Министерство образования и науки Российской Федерации
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

А. М. ИВЛЕВА, П. И. ПРИЛУЦКАЯ, И. Д. ЧЕРНЫХ

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА
АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Утверждено Редакционно-издательским советом университета в качестве учебного пособия

Издание четвертое, исправленное и дополненное

НОВОСИБИРСК
2014

УДК 512.64+512.12(075.8)
И 255

Рецензенты:
доцент *А.П. Ковалевский*,
доцент *Э.Б. Шварц*

Работа подготовлена на кафедре алгебры и математической логики НГТУ для студентов I курса всех факультетов и форм обучения

Ивлева А.М.
И 255 Линейная алгебра. Аналитическая геометрия : учеб. пособие / А.М. Ивлева, П.И. Прилуцкая, И.Д. Черных. – 4-е изд-е, испр. и доп. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2014. – 180 с.

ISBN 978-5-7782-2409-4

В пособии подобраны задачи по курсу линейной алгебры и аналитической геометрии, читаемому на I курсе всех факультетов НГТУ. Теоретический материал пособия и приведенные решения типовых задач способствуют лучшему усвоению материала, самостоятельной работе и приобретению навыков решения задач, необходимых для успешной подготовки к экзамену. Авторы не претендуют на абсолютно корректное изложение теоретического материала, упростив его для улучшения понимания.

УДК 512.64+512.12(075.8)

ISBN 978-5-7782-2409-4

Предисловие к четвертому изданию

Необходимость нового издания вызвана прежде всего тем, что задачников в библиотеке стало недостаточно. Кроме того, в процесс работы с книгой всегда выявляются все-таки допущенные опечатки и, главное, какие-то, по мнению авторов, требующие исправления недоработки. Поэтому новое издание не есть копия предыдушего. Нумерация и число глав и разделов сохранились, но некоторые разделы переработаны, дополнены и пополнены новыми задачами. За исключением раздела 1.2, новые задачи добавлены после уже имевшихся, чтобы по возможности сохранить нумерацию задач и преемственность изданий.

Основные изменения коснулись следующих разделов. В разделе 1.2 (комлексные числа) расширено теоретическое описание и добавлены новые задачи. Существенно переработан раздел 5.2: появились удобные сводные таблицы с различными уравнениями прямых и плоскостей, добавлено значительное число новых задач. Дополнен раздел 7.4 о жордановых формах.

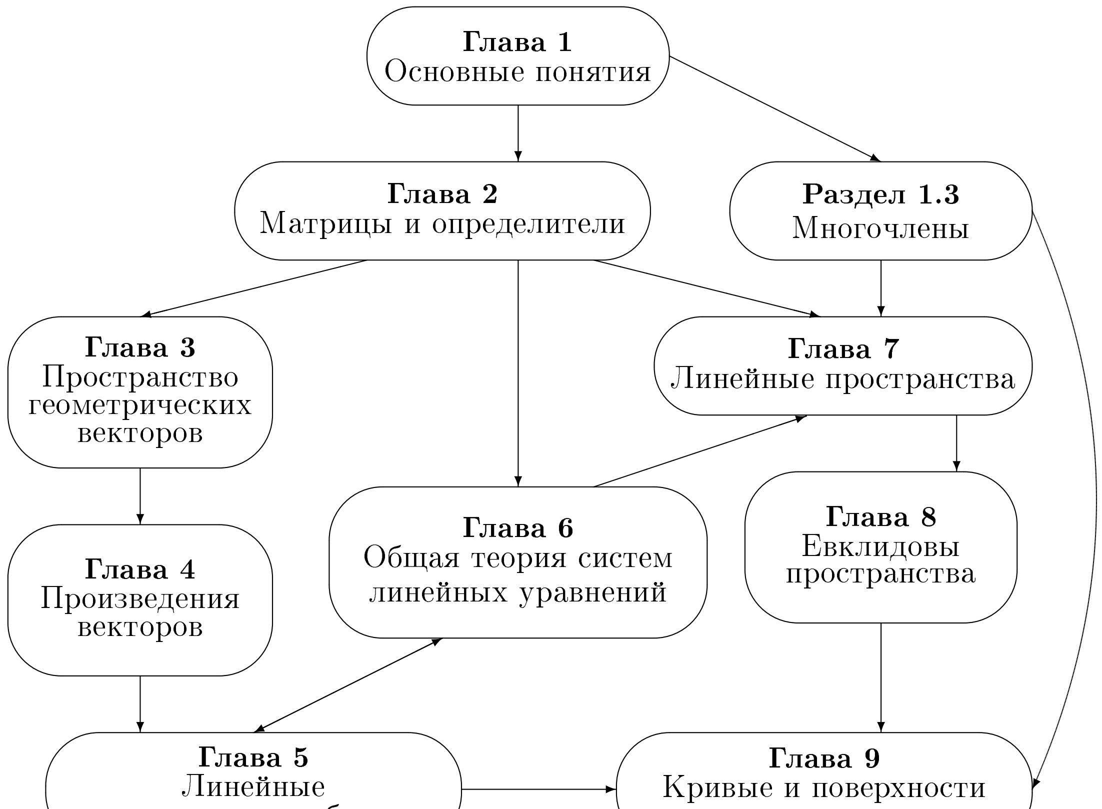
Все замеченные опечатки исправлены, но борьба с ними продолжается, и авторы по-прежнему будут признательны всем внимательным читателям, которые их заметят и доведут до сведения авторов.

