ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №4
НЕСТАЦИОНАРНОЕ ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ В ПЛОСКОЙ СТЕНКЕ

Рассмотрим применение МКР для моделирования нестационарного процесса переноса теплоты через бесконечную плоскую пластину (рис. 1) при отсутствии внутренних источников теплоты.

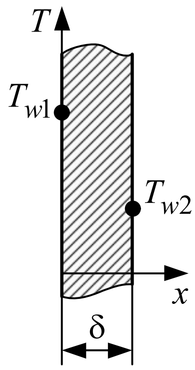

Рис. 1. Расчетная схема

Примем следующие допущения:

1) толщина пластины равна δ;

2) коэффициент теплопроводности, теплоемкость и плотность материала пластины не зависят от температуры;

3) внутренние источники теплоты в пластине отсутствуют ($q_v = 0$);

4) на обеих поверхностях пластины поддерживаются постоянными значения температур (т.е. заданы граничные условия первого рода):

$$T_{x=0} = T_{w1},\ T_{x=\delta} = T_{w2}.$$

5) температура пластины в начальный момент времени равна T_0.

Дифференциальное уравнение теплопроводности для рассматриваемого случая имеет вид:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial \tau} = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right). \qquad (1)$$

При заданных условиях температура будет изменяться только в направлении оси x, т.е.

$$\frac{\partial T}{\partial y}=0 \text{ и } \frac{\partial T}{\partial z}=0.$$

Тогда дифференциальное уравнение теплопроводности (1) примет вид:

$$\rho c\frac{\partial T}{\partial \tau}=\lambda\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \tag{2}$$

Начальные и граничные условия:

$$\tau=0:\ T=T_0,\ 0\le x\le\delta;$$

$$x=0:\ T=T_{w1},\ \tau>0;$$

$$x=\delta:\ T=T_{w2},\ \tau>0.$$

Данную задачу в полной математической постановке решим методом конечных разностей на равномерной сетке. Для этого разобьем пластину по толщине на $N-1$ равных промежутков с шагом $h=\dfrac{\delta}{N-1}$, т.е. построим конечно-разностную сетку (рис. 2):

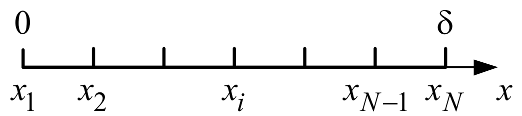

Рис. 2. Конечно-разностная схема:
x_2, x_3, …, x_{N-1} – координаты внутренних узлов;
x_1, x_N – координаты граничных узлов

Будем пользоваться неявной схемой. Заменим дифференциальные операторы в (2) на их конечно-разностные аналоги:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau}=\frac{T_i^{n+1}-T_i^n}{\tau} \text{ и } \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=\frac{T_{i+1}^{n+1}-2T_i^{n+1}+T_{i-1}^{n+1}}{h^2},$$

где n – номер шага по времени; i – номер узла по координате.

В результате такой аппроксимации, получим следующее уравнение:

$$\rho c\frac{T_i^{n+1}-T_i^n}{\tau}=\lambda\left(\frac{T_{i+1}^{n+1}-2T_i^{n+1}+T_{i-1}^{n+1}}{h^2}\right),\ i=2...N-1. \tag{3}$$

Выбранная схема аппроксимации частных производных графически представлена на рис. 3. Откуда видно, что используется четырехточечная разностная схема – три точки берутся на новом временном слое и одна со старого временного слоя.

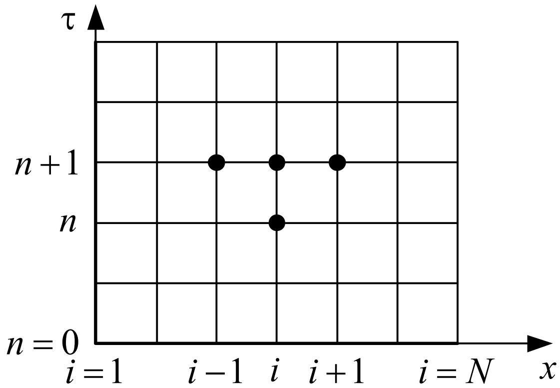

Рис. 3. Схема неявной четырехточечной разностной схемы

Сформулированный выше способ аппроксимации производных называется неявным потому, что поле температуры на новом временном слое представлено неявно, т.е. для его определения необходимо решать уравнение (3).

