

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ. УСЛОВИЯ ОДНОЗНАЧНОСТИ

Температурное поле – совокупность значений температуры во всех точках данной расчетной области и во времени. Математически оно записывается в виде $T = f(x, y, z, \tau)$, измеряют в Кельвинах или градусах Цельсия, где x, y, z – координаты точки в пространстве, в которой определяют температуру; τ – время процесса теплообмена. Таким образом, температурное поле характеризуется количеством координат и своим поведением во времени.

В зависимости от числа координат, вдоль которых может изменяться температура тела, различают трехмерное, двумерное, одномерное и нульмерное (однородное) температурные поля.

Температурное поле, которое изменяется во времени, называют *нестационарным* температурным полем. И наоборот, температурное поле, которое не изменяется во времени ($\tau \rightarrow \infty$), называют *стационарным* температурным полем.

Различают три элементарных способа передачи теплоты:

- 1) теплопроводность;
- 2) конвекция;
- 3) тепловое излучение (радиационный теплообмен).

Перенос теплоты при непосредственном контакте более нагретых элементов тела (или среды) с менее нагретыми, осуществляемый посредством хаотического движения и взаимодействия микрочастиц (молекул, атомов, электронов, ионов), называется **теплопроводностью**.

Теплопроводность имеет место в твердых, жидких и газообразных телах. В твердых телах теплопроводность является единственным способом передачи теплоты. В вакууме теплопроводность отсутствует.

При решении задач связанных с нахождением температурного поля в твердом теле, необходимо иметь **дифференциальное уравнение теплопро-**

водности, которое (при коэффициенте теплопроводности не зависящем от температуры) в декартовой системе координат имеет вид

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial \tau} = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + q_v, \quad (1)$$

где ρ – плотность, кг/м³; c – удельная теплоемкость, Дж/(кг·К); λ – коэффициент теплопроводности материала, Вт/(м·К); q_v – мощность внутренних источников теплоты, Вт/м³.

В цилиндрической системе координат, уравнение (1) принимает вид:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial \tau} = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + q_v, \quad (2)$$

где r – радиус-вектор; φ – полярный угол; z – аппликата.

Величину $a = \frac{\lambda}{\rho c}$ называют коэффициентом температуропроводности.

Выражения (1) и (2) устанавливают связь между временным и пространственным изменениями температуры в любой точке тела, в котором происходит процесс теплопроводности.

Так как дифференциальное уравнение теплопроводности получено на основе общих законов физики, то оно описывает явление теплопроводности в самом общем виде. Поэтому можно сказать, что дифференциальные уравнения (1) и (2) описывают целый класс явлений теплопроводности. Чтобы из бесчисленного количества выделить конкретно рассматриваемый процесс и дать его полное математическое описание, к дифференциальному уравнению необходимо присоединить математическое описание всех частных особенностей рассматриваемого процесса. Эти частные особенности, которые совместно с дифференциальным уравнением дают полное математическое описание конкретного процесса теплопроводности, называются *условиями однозначности* или *краевыми условиями*.

Условия однозначности включают в себя:

1) геометрические условия (характеризующие форму и размеры тела, в которых протекает процесс);

2) физические условия (характеризующие физические свойства среды и тела);

3) временные (начальные) условия (характеризующие распределение температур в изучаемом теле в начальный момент времени);

4) граничные условия (характеризующие взаимодействие рассматриваемого тела с окружающей средой).

Геометрическими условиями задаются форма и линейные размеры тела, в котором рассматривается процесс.

Физическими условиями задаются физические параметры тела (λ , c , ρ и др.) и может быть задан закон распределения внутренних источников теплоты.

Начальные условия необходимы при рассмотрении нестационарных процессов и состоят в задании закона распределения температуры внутри тела в начальный момент времени. В общем случае начальное условие аналитически может быть записано следующим образом (при $\tau = 0$):

$$T_0 = f(x, y, z).$$

Граничные условия могут быть заданы несколькими способами.