Авторы, 2013

Предисловие к третьему изданию

Изначально это пособие задумывалось как сборник задач по основам линейной алгебры и аналитической геометрии, знакомство с которыми должен (по замыслу авторов) поддерживать любой уважающий себя студент НГТУ. По мере создания сборника возникла весьма продуктивная идея — в начале каждого раздела поместить минимум теоретических сведений, а также примеры решения задач. Опять-таки по замыслу авторов, это должно способствовать выработке студентами навыков, необходимых для решения задач и по возможности успешной сдачи экзамена. В результате внедрения этой идеи и ее развития (в сторону увеличения упомянутого выше “минимума”) объем книги вырос более чем вдвое, что, в частности, позволило именовать ее уже не просто сборником задач, а учебным пособием.

Структура этого пособия и связи между разделами изображены на следующей схеме. В главе 1 вводятся некоторые базовые понятия современной математики (множества, числовые поля, многочлены), без кото-



рых дальнейшее плавание в морях линейной алгебры является если не совсем невозможным, то уж наверняка чрезвычайно затруднительным. Конечно, эти разделы представляют известный интерес и сами по себе в чистом виде. К сожалению, мы не имеем возможности рассмотреть их подробнее, поэтому глава 1 содержит лишь совершенно необходимые “основы основ”. В главе 2 читатель знакомится с понятиями матрицы и определителя, а также систем линейных уравнений, которые также являются базовыми и необходимыми. Эти понятия по сути своей не сложны, хотя обычно при их изучении возникают определенные затруднения, связанные с некоторой необычностью и непривычностью материала. Поверьте, эта необычность вполне оправданна, что станет понятно при дальнейшем изучении линейной алгебры и многих других наук. В главах 3–4 содержатся важные сведения из жизни геометрических векторов, в главе 5 описываются кривые и поверхности первого порядка, т. е. прямые и плоскости. Глава 6 завершает ознакомление читателя с системами линейных уравнений. Заметим, что ее можно читать непосредственно после второй. Последние главы 7–9 начинают знакомство читателя с тем, что на самом деле и называется линейной алгеброй. Это понятия линейного оператора, линейного и евклидова пространства, квадратичной формы, а также некоторые их приложения. К этим главам рекомендуется приступать только после освоения материала предыдущих глав.