Уравнение (3) целесообразно свести к более общему виду:

$$A_i \cdot T_{i+1}^{n+1} - B_i \cdot T_i^{n+1} + C_i \cdot T_{i-1}^{n+1} = F_i, \tag{4}$$

где $A_i = \dfrac{\lambda}{h^2}$; $B_i = \dfrac{2\lambda}{h^2} + \dfrac{\rho c}{\tau}$; $C_i = \dfrac{\lambda}{h^2}$; $F_i = -\dfrac{\rho c}{\tau} \cdot T_i^n$.

Предположим, что существуют такие наборы чисел Δ_i и Ω_i при которых выполняется рекуррентное соотношение:

$$T_i^{n+1} = \Delta_i \cdot T_{i+1}^{n+1} + \Omega_i. \tag{5}$$

Уменьшим в (5) индекс i на единицу, получим

$$T_{i-1}^{n+1} = \Delta_{i-1} \cdot T_i^{n+1} + \Omega_{i-1}. \tag{6}$$

Тогда уравнение (4) с учетом (6) примет вид

$$A_i \cdot T_{i+1}^{n+1} - B_i \cdot T_i^{n+1} + C_i \cdot \Delta_{i-1} \cdot T_i^{n+1} + C_i \cdot \Omega_{i-1} = F_i,$$

откуда

$$T_i^{n+1} = \frac{A_i}{B_i - C_i \cdot \Delta_{i-1}} T_{i+1}^{n+1} + \frac{C_i \cdot \Omega_{i-1} - F_i}{B_i - C_i \cdot \Omega_{i-1}}. \tag{7}$$

Выражения (5) и (7) будут тождественно равны при

$$\boxed{\Delta_i = \frac{A_i}{B_i - C_i \cdot \Delta_{i-1}}} \text{ и } \boxed{\Omega_i = \frac{C_i \cdot \Omega_{i-1} - F_i}{B_i - C_i \cdot \Delta_{i-1}}}. \quad (8)$$

Значения прогоночных коэффициентов Δ_i и Ω_i, а также T_N^{n+1} находят из граничных условий.

Так как:

– при $x = 0$ и $i = 1$ температура $T = T_{w1}$ и выражение (5) имеет вид

$$T_1^{n+1} = \Delta_1 \cdot T_2^{n+1} + \Omega_1 = T_{w1},$$

то

$$\boxed{\Delta_1 = 0} \text{ и } \boxed{\Omega_1 = T_{w1}};$$

– при $x = \delta$ и $i = N$ температура $T = T_{w2}$, то

$$\boxed{T_N^{n+1} = T_{w2}}.$$

Таким образом, значения прогоночных коэффициентов можно определить по (8), задаваясь значением номера узла по координате ($i = 2...N-1$).

Расчет значений температур следует вести по (5) при $i = N-1...2$.

Резюмируя вышеизложенное, алгоритм расчета нестационарного температурного поля в плоской пластине можно представить в виде следующих этапов:

1) задаются геометрические условия (δ), теплофизические свойства материала стенки (ρ, c и λ), начальные (T_0) и граничные (T_{w1}, T_{w2}) условия, число участков разбиения (N) и конечное время, при котором проводится расчет температурного поля (τ_{end});

2) рассчитывается шаг сетки: $h = \dfrac{\delta}{N-1}$;

3) определяется расчетный шаг сетки по времени: $\tau = \dfrac{\tau_{end}}{N}$;

4) вводится начальное поле температур: при $i = 1...N$, $T_i^0 = T_0$;

5) задается промежуточная величина ($time = 0$), которая будет характеризовать текущее время расчета;

6) проверяется условие $time \geq \tau_{end}$. В случае его выполнения, следует перейти к пункту 13 данного алгоритма;

7) увеличим переменную времени на шаг τ: $time = time + \tau$;

8) рассчитываются прогоночные коэффициенты в первом узле разностной сетки Δ_1 и Ω_1;

9) рассчитываются Δ_i и Ω_i по (8);

10) определяется температура на правой границе пластины T_N;

11) рассчитывается температурное поле по (5) при $i = N - 1...2$;

12) циклично возвращаемся к пункту 6;

13) получаем численное решение уравнения теплопроводности в виде таблично-заданного распределения температуры.

