Уравнение прямой на плоскости

Рассматриваемые вопросы

1. Уравнения прямой на плоскости:
   - что такое «уравнение линии»?
   - какие бывают уравнения прямой?
   - зачем их так много?
2. Измерение расстояний и углов:
   - какова длина отрезка?
   - под каким углом пересекаются прямые?
3. Другие линии в треугольнике:
   - как описать высоту и найти ее длину?
   - как описать медиану и биссектрису?

Длины сторон и углы

Расстояние между точками

если $A = (a_1, a_2)$ и $B = (b_1, b_2)$, то

$$|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}.$$

Угол между векторами

если $\vec{a} = (a_1, a_2)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2)$, то

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}.$$

Для других размерностей вычисления аналогичные.

Уравнение множества

Уравнение множества на плоскости

Уравнение

$$f(x, y) = 0 \tag{1}$$

с двумя переменными x и y называется уравнением множества S на плоскости, если

$$(x, y) \in S \iff f(x, y) = 0,$$

т. е. точка принадлежит множеству S тогда и только тогда, когда ее координаты удовлетворяют уравнению (1).

Уравнение множества в пространстве

определяется аналогично (f — функция трех переменных x, y и z).

Линии первого порядка

Определение

Пусть $f(x,y) = ax + by + c$ — многочлен первой степени, т. е. $a \neq 0$ или $b \neq 0$. Тогда множество точек, удовлетворяющих уравнению

$$f(x,y) = ax + by + c = 0 \qquad (2)$$

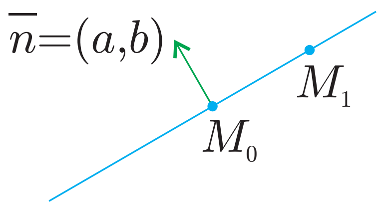
называется линией первого порядка.

Наблюдение

Множество точек плоскости является линией первого порядка тогда и только тогда, когда оно является прямой линией.

Общее уравнение прямой

Вектор $\vec{n} = (a,b)$, перпендикулярный прямой, называется нормальным вектором этой прямой.



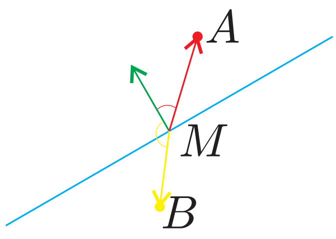
$ax + by + c = 0 = (\vec{n}, M_0\vec{M}_1)$

- Пусть $M_0 = (x_0, y_0)$ и $M_1 = (x,y)$.
- Тогда $(\vec{n}, M_0\vec{M}_1) = 0$
- $0 = a(x - x_0) + b(y - y_0) = ax + by + (-ax_0 - by_0)$.
- Пусть, наоборот, M_0 и M_1 удовлетворяет уравнению.
- Тогда $ax + by + c = 0$, $ax_0 + by_0 + c = 0$, откуда $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$,
- т. е. векторы $\vec{n}$ и $M_0\vec{M}_1$ перпендикулярные.

Простые следствия

Знаки $ax + by + c$:

- «$+$» для A,
- «$-$» для B,
- отсутствует для M.



Частные случаи

- $c = 0$: через $(0, 0)$;
- $a = 0$: параллельно Ox;
- $b = 0$: параллельно Oy.

Взаимное расположение прямых

Прямые с уравнениями $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ и $a_2x + b_2y + c_2 = 0$

- совпадают, если их уравнения имеют одни и те же решения:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \iff \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2};$$

- параллельные, если система их уравнений не имеет решений:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \neq \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} \iff \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2};$$

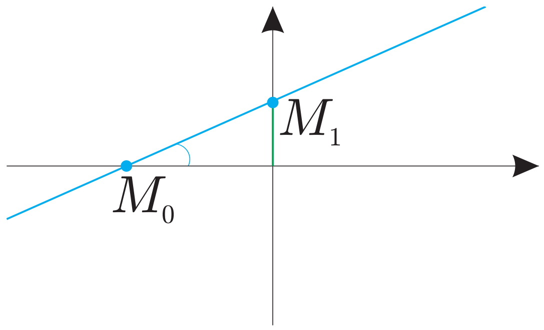
- пересекаются в остальных случаях:
  - точка пересечения — решение системы уравнений прямых,
  - угол между прямыми — это угол между нормальными векторами.

Другие уравнения прямой. I

Уравнение с угловым коэффициентом

Если $b \neq 0$, то

$$ax + by + c = 0 \iff y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} = kx + m.$$



- m — начальная ордината (y-координата точки M_1),
- k — угловой коэффициент $\operatorname{tg}\varphi = -\dfrac{-c/b}{-c/a}$.

Другие уравнения прямой. II

Каноническое уравнение

Если $M_0 = (x_0, y_0)$ и $M_1 = (x_1, y_1)$ — две точки прямой, то для любой точки $M = (x, y)$ этой же прямой $\vec{M_0M} = k\vec{M_0M_1}$ или

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = k. \tag{3}$$

- Если $x_1 - x_0 = 0$, то оно понимается как $x = x_0$;
- если $y_1 - y_0 = 0$, то оно понимается как $y = y_0$.