Каждая глава содержит примеры решения типовых задач; решения заканчиваются квадратиком ($\blacksquare$) в конце. Новые термины, определяемые в тексте, выделяются *курсивом.* Значок $\doteq$, встречающийся в тексте, следует читать “равно по определению” или “положим по определению”. Равенства или условия, объединенные фигурной скобкой, считаются выполненными одновременно, тогда как если они объединены квадратной скобкой, это означает, что должно выполняться, по крайней мере, одно из них. **Жирным** шрифтом в тексте выделяются ключевые слова, на которые следует обратить особое внимание. Кроме того, для облегчения усвоения материала текст снабжен многочисленными сносками. Помимо традиционных сносок[1], содержащих некоторые замечания к тексту, читатель встретит еще сноски другого типа. Они как нельзя более серьезны и содержат сложные примеры, замечания и углубленные разъяснения, которые можно пропустить при первом (а иногда и при втором) чтении. Такие сноски выделяются **жирным шрифтом[2]** . Задачи повышенной сложности помечаются звездочкой.

---

[1]Постарайтесь не путать номер сноски с верхним индексом.

[2]Не расстраивайтесь, если вам не все понятно в сноске такого вида.

Осталось только пожелать успехов в изучении этой серьезной науки, что мы и делаем. Надеемся, что это пособие действительно поможет вам в достижении этой цели. Удачи!

Авторы, 2006

Глава 1

Основные понятия

1.1. Множества

Множеством мы будем называть любую совокупность произвольных объектов. Объекты, входящие в множество, называются его *элементами.* Запись $a \in A$ ($a \notin A$) означает: элемент a принадлежит (не принадлежит) множеству A.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым* и обозначается символом $\emptyset$.

Множество, содержащее все элементы рассматриваемых в данном контексте множеств, называется *универсальным*[1] и обозначается U.

Обозначения множеств: $A = \{x_1, \ldots, x_n\}$ — множество A состоит из элементов $x_1, \ldots, x_n$; $A = \{x \in M | \alpha(x)\}$ — множество A состоит из элементов x множества M, обладающих свойством $\alpha(x)$.

Пример 1. $A = \{x | x = 2n, n \in \mathbb{Z}\}$ — множество четных чисел. ■

Кванторы всеобщности и существования

Часто математические утверждения бывает удобно записывать с помощью специальных значков — *кванторов. Квантор всеобщности* выглядит так: $\forall$ и читается “для любого”. *Квантор существования* ($\exists$) читается “существует”. Если в цепочке кванторов встречается символ $|$, его следует читать “такой(-ая,-ое), что”.

Кванторы используются следующим образом:

$\forall x \in M\Big(\alpha(x)\Big)$: *для любого элемента* x из множества M справедливо свойство $\alpha(x)$.

$\exists x \in M\Big(\beta(x)\Big)$: *существует элемент* x из множества M, для которого верно свойство $\beta(x)$.

$\exists! x \in M\Big(\beta(x)\Big)$: *существует единственный элемент* x из множества M, для которого выполняется свойство $\beta(x)$.

---

[1] **Можно было бы, конечно, определить U как множество ВСЕХ элементов, но такое определение с точки зрения аксиоматической теории множеств некорректно, поскольку приводит к знаменитому парадоксу Б. Рассела.**

Пример 2. Выражение $\exists M > 0 | \forall x \in D\Big(f(x) < M\Big)$ читается следующим образом: *существует число $M > 0$ такое, что для любого элемента x множества D выполняется $f(x) < M$.* ■

Множество A называется *подмножеством* множества B, если $\forall x \in A\Big(x \in B\Big)$. Обозначение: $A \subseteq B$.

Множества A и B называются *равными*[2] , если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$. Обозначение: $A = B$.

Если $A \subseteq B$ и $A \neq B$, пишем $A \subset B$.

Операции над множествами

Объединением (*суммой*) множеств A и B называется множество, содержащее как элементы A, так и элементы B:

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ или } x \in B\}.$$

Пересечением (*произведением*) множеств A и B называется множество, содержащее только элементы, принадлежащие A и B одновременно:

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ и } x \in B\}.$$

Разностью множеств A и B называется множество, содержащее элементы A и не содержащее элементы B:

$$A \setminus B = \{x | x \in A \text{ и } x \notin B\}.$$

Дополнением множества A называется множество, содержащее все элементы универсального множества U, кроме элементов A:

$$\overline{A} = U \setminus A = \{x | x \notin A\}.$$

Декартовым произведением множеств A и B называется следующее множество упорядоченных пар:

$$A \times B = \{\langle x, y\rangle | x \in A \text{ и } y \in B\}.$$

Здесь и в дальнейшем с помощью треугольных скобок мы будем обозначать как раз *упорядоченные* наборы.