Граничные условия первого рода. Задается распределение температуры на поверхности тела для каждого момента времени:

$$T_w = f(x, y, z),$$

где T_w – температура на поверхности тела. В частном случае, когда температура на поверхности тела является постоянной на протяжении всего времени протекания процесса теплообмена, последнее уравнение упрощается и принимает вид:

$$T_w = \text{const}.$$

Граничные условия **второго рода**. Задаются значения плотности теплового потока для каждой точки поверхности тела и любого момента времени. Аналитически это можно представить следующим образом:

$$q = f(x, y, z, \tau) = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_w.$$

Граничные условия **третьего рода**. При этом задаются температура окружающей среды T_f и закон теплообмена между поверхностью тела и окружающей средой. Граничное условие третьего рода характеризует закон теплообмена между поверхностью и окружающей средой в процессе охлаждения или нагрева тела. Для описания процесса теплообмена между поверхностью тела и средой используется закон Ньютона-Рихмана: плотность теплового потока пропорциональна разности температур поверхности тела T_w и окружающей среды T_f :

$$q = \alpha(T_w - T_f),$$

где α – коэффициент теплоотдачи, Вт/(м²·К) – характеризует интенсивность теплообмена между поверхностью тела и окружающей средой. Численно он равен количеству теплоты, отдаваемому (или воспринимаемому) единицей поверхности в единицу времени при разности температур между поверхностью тела и окружающей средой, равной одному Кельвину.

По закону сохранения энергии теплота, отводимая с единицы поверхности вследствие теплоотдачи, должна равняться теплоте, подводимой к единице поверхности вследствие теплопроводности из внутренних объемов тела, тогда

$$\alpha(T_w - T_f) = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_w.$$

Граничные условия **четвертого рода** характеризуют теплообмен системы тел или тела с окружающей средой по закону теплопроводности (идеальный контакт); задают условия равенства температур и тепловых потоков по обе стороны границы раздела:

$$\begin{cases} \lambda_1 \left(\frac{\partial T_1}{\partial n} \right)_w = \lambda_2 \left(\frac{\partial T_2}{\partial n} \right)_w ; \\ T_1 = T_2. \end{cases}$$

Таким образом, дифференциальные уравнения (1) или (2) совместно с условиями однозначности дают полную математическую формулировку конкретной задачи теплопроводности, которая может быть решена аналитически или численно.

2. МЕТОД КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

На практике часто приходится сталкиваться с задачами, в которых искомая величина зависит от нескольких переменных. В этом случае решаемые уравнения содержат частные производные и называются дифференциальными уравнениями в частных производных. К сожалению, очень многие из таких уравнений не имеют аналитического решения, и чтобы решить их, приходится прибегать к численным методам.

При решении дифференциального уравнения в частных производных достаточно часто используется метод конечных разностей (МКР). Идея МКР решения краевых задач состоит в следующем: вместо производных в дифференциальном уравнении используются их конечно-разностные аппроксимации.

При использовании МКР для задач теплопроводности твердое тело представляют в виде совокупности узлов. Аппроксимируя (заменяя) частные производные дифференциальных уравнений (1) или (2) конечными разностями, получают систему линейных алгебраических уравнений для определения температуры (как локальной характеристики) в каждом узле сетки. Полученная система является незамкнутой, для ее замыкания используют разностное представление граничных условий. В результате получают замкнутую систему линейных алгебраических уравнений, которую решают численными методами с помощью вычислительной техники. Численным называется решение, полученное в виде таблицы чисел.

МЕТОД ТОМАСА (ПРОГОНКИ)

Метод прогонки предназначен для решения линейных систем уравнений с трехдиагональными матрицами. Это важный в приложениях случай СЛАУ, возникающий, к примеру, при решении многих краевых задач для дифференциальных уравнений. По определению, трехдиагональными называются матрицы, все ненулевые элементы которых сосредоточены на трех диагоналях – главной и двух соседних с ней. Иными словами, для трехдиагональной матрицы $A = (a_{ij})$ неравенство $a_{ij} \neq 0$ имеет место лишь при $i = j$ и $i = j \pm 1$.

Обычно трехдиагональные системы линейных уравнений записывают в некотором каноническом виде, даже без обращения к матрично-векторной форме:

$$a_i x_{i-1} + b_i x_i + c_i x_{i+1} = d_i, \text{ где } i = 0 \dots n,$$

причем полагают $a_0 = 0$ и $c_n = 0$. Подобный вид и обозначения оправдываются тем, что соответствующие СЛАУ получаются действительно «локально», как дискретизация дифференциальных уравнений, связывающих значения искомых величин также локально, в окрестности какой-либо рассматриваемой точки.

Например, при численном решении дифференциального уравнения теплопроводности, конечно-разностная аппроксимация производной второго порядка при равномерном шаге имеет вид

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx \frac{T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1}}{h^2},$$

и поэтому решение конечно-разностными методами краевых задач для различных дифференциальных уравнений второго порядка приводит к трехдиагональным матрицам и системам с такими матрицами.

