ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №1
ОДНОМЕРНОЕ СТАЦИОНАРНОЕ ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ В ПЛОСКОЙ ПЛАСТИНЕ

Рассмотрим применение МКР для моделирования процесса переноса теплоты через бесконечную плоскую пластину (рис. 1).

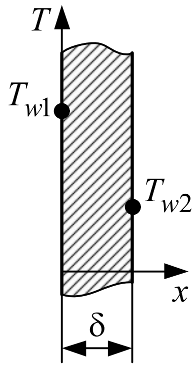

Рис. 1. Расчетная схема

Методом конечных разностей решим дифференциальное уравнение теплопроводности для неограниченной плоской пластины при следующих условиях:

1) толщина пластины равна δ;

2) коэффициент теплопроводности, теплоемкость и плотность материала пластины не зависят от температуры;

3) внутренние источники теплоты в пластине отсутствуют ($q_v = 0$);

4) на обеих поверхностях пластины поддерживаются постоянными значения температур (т.е. заданы граничные условия первого рода):

$$T_{x=0} = T_{w1}, \; T_{x=\delta} = T_{w2}.$$

5) температурное поле – стационарно.

При заданных условиях температура будет изменяться только в направлении оси x, т.е.

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0 \text{ и } \frac{\partial T}{\partial z} = 0.$$

Тогда дифференциальное уравнение теплопроводности примет вид:

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \text{ или } \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \qquad (1)$$

Граничные условия:

$$x = 0: \; T = T_{w1};$$

$$x = \delta: \; T = T_{w2}.$$

Данную задачу в полной математической постановке решим методом конечных разностей на равномерной сетке. Для этого разобьем пластину по толщине на $N-1$ равных промежутков с шагом $h = \frac{\delta}{N-1}$, т.е. построим конечно-разностную сетку (рис. 2). Воспользуемся неявной схемой записи дискретных аналогов производных.

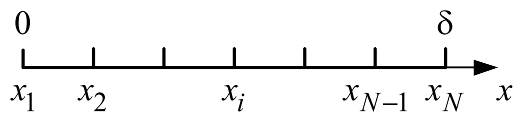

Рис. 2. Конечно-разностная схема:
x_2, x_3, …, x_{N-1} – координаты внутренних узлов;
x_1, x_N – координаты граничных узлов

Заменим дифференциальные операторы в (1) на их конечно-разностные аналоги:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{T_{i+1} - T_i}{h},$$

следовательно,

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{h^2},$$

где i – номер узла по координате.

В результате такой аппроксимации, получим следующее уравнение:

$$\frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{h^2} = 0,$$

следовательно,

$$T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1} = 0, \; i = 2...N-1. \qquad (2)$$

Введем рекуррентное соотношение:

$$T_i = \Delta_i \cdot T_{i+1} + \Omega_i\,, \tag{3}$$

где Δ и Ω – прогоночные коэффициенты.

Из (3) следует:

$$T_{i-1} = \Delta_{i-1} \cdot T_i + \Omega_{i-1}\,. \tag{4}$$

Подставим (3) и (4) в (2), получим

$$T_{i+1} - 2\left(\Delta_i \cdot T_{i+1} + \Omega_i\right) + \Delta_{i-1} \cdot T_i + \Omega_{i-1} = 0$$

или

$$T_i = \frac{2\Delta_i - 1}{\Delta_{i-1}} \cdot T_{i+1} + \frac{2\Omega_i - \Omega_{i-1}}{\Delta_{i-1}}\,. \tag{5}$$

Сравнивая (5) и рекуррентное соотношение (3), можно заключить:

$$\Delta_i = \frac{2\Delta_i - 1}{\Delta_{i-1}}, \text{ следовательно, } \Delta_i = \frac{1}{2 - \Delta_{i-1}} \text{ и } \Omega_i = \frac{\Omega_{i-1}}{2 - \Delta_{i-1}}\,.$$

Начальные значения прогоночных коэффициентов Δ_1 и Ω_1, найдем из граничных условий *первого рода*.