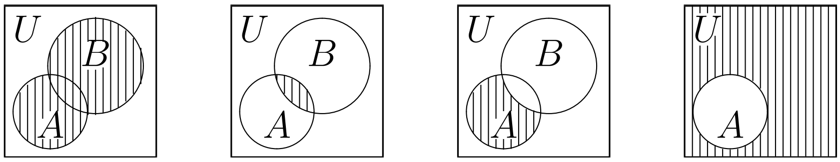
---

[2]**Разумеется, если A и B — конечные множества, то их равенство означает, что они содержат одни и те же элементы. Хотя это же верно и для бесконечных множеств, для последних поэлементное сравнение не представляется возможным. Приведенное определение корректно для любых множеств.**

Декартово произведение $A \times A$ обозначают также A^2, $A \times A \times A = A^3$ и т. д.[3]

Диаграммы Эйлера—Венна

Операции над множествами удобно для наглядности демонстрировать на так называемых диаграммах Эйлера—Венна. На них универсальное множество U ассоциируется с множеством точек квадрата, а рассматриваемые множества — с его подмножествами, традиционно изображаемыми в виде кругов.



$A \cup B$ $\quad$ $A \cap B$ $\quad$ $A \setminus B$ $\quad$ $\overline{A}$

Числовые множества

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ — множество натуральных чисел.

$\forall x, y \in \mathbb{N}\Big(x + y \in \mathbb{N}, x \cdot y \in \mathbb{N}\Big)$ (говорят, что $\mathbb{N}$ *замкнуто* относительно операций сложения и умножения).

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ — множество целых чисел.

$\forall x, y \in \mathbb{Z}\Big(x + y \in \mathbb{Z}, x - y \in \mathbb{Z}, x \cdot y \in \mathbb{Z}\Big)$, т. е. $\mathbb{Z}$ замкнуто уже относительно сложения, умножения и вычитания.

$\mathbb{Q} = \{x | x = \dfrac{p}{q}, p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$ — множество рациональных чисел.

$\Im$ — множество иррациональных чисел, элементы которого представляются бесконечными непериодическими десятичными дробями.

$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \Im$ — множество вещественных (или действительных) чисел.

Если $\mathbb{P}$ — любое числовое множество, то $\mathbb{P}^+$ обозначает множество всех неотрицательных чисел из $\mathbb{P}$, а $\mathbb{P}^*$ — множество всех ненулевых чисел из $\mathbb{P}$:

$$\mathbb{P}^+ = \{x \in \mathbb{P} | x \geq 0\}, \ \mathbb{P}^* = \mathbb{P} \setminus \{0\}.$$

Выполняются следующие вложения:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

---

[3] **На самом деле, если подходить формально, декартово произведение не является ассоциативным, т. е.** $A \times (B \times C) \neq (A \times B) \times C$. **Но давайте считать, что** $A \times B \times C$ **— это множество упорядоченных троек,** $A \times B \times C \times D$ **— множество упорядоченных четверок и т. д. Это даст нам законное основание писать** $A^n \, \forall n \geq 2$.

Пример 3. Доказать тождество $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Решение

а) Докажем, что если $x \in \overline{A \cap B}$, то $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$.

$\underline{x \in \overline{A \cap B}} \Rightarrow x \in U$ и $x \notin A \cap B \Rightarrow x \notin A$ или $x \notin B \Rightarrow$ $x \in \overline{A}$ или $x \in \overline{B} \Rightarrow \underline{x \in \overline{A} \cup \overline{B}}$,

таким образом, $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$.

б) Докажем, что если $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$, то $x \in \overline{A \cap B}$.