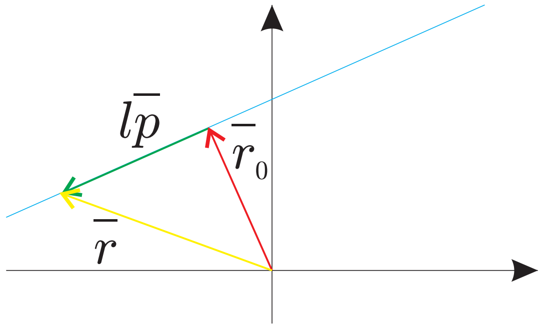
Вектор $\vec{M_0M_1} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0) = (p_1, p_2)$ называется направляющим вектором прямой.

Параметрические уравнения

$$x = x_0 + kp_1, \quad y = y_0 + kp_2 \quad (k \in \mathbb{R}). \tag{4}$$

Другие уравнения прямой. III

- $\vec{p}$ — направляющий вектор,
- $\vec{r_0}$ — радиус-вектор точки на прямой,
- $\vec{r}$ — радиус-вектор произвольной точки на прямой.



Векторное уравнение

$$\vec{r} = \vec{r_0} + l\vec{p} \quad (l \in \mathbb{R}). \tag{5}$$

Другие уравнения прямой. IV

Уравнение в отрезках

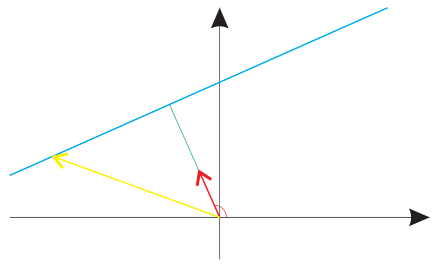
Пусть $a \neq 0$ и $b \neq 0$. Тогда прямая пересекает оси в точках $(0, u)$ и $(v, 0)$. Запишем ее каноническое уравнение по двум этим точкам и преобразуем:

$$\frac{x-0}{v-0} = \frac{y-u}{0-u} \iff -ux = v(y-u) \iff \frac{x}{v} + \frac{y}{u} = 1$$

Последнее равенство называется уравнением прямой в отрезках, так как u и v — отрезки, отсекаемые прямой на осях.

Другие уравнения прямой. V

- $M = (x, y)$ — точка прямой, $\vec{r}$ — ее радиус-вектор,
- $\vec{n}$ — вектор, проведенный из начала координат перпендикулярно к прямой и в ее сторону, $|\vec{n}| = 1$,
- p — расстояние от $(0, 0)$ до прямой.



Нормальное уравнение

Так как $(\vec{n}, \vec{r}) = \mathrm{p}_{\vec{n}}\vec{r} = p$, где $\vec{r} = (x, y)$ и $\vec{n} = (\cos\varphi, \sin\varphi)$, получаем

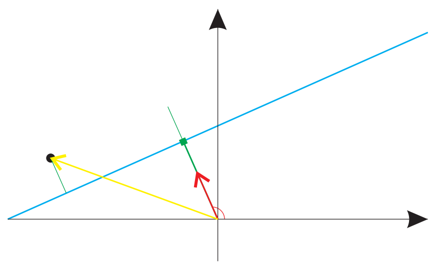
$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0. \tag{6}$$

Расстояние от точки до прямой

Если $ax + by + c = 0$ — общее уравнение прямой, то ее нормальное уравнение есть

$$\frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}x + \frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}y + \frac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}} = 0,$$

где знак $\pm\sqrt{a^2+b^2}$ выбирается противоположным знаку c.



Расстояние от точки с координатами (x_0, y_0) до этой прямой есть $|x_0\cos\varphi + y_0\sin\varphi - p|$ или

$$\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Длина и уравнение высоты

Длина высоты в треугольнике

это расстояние от вершины до противолежащей стороны

Уравнение высоты

строится как общее уравнение по точке (вершина треугольника) и нормальному вектору (направляющий вектор стороны).

Например, для $A(1,-2)$, $B(-2,3)$ и $C(0,2)$

- вектор $\vec{BC} = (2,-1)$ направляющий для BC, нормальный для AD;
- общее уравнение высоты: $2x - y - 4 = 0$;
- каноническое уравнение стороны превратим в общее: $x + 2y - 4 = 0$;
- по формуле расстояние от точки A до прямой BC равно $\frac{7}{\sqrt{5}}$.

Медиана

- Одна точка — вершина треугольника,
- вторая — середина противолежащей стороны:
- ее координаты — полусуммы координат вершин;
- уравнение строится как каноническое по двум точкам.

Например, для $A(1,-2)$, $B(-2,3)$ и $C(0,2)$

- $M(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ — середина стороны AB;
- $\vec{CM} = (-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$,
- $\dfrac{x}{-1/2} = \dfrac{y-2}{-3/2}$ — каноническое уравнение медианы CM.

Биссектриса

- Одна точка — вершина треугольника,
- направляющий вектор найдем как сумму единичных векторов, направленных по сторонам треугольника;
- уравнение строится как каноническое по точке и направляющему вектору.

Например, для $A(1,-2)$, $B(-2,3)$ и $C(0,2)$

- $\vec{AB}=(-3,5)$ и $\vec{AC}=(-1,4)$,
- перейдем к единичным векторам: $\left(-\frac{3}{\sqrt{34}},\frac{5}{\sqrt{34}}\right)$ и $\left(-\frac{1}{\sqrt{17}},\frac{4}{\sqrt{17}}\right)$;
- найдем их сумму: $\left(\frac{-3-\sqrt{2}}{34},\frac{5+4\sqrt{2}}{34}\right)$;
- строим уравнение: $\dfrac{x-1}{-3-\sqrt{2}}=\dfrac{y+2}{5+4\sqrt{2}}$.