Так как:

– при $x = 0$ и $i = 1$ температура $T = T_{w1}$, выражение (3) имеет вид

$$T_1 = \Delta_1 \cdot T_2 + \Omega_1 = T_{w1}\,,$$

то

$$\boxed{\Delta_1 = 0} \text{ и } \boxed{\Omega_1 = T_{w1}};$$

– при $x = \delta$ и $i = N$ температура $T = T_{w2}$, то

$$\boxed{T_N = T_{w2}}\,.$$

Листинг программы в среде MathCAD приведен на рис. 3. Графически распределение температуры в бесконечной плоской пластине показано на рис. 4 условными значками.

```
ORIGIN := 1

δ := 20·10^(−3)

Tw1 := 100 + 273.15

Tw2 := 20 + 273.15

N := 11

Temperature := | h ← δ/(N − 1)
               | Δ_1 ← 0
               | Ω_1 ← Tw1
               | T_N ← Tw2
               | x_1 ← 0
               | x_N ← δ
               | for i ∈ 2..(N − 1)
               |   | Δ_i ← 1/(2 − Δ_(i−1))
               |   | Ω_i ← Ω_(i−1)/(2 − Δ_(i−1))
               |   | x_i ← x_(i−1) + h
               | for i ∈ (N − 1)..1
               |   T_i ← Δ_i·T_(i+1) + Ω_i
               | augment(T, x)

t := Temperature⟨1⟩ − 273.15     - температурное поле, С

x := Temperature⟨2⟩·10^3         - таблица координат, мм
```

	t = 1		x = 1
1	100	1	0
2	92	2	2
3	84	3	4
4	76	4	6
5	68	5	8
6	60	6	10
7	52	7	12
8	44	8	14
9	36	9	16
10	28	10	18
11	20	11	20

Рис. 3. Пример решения МКР дифференциального уравнения теплопроводности при стационарном режиме в системе MathCAD

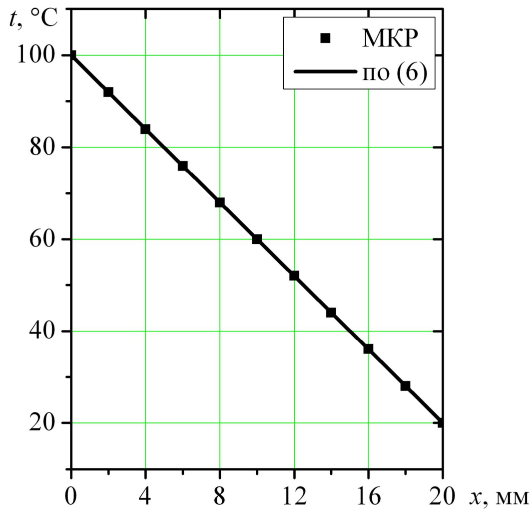

Рис. 4. Стационарное температурное поле в бесконечной пластине

Алгоритм расчета стационарного температурного поля в плоской пластине можно представить в виде следующих этапов:

1) задаются геометрические условия (δ), теплофизические свойства материала стенки (ρ, c и λ), граничные условия (T_{w1}, T_{w2}), число участков разбиения (N);

2) рассчитывается шаг сетки: $h = \dfrac{\delta}{N-1}$;

3) рассчитываются прогоночные коэффициенты в первом узле разностной сетки Δ_1, Ω_1 и температура на правой границе пластины T_N;

4) прямой прогонкой рассчитываются значения Δ_i и Ω_i при $i = 2...(N-1)$;

5) обратной прогонкой рассчитывается температурное поле по (5) при $i = (N-1)...2$;

6) получаем численное решение уравнения теплопроводности в виде таблично-заданного распределения температуры.

Достоверность решения стационарного уравнения теплопроводности для бесконечной плоской пластины можно оценить сравнением полученных данных с аналитическим уравнением.

Интегрируя дважды уравнение (1), получим

$$T(x) = c_1 \cdot x + c_2 .$$

Значения коэффициентов c_1 и c_2 находятся из граничных условий.