Метод прогонки является одним из эффективных методов решения СЛАУ с трехдиагональными матрицами и является частным случаем метода Гаусса.

Разберем наиболее простой случай ленточных систем, к которым сводится решение дифференциальных уравнений методами конечных разностей, конечных элементов и др. А именно будем искать решение такой системы, каждое уравнение которой связывает три «соседних» неизвестных:

$$A_j x_{j-1} + B_j x_j + C_j x_{j+1} = D_j, \quad (3)$$

где $j = 0, 1, \dots, n$. Такие уравнения называют трехточечными разностными уравнениями второго порядка. Система (3) имеет трехдиагональную структуру, что хорошо видно из следующего, эквивалентного (3), векторно-матричного представления:

$$\begin{bmatrix} B_0 & C_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ A_1 & B_1 & C_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & B_2 & C_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & A_{n-1} & B_{n-1} & C_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & A_n & B_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_0 \\ D_1 \\ D_2 \\ \dots \\ D_{n-1} \\ D_n \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Ставя цель избавиться от ненулевых элементов в поддиагональной части матрицы системы (4), предположим, что существуют такие наборы чисел α_j и β_j ($j = 0, 1, \dots, n$), при которых имеет место равенство

$$x_j = \alpha_j x_{j+1} + \beta_j, \quad (5)$$

означающее, что трехточечные уравнения второго порядка (3) преобразуются в двухточечное уравнение первого порядка (5). Коэффициенты α_j и β_j – прогоночные коэффициенты, подлежащие определению.

Уменьшим в (5) индекс на единицу и полученное при этом выражение $x_{j-1} = \alpha_{j-1} x_j + \beta_{j-1}$ подставим данное уравнение в (3):

$$\alpha_{j-1} A_j x_j + \beta_{j-1} A_j + B_j x_j + C_j x_{j+1} = D_j,$$

откуда получаем

$$x_j = -\frac{C_j}{\alpha_{j-1}A_j + B_j}x_{j+1} + \frac{D_j - \beta_{j-1}A_j}{\alpha_{j-1}A_j + B_j}. \quad (6)$$

Сравнивая (6) и (5), получим

$$\alpha_j = -\frac{C_j}{\alpha_{j-1}A_j + B_j}, \beta_j = \frac{D_j - \beta_{j-1}A_j}{\alpha_{j-1}A_j + B_j}. \quad (7)$$

Легко видеть, что в силу условия $A_0 = 0$ процесс вычисления α_j, β_j может быть начат со значений

$$\alpha_0 = -\frac{C_0}{B_0}, \beta_0 = \frac{D_0}{B_0}$$

и продолжен далее по формулам (7) последовательно при $j = 1, 2, \dots, n$, причем при $j = n$, в силу $C_n = 0$, получим $\alpha_n = 0$. Следовательно, полагая в (5) $j = n$, будем иметь

$$x_n = \beta_n = \frac{D_n - \beta_{n-1}A_n}{\alpha_{n-1}A_n + B_n},$$

где $\alpha_{n-1}, \beta_{n-1}$ – уже известные с предыдущего шага числа.

Далее по формулам (5) последовательно находим значения $x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_0$ при $j = n-1, n-2, \dots, 0$ соответственно.

Таким образом, решение уравнений вида (3) выведенным выше методом прогонки сводится к вычислениям по трем простым формулам. Сначала, полагая $j = 0, 1, \dots, n$ делают цикл вычислений так называемых *прогоночных коэффициентов* α_j, β_j по формулам (7) (прямая прогонка), а затем по формуле (5) при $j = n-1, n-2, \dots, 0$ вычисляют значения неизвестных x_j (обратная прогонка).

Для устойчивости метода прогонки (Томаса) достаточно выполнение следующих условий: матрица коэффициентов должна обладать свойством диагонального преобладания

$$\boxed{|B_j| \geq |A_j| + |C_j|}, \quad j = 0, \dots, n \text{ и } A_j \neq 0, C_j \neq 0, j = 1, \dots, n-1$$

причем строгое неравенство имеет место хотя бы при одном j .