$\underline{x \in \overline{A} \cup \overline{B}} \Rightarrow x \notin A$ или $x \notin B \Rightarrow x \notin A \cap B \Rightarrow \underline{x \in \overline{A \cap B}}$, таким образом, $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cap B}$ и, следовательно, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, что и требовалось доказать. ■

1.1. Задачи

1. Перечислите элементы множеств:

а) $A = \{x \in \mathbb{N} | x^2 - 3x - 4 \leq 0\}$;

б) $B = \left\{x \in \mathbb{Z} \left| \frac{1}{4} \leq 2^x < 5 \right.\right\}$;

в) $A \cup B$; г) $A \cap B$; д) $A \setminus B$; е) $B \setminus A$.

2. Даны множества: $A = (-1, 2]$; $B = [1, 4)$. Найдите множества:

а) $A \cup B$; б) $A \cap B$; в) $A \setminus B$; г) $B \setminus A$.

3. Изобразите на координатной плоскости множества:

а) $\{(x, y) | x^2 - y^2 > 0; x, y \in \mathbb{R}\}$;

б) $\{(x, y) | y^2 \geq 2x + 1,\ x, y \in \mathbb{R}\}$.

4. Перечислите элементы декартова произведения множеств A и B, если $A = \{1, 2, 4\}$, $B = \{a, b\}$.

5. Даны множества: $A = \{x \in \mathbb{Z} | x^2 - 2x - 15 \leq 0\}$, $B = \{2x | x \in \mathbb{Z}\}$, $C = \{2x + 1 | x \in \mathbb{Z}\}$. Перечислите элементы множеств A, $A \cap B$, $A \cap C$, $A \setminus B$, $A \setminus C$, $B \cup C$, $B \cap C$.

6. Докажите следующие тождества, используя только определения операций над множествами:

а) $A \setminus B = A \cap \overline{B}$;

б) $B \cap (A \setminus B) = \emptyset$;

в) $B \cup (A \setminus B) = A \cup B$;

г) $A \cup \overline{A} = U$;

д) $A \cap \overline{A} = \emptyset$.

Проиллюстрируйте их с помощью диаграмм Эйлера—Венна[4] .

7. Перечислите все подмножества множества A:

а) $A = \{\{1, 2\}, \{3\}, 1\}$;

б) $A = \{\{1\}, \{2\}, 1, 2\}$.

---

[4]**Заметим, что саму иллюстрацию с помощью диаграмм Эйлера—Венна никак нельзя считать доказательством, она служит только для наглядности.**

1.2. Комплексные числа. Числовые поля

Мнимой единицей называется число i такое, что $i^2 = -1$.

Комплексным числом в алгебраической форме называется число вида $\underline{z = x + iy}$, где x, y — произвольные действительные числа, при этом

$x = \operatorname{Re} z$ — *действительная часть* комплексного числа,

$y = \operatorname{Im} z$ — *мнимая часть* комплексного числа.

Вещественное число можно рассматривать как комплексное число с нулевой мнимой частью. Таким образом, множество вещественных чисел $\mathbb{R}$ является подмножеством множества комплексных чисел, которое обозначается $\mathbb{C}$. Иногда рассматривают также комплексные числа с нулевой вещественной частью. Такие числа называются *чисто мнимыми*.

Таким образом, имеем следующую цепочку числовых множеств:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Операции над комплексными числами в алгебраической форме

1) *Сложение*:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

Пример 4. $(2 + 3i) + (5 - 2i) = 7 + i$. ■

2) *Умножение*:

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + iy_1x_2 + ix_1y_2 + i^2y_1y_2 =$$

$$= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1).$$

$i^2 = -1; i^3 = -1i = -i; i^4 = 1, \ldots, i^n = i^{4k}i^r = i^r$, где $n = 4k + r$ и $r \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Пример 5. $i^{103} = i^{100}i^3 = i^3 = -i$. ■

Комплексные числа $z = x+iy$ и $\overline{z} = x-iy$ называются *сопряженными* (или *комплексно сопряженными*). Заметим, что произведение взаимно сопряженных чисел всегда есть число вещественное (и даже неотрицательное):

$z \cdot \overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 \in \mathbb{R}^+$.