На рис. 4 приведен пример решения нестационарного уравнения теплопроводности методом конечных разностей (по представленному выше алгоритму) в системе MathCAD. Расчет выполнен при следующих параметрах:

– значения температур на границах пластины: $t_{w1} = 300$ ºС; $t_{w2} = 100$ ºС;

– температура пластины в начальный момент времени: $t_0 = 20$ ºС;

– толщина пластины: $\delta = 100$ мм;

– свойства материала пластины: $c = 460$ Дж/(кг·К); $\rho = 7800$ кг/м^3; $\lambda = 46$ Вт/(м·К).

Распределение температуры в плоской пластине для различных значений времени τ_{end} приведено на рис. 5.

Достоверность полученных данных можно оценить путем сравнения их с аналитическим уравнением для стационарного режима.

Дифференциальное уравнение (2) для стационарного режима теплообмена имеет вид:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0.$$

```
ORIGIN := 1

Tw1 := 300 + 273.15      δ := 100·10^(−3)     λ := 46
Tw2 := 100 + 273.15      N := 100             ρ := 7800
T0 := 20 + 273.15                             c := 460

Temperature(τ_end) := | τ ← τ_end / N
                      | x_1 ← 0
                      | x_N ← δ
                      | h ← δ / (N − 1)
                      | for  i ∈ 1..N
                      |   T_i ← T0
                      | while  time < τ_end
                      |   | time ← time + τ
                      |   | Δ_1 ← 0
                      |   | Ω_1 ← Tw1
                      |   | for  i ∈ 2..N − 1
                      |   |   | x_i ← x_(i−1) + h
                      |   |   | A_i ← λ / h^2
                      |   |   | B_i ← 2·λ / h^2 + ρ·c / τ
                      |   |   | C_i ← λ / h^2
                      |   |   | F_i ← (−ρ·c / τ)·T_i
                      |   |   | Δ_i ← A_i / (B_i − C_i·Δ_(i−1))
                      |   |   | Ω_i ← (C_i·Ω_(i−1) − F_i) / (B_i − C_i·Δ_(i−1))
                      |   | T_N ← Tw2
                      |   | for  i ∈ (N − 1)..1
                      |   |   T_i ← Δ_i·T_(i+1) + Ω_i
                      | augment(T − 273.15, x)
```

Поле температур при 60с

$\mathrm{Temperature}(60)^{\langle 1\rangle} =$

	1
1	300
2	294.354
3	288.712
4	283.079
5	277.459
6	271.857
7	266.276
8	260.72
9	255.195
10	...

Таблица координат, мм

$\left(\mathrm{Temperature}(60)^{\langle 2\rangle}\right)\cdot 10^3 =$

	1
1	0
2	1.01
3	2.02
4	3.03
5	4.04
6	5.051
7	6.061
8	7.071
9	8.081
10	...

Рис. 4. Применение системы MathCAD при решении нестационарного уравнения теплопроводности методом конечных разностей

Интегрируя дважды последнее уравнение, получим

$$T(x) = c_1 \cdot x + c_2 .$$

Значения коэффициентов c_1 и c_2 находятся из граничных условий.

Так как при $x = 0$, $T = T_{w1}$ и при $x = \delta$, $T = T_{w2}$, то

$$c_2 = T_{w1},\ c_1 = -\frac{T_{w1} - T_{w2}}{\delta},$$

следовательно, аналитически распределение температуры в бесконечной плоской пластине имеет вид:

$$T(x) = -\frac{T_{w1} - T_{w2}}{\delta} \cdot x + T_{w1}. \qquad (9)$$

Сравнение решений уравнения теплопроводности методом конечных разностей при нестационарном режиме и уравнения (9) показано на рис. 5. Из графических данных следует, что при увеличении времени теплообмена (τ_{end}), поле температур при нестационарном режиме стремится к стационарному. И в пределе при $\tau = \infty$ эти поля температур совпадут.

