Многочлены с одной переменной, их корни и разложение на множители

Основные определения

Многочлен

от переменной x — это функция вида

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n,$$

где $a_0, \ldots, a_n$ — числа (обычно, вещественные), причем $a_n \neq 0$ при $n > 0$. Они называются *коэффициентами*. Коэффициент a_n называется *старшим*, а коэффициент a_0 — *свободным*.

Степень многочлена

это число n, т. е. наибольшая из степеней слагаемых с ненулевым коэффициентом. Степень многочлена f обозначается d_f. Если $d_f = 0$, то $f = a_0 \neq 0$. При $f = 0$ многочлен называется *нулевым*, его степень не определена.

Операции над многочленами

Пусть

$$f = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n, \quad g = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m, \qquad n \geqslant m.$$

Сумма / разность многочленов

это многочлен степени $k \leqslant n$, коэффициент c_i которого равен $a_i \pm b_i$ при $0 \leqslant i \leqslant m$ и равен a_i при $m < i \leqslant n$.

Произведение многочленов

это многочлен степени $k = n + m$, коэффициент c_i которого равен $\sum_{0 \leqslant j \leqslant i} a_j b_{i-j}$ для $0 \leqslant i \leqslant k$.

Деление с остатком

Пусть f и g — многочлены, причем многочлен g ненулевой.

Разделить f на g с остатком

значит представить f в виде

$$f = gh + r,$$

где $d_r < d_g$ либо r — нулевой многочлен.

- Многочлен f называется *делимым*,
- многочлен g называется *делителем*,
- многочлен h называется (*неполным*) *частным*,
- многочлен r называется *остатком*.

Единственность частного и остатка

Для любых многочленов f и $g \neq 0$ существует единственная пара многочленов h и r таких, что

$$f = gh + r,$$

где $d_r < d_g$ либо $r = 0$.

Единственность

если $f = gh' + r'$, то вычтем это равенство из предыдущего:

$$0 = g(h - h') + (r - r') = gH + R,$$

заметим, что при $H \neq 0$ из $d_{gH} = d_g + d_H > d_R$ следует, что $gH + R \neq 0$, заключим, что $H = 0$, т. е. $h = h'$, откуда $r = r'$.

Существование частного и остатка

Пусть $f = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, $g = b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m$, причем $n \geqslant m$ (иначе $h = 0$ и $r = f$).

- Заметим, что
$$g \cdot \frac{a_n}{b_m}x^{n-m} = a_nx^n + \dots,$$
- поэтому степень n_1 многочлена $f_1 = f - g \cdot \frac{a_n}{b_m}x^{n-m}$ меньше, чем n;
- если $f_1 = a_{01} + a_{11}x + \dots + a_{n_1 1}x^{n_1}$ и $n_1 \geqslant m$, то перейдем к многочлену $f_2 = f_1 - g \cdot \frac{a_{n_1}}{b_m}x^{n_1-m}$,
- и будем продолжать, пока не окажется, что $n_k < m$ для очередного многочлена f_k.
- Значит, $f_k = r$ и $h = \frac{a_n}{b_m}x^{n-m} + \frac{a_{n_1}}{b_m}x^{n_1-m} + \dots$.

Деление «столбиком»

$$
\begin{array}{rrrrrr|rrrr}
x^5 & +2x^4 & -3x^3 & +x^2 & +2x & -1 & x^2 & -2x & -2 & \\
\cline{7-10}
x^5 & -2x^4 & -2x^3 & & & & x^3 & +4x^2 & +7x & +23 \\
\cline{1-3}
 & 4x^4 & -x^3 & +x^2 & & & & & & \\
 & 4x^4 & -8x^3 & -8x^2 & & & & & & \\
\cline{2-4}
 & & 7x^3 & +9x^2 & +2x & & & & & \\
 & & 7x^3 & -14x^2 & -14x & & & & & \\
\cline{3-5}
 & & & 23x^2 & +16x & -1 & & & & \\
 & & & 23x^2 & -46x & -46 & & & & \\
\cline{4-6}
 & & & & 62x & +45 & & & &
\end{array}
$$

$$x^5+2x^4-3x^3+x^2+2x-1 = (x^2-2x-2)(\underbrace{x^3+4x^2+7x+23}_{h})+(\underbrace{62x+45}_{r})$$

Делимость и корни многочленов

Если $r = 0$,

то говорят, что f *делится на* g (без остатка) или g — *делитель* f.

Значение $f(u)$ многочлена при $x = u$

это число $a_0 + a_1u + a_2u^2 + \cdots + a_nu^n$.

Если $f(u) = 0$,

то говорят, что u — *корень* многочлена f.

Связь между делимостью и корнями:

число u является корнем многочлена f тогда и только тогда, когда f делится на $x - u$.

Теорема Безу

Теорема

Остаток от деления многочлена f на многочлен $x-u$ равен числу $f(u)$.

Доказательство теоремы

Представим

$$f = h(x-u) + r,$$

где $d_r = 0$ или $r = 0$, так как степень многочлена $x-u$ равна 1. Остается подставить u в представление: $f(u) = h(u)\cdot(u-u) + r = r$.

Следствие

Число u является корнем многочлена f тогда и только тогда, когда f делится на $x-u$.

Схема Горнера

- Разделим $f = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ на $x-u$:

$$f = (x-u)(b_0 + b_1x + \dots + b_{n-1}x^{n-1}) + f(u).$$

- Раскроем скобки и сгруппируем слагаемые при одинаковых степенях:

$$(f(u) - ub_0) + (b_0 - ub_1)x + (b_1 - ub_2)x^2 + \dots \\ \dots + (b_{n-2} - ub_{n-1})x^{n-1} + b_{n-1}x^n = f.$$

- Значит $b_{n-1} = a_n$, $b_{i-1} - ub_i = a_i$ при $0 < i < n$, $f(u) - ub_0 = a_0$.
- Получили способ последовательного нахождения коэффициентов b_i: начинаем с $b_{n-1} = a_n$ и находим $b_{i-1} = a_i + ub_i$, $r = a_0 + ub_0$.

Применение схемы Горнера

Разделим $3x^5 + 7x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 4x + 8$ на $x + 2$:

	3	7	4	5	4	8
-2	3	$7 + (-2) \cdot 3$=1	2	1	2	4

Значит,
$3x^5 + 7x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 4x + 8 = (x + 2) \cdot (3x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 2) + 4$

Разложение многочлена на множители

$x^5 - 7x^4 + 17x^3 - 19x^2 + 10x - 2$

- Попробуем найти *целые* корни среди делителей свободного коэффициента.
- Например, проверим $u = 1$:

	1	-7	17	-19	10	-2
1	1	-6	11	-8	2	0
1	1	-5	6	-2	0	
1	1	-4	2	0		

- Получили $x^5 - 7x^4 + 17x^3 - 19x^2 + 10x - 2 = (x-1)^3(x^2 - 4x + 2)$, а $x^2 - 4x + 2$ не имеет целых корней.
- Но он разлагается дальше: $(x - 2 - \sqrt{2})(x - 2 + \sqrt{2})$.

Разложение многочленов над $\mathbb{R}$

1. Многочлен степени n имеет не более n вещественных корней (с учетом их кратности).
2. Многочлен можно представить единственным образом (с точностью до перестановки сомножителей) в виде произведения своего старшего коэффициента, линейных многочленов вида $x - u$, где u — корень этого многочлена, и многочленов вида $x^2 + kx + m$, не имеющих вещественных корней.
3. Следовательно, многочлен нечетной степени имеет хотя бы один вещественный корень.