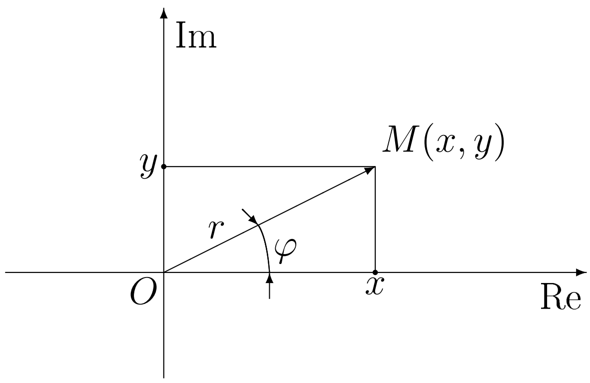
3) *Деление*[5]:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x+iy}{u+iv}=\frac{(x+iy)\,(u-iv)}{(u+iv)\,(u-iv)}=\frac{xu+iyu-ixv-i^2yv}{u^2+v^2}=$$
$$=\frac{xu+yv}{u^2+v^2}+i\frac{yu-xv}{u^2+v^2}.$$

Между множеством комплексных чисел и плоскостью xOy легко установить взаимно однозначное соответствие: каждому комплексному числу $z=x+iy$ ставится в соответствие точка $M(x,y)$, радиус-вектор $\overline{OM}$ которой называется *геометрическим представлением комплексного числа* z.

Плоскость xOy, на которой изображаются комплексные числа, называется *комплексной плоскостью*, ось Ox — *действительной осью* (и поэтому обозначается Re), Oy — *мнимой осью* (и обозначается Im).

Пусть $M(x,y)$ — точка комплексной плоскости. Обозначим:
$|\overline{OM}|=r; (\widehat{\overline{OM},Ox})=\varphi$.



Число $r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{z\bar{z}}$ называется *модулем* комплексного числа $z=x+iy$ и обозначается $|z|$.

Угол φ, на который нужно повернуть положительное направление оси Ox против часовой стрелки до совмещения ее с $\overline{OM}$, называется *аргументом*[6] комплексного числа z и обозначается $\text{Arg } z$. Как и любой угол, $\text{Arg } z$ определяется не однозначно, а с точностью до целого числа оборотов $2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. Значение $-\pi<\text{Arg } z\le\pi$ называется *главным значением* аргумента и обозначается $\arg\ z$.

Если $\varphi=\text{Arg } z$, то справедливы равенства:

$$\cos\varphi=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}};\quad \sin\varphi=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}};$$

[5]На практике не стоит, конечно, запоминать эту громоздкую формулу. Запомните лучше сам метод: для того чтобы избавиться от комплексного знаменателя, следует умножить числитель и знаменатель на число, сопряженное знаменателю, что и было проделано при выводе этой формулы.

[6]Аргумент всегда измеряется в радианах.

$$x = r\cos\varphi; \quad y = r\sin\varphi.$$

При подстановке двух последних равенств в алгебраическую форму получается

$z = x + iy = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = \underline{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}$ — *тригонометрическая форма комплексного числа.*

Обозначим: $\underline{\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}}$ — формула Эйлера.

С учетом этой формулы получается

$\underline{z = re^{i\varphi}}$ — *показательная форма комплексного числа.*

Пример 6. Записать комплексное число $z = 1 - i$ в тригонометрической и показательной формах.

Решение. Находим $r = \sqrt{2}$, $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\varphi = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, откуда $\varphi = -\frac{\pi}{4}$. Заметим, что одного только равенства $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ недостаточно для нахождения аргумента, поскольку уравнение вида $\cos x = a$ может иметь два решения из $(-\pi, \pi]$.

Теперь получаем:

$z = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$ — тригонометрическая форма,

$z = \sqrt{2}\cdot e^{-\frac{\pi}{4}i}$ — показательная форма. ■

Операции над комплексными числами
в тригонометрической и показательной формах

Пусть $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) = r_1e^{i\varphi_1}$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = r_2e^{i\varphi_2}$, а $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

1) *Умножение*:

$z_1z_2 = r_1r_2\Big(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\Big)$, или $z_1z_2 = r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$.

2) *Деление*:

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\Big(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\Big)$, или $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$.