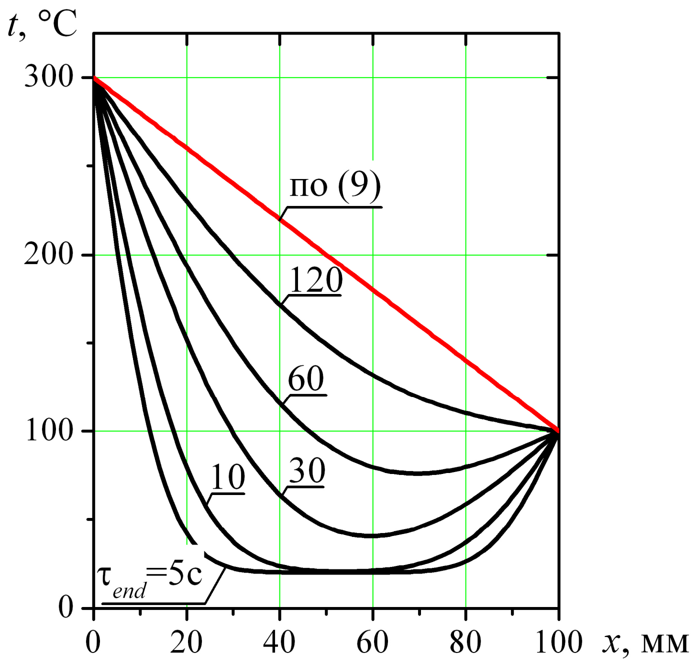

Рис. 5. Температурное поле в бесконечной пластине

АППРОКСИМАЦИЯ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ВТОРОГО И ТРЕТЬЕГО РОДА КОНЕЧНО-РАЗНОСТНОЙ СХЕМОЙ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ

Математическая формулировка граничных условий *второго рода*, при рассмотрении нестационарного процесса теплопроводности (рис. 6), имеет вид:

$$
\begin{aligned}
&– \text{на левой границе: } x=0;\ q_1=-\lambda\frac{\partial T}{\partial x};\\
&– \text{на правой границе: } x=\delta;\ q_2=-\lambda\frac{\partial T}{\partial x}.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

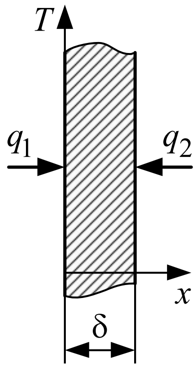

Рис. 6. Задание граничных условий второго рода

Выражения для расчета прогоночных коэффициентов Δ_1, Ω_1 и температуры T_N для нестационарного температурного поля *имеют вид отличный* от приведенных в лабораторной работе №1 для стационарного режима теплообмена.

Для определения значений начальных прогоночных коэффициентов Δ_1 и Ω_1 в соотношении $T_1=\Delta_1\cdot T_2+\Omega_1$ и значение температуры T_N необходимо использовать граничные условия, записанные для левой и правой границы пластины.

Проведем дискретизацию граничных условий второго рода с погрешностью $O(h^2)$. Предположим, что на границе выполняется уравнение теплопроводности:

$$\rho c\frac{\partial T}{\partial \tau}=\lambda\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \text{ или } \frac{\partial T}{\partial \tau}=a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \tag{11}$$

Разложим в ряд Тейлора функцию $T(x)$ в окрестности точки $x=0$ до члена второго порядка относительно h:

$$T_2^{n+1}=T_1^{n+1}+h\cdot\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0}^{n+1}+\frac{h^2}{2}\cdot\left.\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right|_{x=0}^{n+1}.$$

