1-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=2-\ln 2-\frac{\pi}{2}.$$

Вычислим второй интеграл:

$$\int_1^{-1}\arccos\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx=\left|\begin{array}{ll} u=\arccos\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}, & du=-\dfrac{dx}{1+x^2}, \\ dv=dx, & v=x \end{array}\right|=$$

$$=x\cdot\arccos\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\Bigg|_1^{-1}+\int_1^{-1}\frac{xdx}{1+x^2}=-\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}+$$

$$+\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\Big|_1^{-1}=-\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\ln 2=-\pi.$$

Окончательно получим $\int_C \ln z dz=2-\ln 2-\frac{\pi}{2}-\pi i$.

б) $\int\limits_C z\ln z dz,\ C -$ часть окружности $|z|=1,\ z_1=i, z_2=-1,$
$\ln 1=-2\pi i$.

Согласно формуле (12) $\mathrm{Ln}1=2\pi k i$. Учитывая условие задачи получаем, что $k=-1$. Так как контур интегрирования есть часть окружности радиуса единица, то переменную z удобно представить в виде $z=e^{i(t+2k\pi)}=e^{i(t-2\pi)}$. Тогда $\ln z=\ln e^{i(t-2\pi)}=i(t-2\pi)$, $dz=i\cdot e^{i(t-2\pi)}dt$, $t_1=\frac{\pi}{2}$, $t_2=\pi$.
Следовательно, искомый интеграл можно записать в виде

$$\int\limits_C z\ln z dz=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{i(t-2\pi)}\cdot i(t-2\pi)\cdot ie^{i(t-2\pi)}dt=-\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(t-2\pi)e^{2i(t-2\pi)}dt .$$

Интегрируя по частям, получим

$$-\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(t-2\pi)e^{2i(t-2\pi)}dt=\left|\begin{matrix} u=t-2\pi, & du=dt, \\ dv=e^{2i(t-2\pi)}dt, & v=\frac{1}{2i}e^{2i(t-2\pi)}\end{matrix}\right|=$$

$$=-(t-2\pi)\frac{1}{2i}e^{2i(t-2\pi)}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}+\frac{1}{2i}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}e^{2i(t-2\pi)}dt=$$

$$=-(\pi-2\pi)\frac{1}{2i}e^{2i(\pi-2\pi)}+\left(\frac{\pi}{2}-2\pi\right)\frac{1}{2i}e^{2i\left(\frac{\pi}{2}-2\pi\right)}+\frac{1}{(2i)^2}e^{2i(\pi-2\pi)}-$$

$$-\frac{1}{(2i)^2}e^{2i\left(\frac{\pi}{2}-2\pi\right)}=e^{-2\pi i}\left(\frac{\pi}{2i}-\frac{1}{4}\right)+e^{-3\pi i}\left(-\frac{3\pi}{4i}+\frac{1}{4}\right)=$$

$$=(\cos 2\pi-i\sin 2\pi)\left(\frac{\pi}{2i}-\frac{1}{4}\right)+(\cos 3\pi-i\sin 3\pi)\left(-\frac{3\pi}{4i}+\frac{1}{4}\right)=$$

$$=\frac{\pi}{2i}-\frac{1}{4}+\frac{3\pi}{4i}-\frac{1}{4}.$$

Окончательно получим $I=\int\limits_C z\ln z dz=-\frac{1}{2}-i\frac{5\pi}{4}$.

в) $\int\limits_C \sqrt[4]{z^2}dz,\ C$ – часть окружности $|z|=1,\ z_1=1, z_2=i,$ $\sqrt[4]{1}=-1$.

Согласно формуле (4)

$$w_k=\sqrt[4]{1}=\cos\frac{2\pi k}{4}+i\sin\frac{2\pi k}{4},\ \ k=0,1,2,3.$$

Тогда $w_0=1$, $w_1=i$, $w_2=-1$, $w_3=-i$. Учитывая условие задачи, получаем, что $k=2$. Так как контур интегрирования есть часть окружности радиуса единица, то переменную z удобно представить в виде

$$z=e^{i(t+2k\pi)}=e^{i(t+4\pi)}.$$

Тогда $\sqrt[4]{z^2}=e^{i\left(\frac{t}{2}+2\pi\right)}$, $dz=i\cdot e^{i(t+4\pi)}dt$, $t_1=0$, $t_2=\frac{\pi}{2}$. Следовательно, искомый интеграл можно записать в виде

$$I=\int\limits_C \sqrt[4]{z^2}dz=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{i\left(\frac{t}{2}+2\pi\right)}\cdot i\cdot e^{i(t+4\pi)}dt=i\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{i\left(\frac{3t}{2}+6\pi\right)}dt=$$

$$=\frac{2i}{3i}e^{i\left(\frac{3t}{2}+6\pi\right)}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{3}e^{i\frac{27\pi}{4}}-\frac{2}{3}e^{i6\pi}=\frac{2}{3}\left(\cos\frac{27\pi}{4}+i\sin\frac{27\pi}{4}\right)-$$

$$-\frac{2}{3}(\cos 6\pi+i\sin 6\pi)=-\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{2}{3}=-\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{2}}{3}+i\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Задача 14. Вычислить интеграл с помощью вычетов.

$$I=\int\limits_0^{2\pi}\frac{dx}{(a+b\cos x)^2},\qquad (a>b>0).$$

Решение. Применяя подстановку $e^{ix}=z$ и используя формулу (32), после преобразований получим

$$I=\frac{4}{i}\int\limits_{|z|=1}\frac{zdz}{\left(bz^2+2az+b\right)^2}=\frac{4}{i}\cdot 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{res}F\left(z_k\right).$$

Внутри единичного круга $|z|<1$ при условии $(a>b>0)$ находится только один двукратный полюс

$z_1 = \dfrac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}$. Вычет функции $F(z) = \dfrac{z}{\left(bz^2+2az+b\right)^2}$ относительно этого полюса

$$\operatorname{res} F(z_1) = \lim_{z\to z_1} \frac{d}{dz}\left(\frac{z(z-z_1)^2}{b^2(z-z_1)^2(z-z_2)^2}\right) = \frac{a}{4}\left(a^2-b^2\right)^{-\frac{3}{2}}$$

и $I = \dfrac{2\pi a}{\left(a^2-b^2\right)^{\frac{3}{2}}}$.