3) *Возведение в степень*:

$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = r^ne^{in\varphi}$ — формула Муавра.

4) *Извлечение корня*:

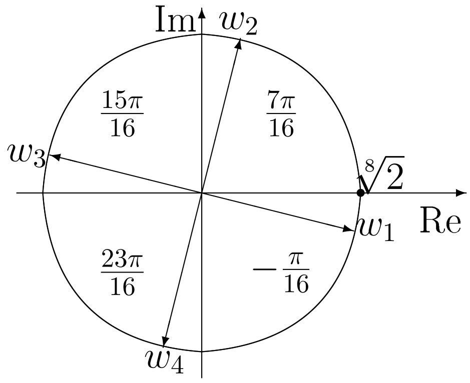
$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\Big(\cos\dfrac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{\varphi + 2k\pi}{n}\Big) = \sqrt[n]{r}\cdot e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}}$, где $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Пример 7. Выполните следующие действия:

1) $(1-i)^8 = \left(\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}\right)^8 = 16e^{-2\pi i} = 16\Big(\cos(-2\pi) + i\sin(-2\pi)\Big) = \underline{16}$. ■

2) $\sqrt[4]{1-i} = \sqrt[4]{\sqrt{2}\cdot e^{-\frac{\pi}{4}i}} = \sqrt[8]{2}\cdot e^{\frac{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}i}$;

$$(k=0)\ w_1 = \sqrt[4]{1-i} = \sqrt[8]{2}\cdot e^{-\frac{\pi}{16}i} = \sqrt[8]{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{16}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{16}\right)\right);$$
$$(k=1)\ w_2 = \sqrt[4]{1-i} = \sqrt[8]{2}\cdot e^{\frac{7\pi}{16}i} = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{16} + i\sin\frac{7\pi}{16}\right);$$
$$(k=2)\ w_3 = \sqrt[4]{1-i} = \sqrt[8]{2}\cdot e^{\frac{15\pi}{16}i} = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{15\pi}{16} + i\sin\frac{15\pi}{16}\right);$$
$$(k=3)\ w_4 = \sqrt[4]{1-i} = \sqrt[8]{2}\cdot e^{\frac{23\pi}{16}i} = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{23\pi}{16} + i\sin\frac{23\pi}{16}\right).$$



■

Особые случаи: аргумент произведения, частного и суммы

При использовании формулы Муавра для возведения комплексного числа в степень или извлечения из него корня основная проблема — записать число в тригонометрической форме, т. е. найти его модуль и аргумент. Если число задано в алгебраической форме, то с нахождением модуля проблем не возникает (напоминаем, что модуль комплексного числа равен корню квадратному из суммы квадратов вещественной и мнимой частей числа). Несложно также определить значения синуса и косинуса аргумента. Но для эффективного использования формулы Муавра нам требуется точное значение аргумента, нахождение которого может быть затруднительно, если значения косинуса и синуса не табличные. Ниже приводится несколько полезных примеров решения этой проблемы в некоторых особых случаях.

Пример 8. Найти значение выражения z^{12}, где $z = (1+i)(1+i\sqrt{3})$.

Решение. Давайте сначала попробуем перемножить числа $(1+i)$ и $(1+i\sqrt{3})$:

$$(1+i)(1+i\sqrt{3}) = 1 + i + i\sqrt{3} - \sqrt{3} = (1-\sqrt{3}) + i(1+\sqrt{3}).$$

Модуль этого произведения равен

$$r = \sqrt{(1-\sqrt{3})^2 + (1+\sqrt{3})^2} = \sqrt{1 - 2\sqrt{3} + 3 + 1 + 2\sqrt{3} + 3} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

Для нахождения аргумента φ найдем его косинус и синус:

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, \\ \sin\varphi = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Как видим, значения косинуса и синуса не табличные, точное значения аргумента вычислить затруднительно. Заметим, что модули и аргументы множителей $z_1 = 1 + i$ и $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$ найти несложно:

$$r_1 = |z_1| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2};\ \cos\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \sin\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}};\ \varphi_1 = \frac{\pi}{4};$$

$$r_2 = |z_2| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2;\ \cos\varphi_2 = \frac{1}{2},\ \sin\varphi_2 = \frac{\sqrt{3}}{2};\ \varphi_1 = \frac{\pi}{3}.$$