Таким образом,

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0}^{n+1}=\frac{T_2^{n+1}-T_1^{n+1}}{h}-\frac{h}{2a}\cdot\left.\frac{\partial T}{\partial \tau}\right|_{x=0}^{n+1}=\frac{T_2^{n+1}-T_1^{n+1}}{h}-\frac{h}{2a}\cdot\frac{T_1^{n+1}-T_1^{n}}{\tau}=-\frac{q_1}{\lambda}.$$

Тогда выражение для граничных условий на левой поверхности пластины (10) можно представить в виде:

$$\frac{T_2^{n+1}-T_1^{n+1}}{h}-\frac{h}{2a\cdot\tau}\cdot T_1^{n+1}+\frac{h}{2a\cdot\tau}\cdot T_1^{n}=-\frac{q_1}{\lambda}$$

отсюда

$$T_1^{n+1}=\frac{2a\cdot\tau}{h^2+2a\cdot\tau}\cdot T_2^{n+1}+\frac{h^2}{h^2+2a\cdot\tau}\cdot T_1^{n}+\frac{2a\cdot\tau\cdot h\cdot q_1}{\lambda\cdot(h^2+2a\cdot\tau)}.$$

Следовательно, выражения для начальных значений прогоночных коэффициентов имеют вид:

$$\boxed{\Delta_1=\frac{2a\cdot\tau}{h^2+2a\cdot\tau}};\ \boxed{\Omega_1=\frac{h^2}{h^2+2a\cdot\tau}\cdot T_1^{n}+\frac{2a\cdot\tau\cdot h\cdot q_1}{\lambda\cdot(h^2+2a\cdot\tau)}}.$$

Из граничных условий (10), записанных для правой границы пластины:

$$T_{N-1}^{n+1}=T_N^{n+1}-h\cdot\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=\delta}^{n+1}+\frac{h^2}{2}\cdot\left.\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right|_{x=\delta}^{n+1}=T_N^{n+1}-h\cdot\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=\delta}^{n+1}+\frac{h^2}{2a}\cdot\left.\frac{\partial T}{\partial \tau}\right|_{x=\delta}^{n+1};$$

$$-\frac{q_2}{\lambda}=\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=\delta}^{n+1}=\frac{T_N^{n+1}-T_{N-1}^{n+1}}{h}+\frac{h}{2a}\cdot\frac{T_N^{n+1}-T_N^{n}}{\tau},$$

следовательно,

$$2a\cdot\tau\cdot\lambda\cdot T_N^{n+1}-2a\cdot\tau\cdot\lambda\cdot T_{N-1}^{n+1}+h^2\cdot\lambda\cdot T_N^{n+1}-h^2\cdot\lambda\cdot T_N^{n}+2a\cdot\tau\cdot h\cdot q_2=0.$$

Так как

$$T_{N-1}=\Delta_{N-1}\cdot T_N+\Omega_{N-1},$$

то

$$\boxed{T_N^{n+1}=\frac{2a\cdot\tau\cdot\lambda\cdot\Omega_{N-1}-2a\cdot\tau\cdot h\cdot q_2+h^2\cdot\lambda\cdot T_N^{n}}{\lambda\cdot h^2+2a\cdot\tau\cdot\lambda\cdot(1-\Delta_{N-1})}}.$$

Аппроксимацию граничных условий *третьего рода* (при известных значениях температур сред T_{f1}, T_{f2} и коэффициентах теплоотдачи α_1 и α_2) можно выполнить по аналогии с граничными условиями второго рода.

Так как (см. рис. 7):

– при $x = 0$: $-\lambda \dfrac{\partial T}{\partial x} = \alpha_1 (T_{f1} - T)$;

– при $x = \delta$: $-\lambda \dfrac{\partial T}{\partial x} = \alpha_2 (T - T_{f2})$,

то

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0}^{n+1} = \frac{T_2^{n+1} - T_1^{n+1}}{h} - \frac{h}{2a} \cdot \frac{T_1^{n+1} - T_1^{n}}{\tau} = \frac{\alpha_1}{\lambda} \cdot T_1^{n+1} - \frac{\alpha_1}{\lambda} \cdot T_{f1}.$$