Так как при $x = 0$, $T = T_{w1}$ и при $x = \delta$, $T = T_{w2}$, то

$$c_2 = T_{w1},\ c_1 = -\frac{T_{w1} - T_{w2}}{\delta},$$

следовательно, аналитически распределение температуры в бесконечной плоской пластине имеет вид:

$$T(x) = -\frac{T_{w1} - T_{w2}}{\delta} \cdot x + T_{w1} . \qquad (6)$$

Сравнение решений уравнения теплопроводности (методом конечных разностей при стационарном режиме и уравнения (6)) показано на рис. 4 сплошной линией. Откуда следует, что данные, полученные с помощью аналитической зависимости, точно описывают положения точек (полученных МКР) при стационарном режиме теплообмена.

АППРОКСИМАЦИЯ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ВТОРОГО И ТРЕТЬЕГО РОДА КОНЕЧНО-РАЗНОСТНОЙ СХЕМОЙ

Математическая формулировка граничных условий *второго рода* (согласно закону Фурье), при рассмотрении процесса теплопроводности в бесконечной пластине (рис. 5), будет иметь вид:

– на левой границе: $x = 0;\ q_1 = -\lambda \dfrac{\partial T}{\partial x};$ (7)

– на правой границе: $x = \delta;\ q_2 = -\lambda \dfrac{\partial T}{\partial x}.$ (8)

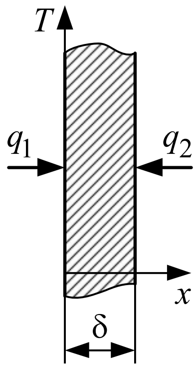

Рис. 5. Задание граничныхусловий второго рода

Анализ соотношений (7) и (8) позволяет сделать выводы:

– при $q_1 > 0$ (направление вектора слева направо) на левой границе производится подвод теплоты, следовательно, происходит нагрев материала;

– при $q_1 < 0$ (направление вектора справа налево) на левой границе производится отвод теплоты, следовательно, происходит охлаждение материала;

– при $q_2 < 0$ (направление вектора справа налево) на правой границе производится подвод теплоты, следовательно, происходит нагрев материала;

– при $q_2 > 0$ (направление вектора слева направо) на правой границе происходит охлаждение материала.

Для определения значений начальных прогоночных коэффициентов Δ_1 и Ω_1 в соотношении $T_1 = \Delta_1 \cdot T_2 + \Omega_1$ и значение температуры T_N необходимо использовать граничные условия, записанные для левой ($x = 0$) и правой ($x = \delta$) границы пластины.

Так как

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{T_2 - T_1}{h}\right|_{x=0},$$

то

$$\left.\frac{T_2 - T_1}{h}\right|_{x=0} = -\frac{q_1}{\lambda}.$$

Тогда

$$T_1 = T_2 + \frac{h \cdot q_1}{\lambda}.$$

Следовательно,

$$\boxed{\Delta_1 = 1};\ \boxed{\Omega_1 = \frac{h \cdot q_1}{\lambda}}.$$

Из граничных условий, записанных для правой границы пластины:

$$T_{N-1} = T_N - h \cdot \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=\delta};$$

$$-\frac{q_2}{\lambda} = \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=\delta} = \frac{T_N - T_{N-1}}{h},$$

следовательно,

$$T_N - T_{N-1} = -\frac{h \cdot q_2}{\lambda}.$$

Так как

$$T_{N-1} = \Delta_{N-1} \cdot T_N + \Omega_{N-1},$$

то

$$\boxed{T_N = \frac{\lambda \cdot \Omega_{N-1} - h \cdot q_2}{\lambda\left(1 - \Delta_{N-1}\right)}}.$$

Аппроксимацию граничных условий *третьего рода* (при известных значениях температур сред T_{f1}, T_{f2} и коэффициентах теплоотдачи α_1 и α_2) можно выполнить по аналогии с граничными условиями второго рода.

