Уравнения прямой и плоскости в трехмерном пространстве

Рассматриваемые вопросы

1. Уравнения плоскости:
   - виды уравнений плоскости,
   - смысл коэффициентов в уравнениях,
   - взаимное расположение плоскостей.
2. Уравнения прямой:
   - виды уравнений прямой,
   - смысл коэффициентов в уравнениях,
   - взаимное расположение прямых.
3. Геометрические измерения:
   - измерение длин и углов,
   - расстояния между плоскостями (прямыми).

Обобщение уравнений прямых

- Уравнения прямой на плоскости:
  1. Общее $ax + by + c = 0$,
  2. каноническое $\dfrac{x - x_0}{p} = \dfrac{y - y_0}{q}$,
  3. параметрическое (векторное) $\{x = x_0 + pk,\ y = y_0 + qk : k \in \mathbb{R}\}$,
  4. с угловым коэффициентом $y = kx + m$,
  5. в отрезках $\dfrac{x}{u} + \dfrac{y}{v} = 1$,
  6. нормальное $x \cos\varphi + y \sin\varphi - p = 0$.
- Превратятся в уравнение плоскости в пространстве: (1), (5) и (6).
- Превратятся в уравнение прямой в пространстве: (2) и (3).

Чем определяются

плоскость:

- нормальным вектором,
- двумя «направляющими» векторами,
- тремя точками,
- отсекаемыми на осях отрезками,
- нормальным вектором и расстоянием до начала координат,

прямая:

- направляющим вектором,
- двумя точками,
- пересечением двух плоскостей.

Общее уравнение плоскости

Поверхность первого порядка

в трехмерном пространстве задается общим уравнением

$$ax + by + cz + d = 0$$

и может являться плоскостью и только ей.

Коэффициенты уравнения

$(a, b, c) = \vec{n}$ — координаты вектора нормали.

Построение

по заданной точке $M(x_0, y_0, z_0)$ и нормальному вектору $\vec{n} = (a, b, c)$:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

Нормальное уравнение

получается из общего:

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - p = 0.$$

Коэффициенты уравнения

p — расстояние от начала координат до плоскости, α, β и γ — углы между направлением нормального вектора, направленного из начала координат к плоскости, и координатными осями.

Расстояние от точки до плоскости

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

где $ax + by + cz + d = 0$ — общее уравнение плоскости, (x_0, y_0, z_0) — координаты точки.

Уравнения с «направляющими» векторами

По точке и двум векторам

Так как векторы $(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ лежат в одной плоскости, уравнение получается через смешанное произведение:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

По трем точкам

Выберем одну точку (x_0, y_0, z_0) и соединим векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ с двумя оставшимися.

Примеры построения

1. По точке $A(1, 3, 6)$ и нормальному вектору $\vec{n} = (-2, 1, -3)$:

$$-2(x - 1) + (y - 3) - 3(z - 6) = 0.$$

2. По точкам $A(1, 3, 6)$ и $B(5, 1, 4)$ и вектору $\vec{a} = (-1, 1, 3)$: найдем второй вектор $\vec{AB} = (4, -2, -2)$ и построим по любой точке (например, A) и двум векторам, т. е.

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y - 3 & z - 6 \\ -1 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Уравнение в отрезках

- Если $a, b, c, d \neq 0$, то плоскость пересекает все оси, причем не в начале координат.
- Пусть u, v и w — координаты по соответствующим осям точек пересечения плоскости с осями.
- Тогда
$$\frac{x}{u} + \frac{y}{v} + \frac{z}{w} = 1$$
представляет собой уравнение в отрезках (отсекаемых плоскостью на осях).

Взаимное расположение

Плоскости с уравнениями $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ и $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$

- совпадают, если их уравнения имеют одни и те же решения:
$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2};$$
- параллельные, если система их уравнений не имеет решений:
$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \neq \frac{d_1}{d_2};$$
- пересекаются в остальных случаях:
  - прямая пересечения — решение системы уравнений плоскостей,
  - угол между плоскостями — угол между нормальными векторами.

Уравнение прямой в пространстве

- Можно получить через уравнения плоскостей, пересекающихся по этой прямой.
- Если плоскости не параллельные (и не совпадают), то ранг системы их уравнений равен 2.
- Получаем систему из двух «полезных» уравнений с тремя неизвестными, одну неизвестную объявляем свободной, представляем общее решение как сумму частного решения неоднородной системы и общего решения однородной, построенного по ФСР из одного вектора.
- Получаем параметрическое (векторное) уравнение прямой:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Каноническое уравнение прямой

По направляющему вектору:

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = \frac{z - z_0}{r},$$

где (x_0, y_0, z_0) — точка прямой, (p, q, r) — направляющий вектор.

По двум точкам:

направляющий вектор соединяет эти точки.

По пересекающимся плоскостям

один из направляющих векторов — векторное произведение нормальных векторов этих плоскостей.

Углы и расстояния

- Угол между плоскостями равен углу между нормальными векторами.
- Угол между пересекающимися прямыми равен углу между направляющими векторами.
- Угол между плоскостью и прямой равен дополнению угла между нормальным вектором плоскости и направляющим вектором прямой до прямого угла.
- Расстояние между параллельными плоскостями равно расстоянию от любой точки одной плоскости до другой плоскости.

Использование произведений векторов

- Расстояние от точки $M(x_0, y_0, z_0)$ до прямой, проходящей через точку $N(x_1, y_1, z_1)$ параллельно вектору $\vec{l}$:

$$d = \frac{|[\vec{MN}, \vec{l}]|}{|\vec{l}|}.$$

- Расстояние между скрещивающимися прямыми, проходящими через точки M_1 и M_2 параллельно векторам $\vec{l}_1$ и $\vec{l}_2$ соответственно:

$$d = \frac{|(\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{M_1M_2})|}{|[\vec{l}_1, \vec{l}_2]|}.$$