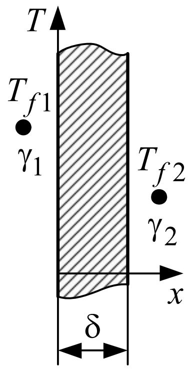

Рис. 7. Расчетная схема при граничных условиях третьего рода

Следовательно, из $T_1^{n+1} = \Delta_1 T_2^{n+1} + \Omega_1$, имеем

$$\boxed{\Delta_1 = \frac{2a \cdot \tau \cdot \lambda}{\lambda \cdot h^2 + 2a \cdot \tau \cdot (\lambda + h \cdot \alpha_1)}}; \quad \boxed{\Omega_1 = \frac{\lambda \cdot h^2 \cdot T_1^n + 2a \cdot \tau \cdot h \cdot \alpha_1 \cdot T_{f1}}{\lambda \cdot h^2 + 2a \cdot \tau \cdot (\lambda + h \cdot \alpha_1)}}.$$

Из граничных условий, записанных для правой границы следует:

$$\boxed{T_N^{n+1} = \frac{\lambda \cdot h^2 \cdot T_N^n + 2a \cdot \tau \cdot (\lambda \cdot \Omega_{N-1} + h \cdot \alpha_2 \cdot T_{f2})}{\lambda \cdot h^2 + 2a \cdot \tau \cdot \left[h \cdot \alpha_2 + \lambda \cdot (1 - \Delta_{N-1})\right]}}.$$

ЗАДАНИЕ К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ

Однородная однослойная плоская пластина (рис. 6) толщиной δ подвергается нагреву. Температура пластины в начальный момент времени $t_0 = 20$ °С. В системе математического моделирования MathCAD требуется:

1) записать граничные условия для каждой границы стенки в дифференциальном и дискретном виде;