Так как (см. рис. 6):

– при $x = 0$: $-\lambda \dfrac{\partial T}{\partial x} = \alpha_1 (T_{f1} - T_1)$;

– при $x = \delta$: $-\lambda \dfrac{\partial T}{\partial x} = \alpha_2 (T_N - T_{f2})$,

то

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} = \frac{T_2 - T_1}{h} = \frac{\alpha_1}{\lambda} \cdot T_1 - \frac{\alpha_1}{\lambda} \cdot T_{f1}.$$

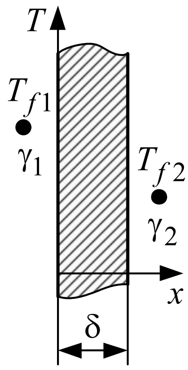

Рис. 6. Задание граничных условий третьего рода

Следовательно, из $T_1 = \Delta_1 T_2 + \Omega_1$, имеем

$$\boxed{\Delta_1 = \frac{\lambda}{\lambda + h \cdot \alpha_1}}; \quad \boxed{\Omega_1 = \frac{h \cdot \alpha_1 \cdot T_{f1}}{\lambda + h \cdot \alpha_1}}.$$

Из граничных условий, записанных для правой границы:

$$\boxed{T_N = \frac{\lambda \cdot \Omega_{N-1} + h \cdot \alpha_2 \cdot T_{f2}}{h \cdot \alpha_2 + \lambda \cdot (1 - \Delta_{N-1})}}.$$

ЗАДАНИЕ К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ

Однородная однослойная плоская пластина (рис. 7) толщиной δ подвергается нагреву. В системе MathCAD требуется:

1) записать граничные условия для каждой границы стенки в дифференциальном и дискретном виде;

2) составить программу моделирования стационарного процесса теплопроводности;