Описание алгоритма решения СЛАУ методом Томаса

1. Определяются значения коэффициентов $\alpha_0 = -C_0 / B_0$, $\beta_0 = D_0 / B_0$.
2. *Прямой ход*: при $j = 1 \dots n-1$ рассчитываются α_j и β_j по (7).
3. Рассчитываются β_n и $x_n = \beta_n$.
4. *Обратный ход*: при $j = n-1 \dots 0$ рассчитываются x_j по (5).

Замечание. Одним из факторов, определяющих выбор того или иного метода при решении конкретной задачи, является вычислительная эффективность метода. Особенностью прямых методов является то, что здесь можно точно подсчитать требуемое количество арифметических операций. Необходимые операции и их число наглядно видны из Таблицы 1 (где вычитания отождествляются со сложением)

Таблица 1

Подсчет арифметической сложности метода прогонки			
Расчетные формулы	Умножений	Делений	Сложений
$\alpha_0 = -C_0 / B_0$, $\beta_0 = D_0 / B_0$		2	
$\alpha_j = -C_j / (\alpha_{j-1}A_j + B_j)$, $j = 1 \dots n-1$	$n-1$	$n-1$	$n-1$
$\beta_j = (D_j - \beta_{j-1}A_j) / (\alpha_{j-1}A_j + B_j)$, $j = 1 \dots n-1$	$n-1$	$n-1$	$n-1$
$\beta_n = (D_n - \beta_{n-1}A_n) / (\alpha_{n-1}A_n + B_n)$	2	1	2
$x_j = \alpha_j x_{j+1} + \beta_j$, $j = n \dots 0$	n		n
Итого арифметических действий	$6(n-1) + 2n + 7 = 8n + 1$		

Таким образом, общее число арифметических операций в методе прогонки есть $8n+1$ (примерно $8n$) и пропорционально, таким образом, числу уравнений n . Такие методы решения СЛАУ называют *экономичными*. Для сравнения число операций в методе Гаусса составляет примерно $\frac{2}{3}n^3$.

Пример. Методом Томаса (прогонки) решить СЛАУ

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 4, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 2, \\ x_2 - 2x_3 = 3. \end{cases}$$

В матричной форме исходная система уравнений примет вид

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ или } A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ и } D = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Воспользуемся указанным выше алгоритмом решения:

$$1. \alpha_0 = -\frac{1}{2} = -0,5, \beta_0 = \frac{4}{2} = 2.$$

2. Цикл $j = 1 \dots n - 1$, где $n = 2$:

$$\alpha_1 = -\frac{1}{-0,5 \cdot 1 + 3} = -0,4, \beta_1 = \frac{2 - 2 \cdot 1}{-0,5 \cdot 1 + 3} = 0;$$

$$3. \beta_2 = \frac{3 - 0 \cdot 1}{-0,4 \cdot 1 + (-2)} = -1,25 \text{ и } x_2 = \beta_2 = -1,25.$$

4. Цикл $j = n - 1 \dots 0$:

$$x_1 = -0,4 \cdot (-1,25) + 0 = 0,5;$$

$$x_0 = -0,5 \cdot 0,5 + 2 = 1,75.$$

$$\text{Таким образом, } x = \begin{bmatrix} 1,75 \\ 0,5 \\ -1,25 \end{bmatrix}.$$

Реализация алгоритма решения системы линейных уравнений в системе MathCAD показано на Рисунке.

TriDiagonal Matrix Algorithm

ORIGIN:= 0

```
TDMA(A,B,C,D):=
n ← last(B)
α0 ←  $\frac{-C_0}{B_0}$ 
β0 ←  $\frac{D_0}{B_0}$ 
for j ∈ 1..n-1
    αj ←  $\frac{-C_j}{\alpha_{j-1} \cdot A_j + B_j}$ 
    βj ←  $\frac{D_j - A_j \cdot \beta_{j-1}}{\alpha_{j-1} \cdot A_j + B_j}$ 
βn ←  $\frac{D_n - \beta_{n-1} \cdot A_n}{\alpha_{n-1} \cdot A_n + B_n}$ 
xn ← βn
for j ∈ n-1, n-2..0
    xj ← αj · xj+1 + βj
x
```

$$A := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad C := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad D := \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$x := \text{TDMA}(A, B, C, D) \quad x = \begin{pmatrix} 1.75 \\ 0.5 \\ -1.25 \end{pmatrix}$$

Проверка:

$$M := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{lsolve}(M, D) = \begin{pmatrix} 1.75 \\ 0.5 \\ -1.25 \end{pmatrix}$$

Рисунок – Решение СЛАУ методом Томаса в системе MathCAD