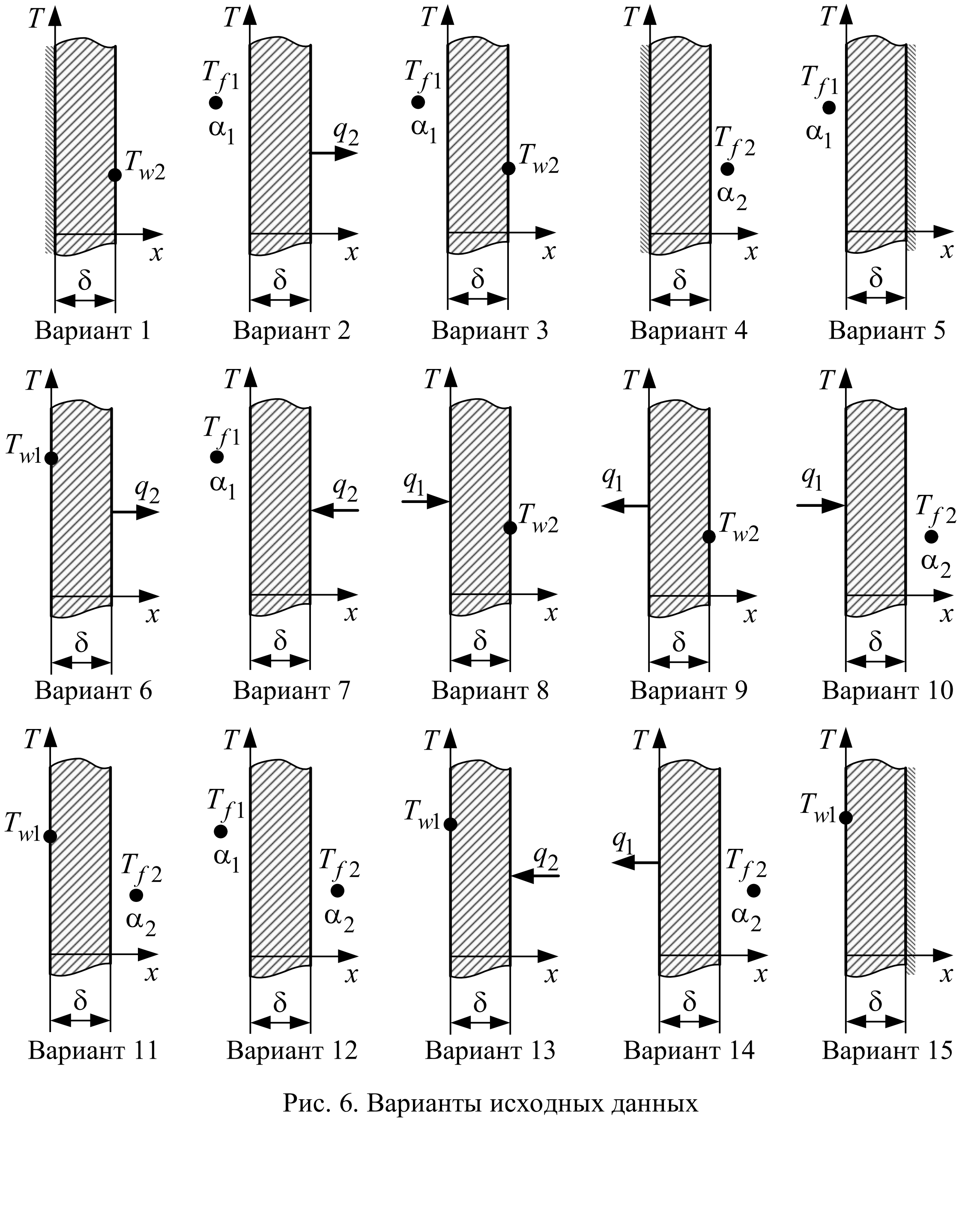

Рис. 6. Варианты исходных данных

2) составить программу моделирования нестационарного процесса теплопроводности;

3) получить численное решение и графические зависимости изменения температуры в плоской стенке для шести различных временных промежутков теплообмена;

4) получить аналитическую зависимость для плоской стенки при стационарном режиме теплообмена;

5) провести оценку адекватности разработанной модели температурного поля;

6) сделать выводы.

Исходные данные, необходимые для моделирования нестационарного процесса теплопроводности, приведены в Табл.

Таблица

Исходные данные для расчета

№ вар.	t_{w1}, °C	t_{w2}, °C	t_{f1}, °C	t_{f2}, °C	α_1, $\frac{Вт}{м^2К}$	α_2, $\frac{Вт}{м^2К}$	$q_1 \cdot 10^{-4}$, $\frac{Вт}{м^2}$	$q_2 \cdot 10^{-4}$, $\frac{Вт}{м^2}$	δ, мм	материал пластины
1	–	60	–	–	–	–	–	–	30	Латунь
2	–	–	60	–	80	–	–	1,5	20	Магний
3	–	30	50	–	60	–	–	–	40	Железо
4	–	–	–	30	–	100	–	–	60	Алюминий
5	–	–	100	–	150	–	–	–	40	Чугун
6	50	–	–	–	–	–	–	5	20	1Х18Н9Т
7	–	–	100	–	120	–	–	1	60	Сталь 45
8	–	50	–	–	–	–	10	–	40	Чугун
9	–	40	–	–	–	–	1	–	30	Латунь
10	–	–	–	40	–	80	1,5	–	50	Медь
11	30	–	–	80	–	50	–	–	60	Сталь 45
12	–	–	40	80	60	120	–	–	60	Чугун
13	40	–	–	–	–	–	–	3	20	Алюминий
14	–	–	–	60	–	80	3	–	30	1Х18Н9Т
15	30	–	–	–	–	–	–	–	60	Магний

Свойства некоторых металлов и сплавов

Наименование	Свойства		
	ρ, кг/м^3	c, кДж/(кг·К)	λ, Вт/(м·К)
Алюминий	2700	0,896	209
Медь	8930	0,388	390
Железо	7880	0,44	74
Чугун (4%)	7270	0,419	51,9
Сталь 45	7794	0,560	32
Сталь нержавеющая 1Х18Н9Т	7900	0,502	16
Свинец	11350	0,127	35,1
Магний	1760	0,975	158
Латунь (70% Cu, 30% Zn)	8520	0,385	110,7