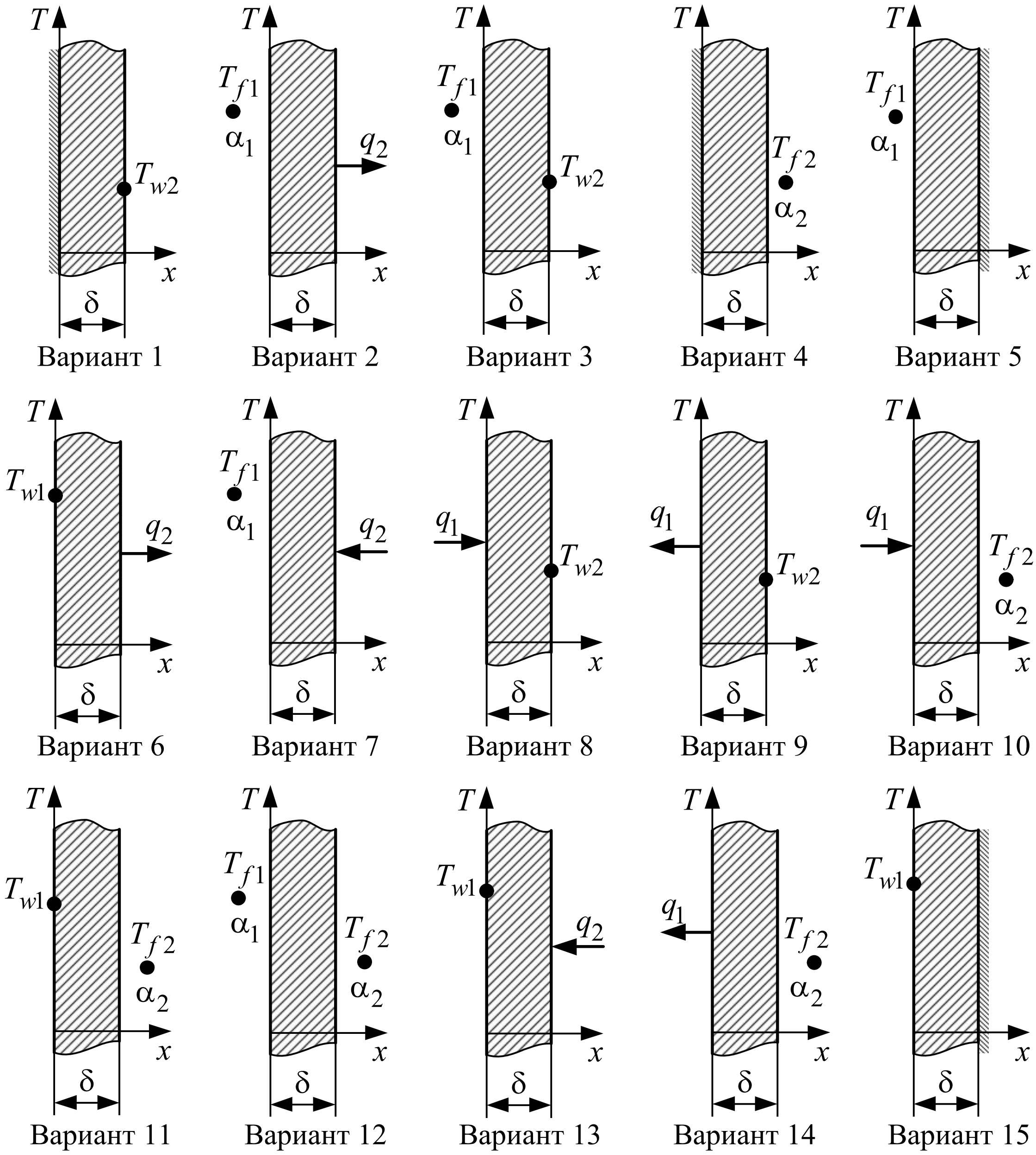

Рис. 7. Варианты исходных данных

3) получить численное решение и графическую зависимость изменения температуры в плоской стенке;

4) получить аналитическую зависимость изменения температуры в плоской стенке;

5) провести оценку адекватности разработанной модели температурного поля;

6) сделать выводы.

Исходные данные, необходимые для моделирования стационарного процесса теплопроводности, приведены в Табл.

Таблица

Исходные данные для расчета

№ вар.	t_{w1}, °C	t_{w2}, °C	t_{f1}, °C	t_{f2}, °C	α_1, $\frac{Вт}{м^2К}$	α_2, $\frac{Вт}{м^2К}$	$q_1 \cdot 10^{-4}$, $\frac{Вт}{м^2}$	$q_2 \cdot 10^{-4}$, $\frac{Вт}{м^2}$	δ, мм	материал пластины
1	–	60	–	–	–	–	–	–	30	Латунь
2	–	–	60	–	80	–	–	0,15	20	Магний
3	–	30	50	–	60	–	–	–	40	Железо
4	–	–	–	30	–	100	–	–	60	Алюминий
5	–	–	100	–	150	–	–	–	40	Чугун
6	50	–	–	–	–	–	–	5	20	1Х18Н9Т
7	–	–	100	–	120	–	–	1	60	Сталь 45
8	–	50	–	–	–	–	10	–	40	Чугун
9	–	40	–	–	–	–	1	–	30	Латунь
10	–	–	–	40	–	80	1,5	–	50	Медь
11	30	–	–	80	–	50	–	–	60	Сталь 45
12	–	–	40	80	60	120	–	–	60	Чугун
13	40	–	–	–	–	–	–	3	20	Алюминий
14	–	–	–	60	–	80	3	–	30	1Х18Н9Т
15	30	–	–	–	–	–	–	–	60	Магний

Свойства некоторых металлов и сплавов

Наименование	Свойства		
	ρ, кг/м^3	c, кДж/(кг·К)	λ, Вт/(м·К)
Алюминий	2700	0,896	209
Медь	8930	0,388	390
Железо	7880	0,44	74
Чугун (4%)	7270	0,419	51,9
Сталь 45	7794	0,560	32
Сталь нержавеющая 1Х18Н9Т	7900	0,502	16
Свинец	11350	0,127	35,1
Магний	1760	0,975	158
Латунь (70% Cu, 30% Zn)	8520	0,385	110,7