Теперь мы могли бы независимо возвести каждый из сомножителей в двенадцатую степень и перемножить результаты, но мы пойдем другим путем. Вспомним, что модуль произведения равен произведению модулей, а аргумент произведения равен *сумме* аргументов. Таким образом,

$$r = |z| = 2\sqrt{2},\ \varphi = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{12}.$$

В итоге имеем

$$z^{12} = \left[2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)\right]^{12} = (\sqrt{8})^{12}\left(\cos 7\pi + i\sin 7\pi\right) =$$

$$= 2^{18}(-1 + i\cdot 0) = -2^{18}. \qquad \blacksquare$$

Пример 9. Найти значение выражения z^{27}, где $z = \dfrac{-\sqrt{3}+i}{1+i}$.

Решение. Аналогично предыдущему примеру, если представить число z в алгебраической форме и попытаться перевести в тригонометрическую форму, то значения косинуса и синуса аргумента окажутся не табличными. С другой стороны, числитель и знаменатель дроби такой проблемы не вызывают. Обозначив числитель через z_1 и знаменатель через z_2, получим

$$r_1 = |z_1| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = 2;\ \cos\varphi_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin\varphi_1 = \frac{1}{2};,\ \varphi_1 = \frac{5\pi}{6};$$

$$r_2 = |z_2| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2};\ \cos\varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \sin\varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}};,\ \varphi_2 = \frac{\pi}{4}.$$

Вспомнив, что модуль частного равен частному модулей, а аргумент частного равен *разности* аргументов, получим

$$|z| = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2},\ \arg z = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{12}.$$

Теперь можно применить формулу Муавра:

$$z^{27} = \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)\right]^{27} = (\sqrt{2})^{27}\left(\cos\frac{27\cdot 7\pi}{12} + i\sin\frac{27\cdot 7\pi}{12}\right) =$$

$$= (\sqrt{2})^{27}\left(\cos\frac{63\pi}{4} + i\sin\frac{63\pi}{4}\right) = 2^{13}\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2^{13}(1-i). \qquad \blacksquare$$

Пример 10. Вычислить значение выражения $(\sqrt{2}+1+i)^8$.

Решение. Найдем модуль числа в скобках: $r = \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2+1^2} = \sqrt{4+2\sqrt{2}}$. Значения косинуса и синуса аргумента опять не табличные. Представим число в скобках в виде суммы двух чисел: $z_1 = \sqrt{2}$ и $z_2 = 1+i$. Про эти два числа можно заметить следующее:

а) их модули совпадают:

$$|z_1| = \sqrt{\sqrt{2}^2 + 0^2} = \sqrt{2};\ \ |z_2| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2};$$

б) их аргументы легко определить (значения косинуса и синуса получаются табличными):

$$\cos\varphi_1 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1;\ \sin\varphi_1 = \frac{0}{\sqrt{2}} = 0;\ \varphi_1 = 0;$$

$$\cos\varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}};\ \sin\varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}};\ \varphi_2 = \frac{\pi}{4}.$$

В этой ситуации для нахождения аргумента их суммы можно применить следующие геометрические соображения. Рассмотрим геометрическое представление этих чисел в виде векторов на комплексной плоскости (рис. 1.1, а). Тогда геометрическое представление их суммы будет совпадать с суммой соответствующих векторов. Изобразим эту сумму по правилу параллелограмма (рис. 1.1, б).

Поскольку данный параллелограмм является ромбом (так как модули z_1 и z_2 совпадают), его диагональ будет биссектриссой соответствующего угла. Таким образом, $\varphi = \frac{1}{2}\varphi_2 = \frac{\pi}{8}$.

Теперь можем применить формулу Муавра:

$$(z_1+z_2)^8 = \left[\sqrt{4+2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)\right]^8 = \left(\sqrt{4+2\sqrt{2}}\right)^8(\cos\pi + i\sin\pi) =$$

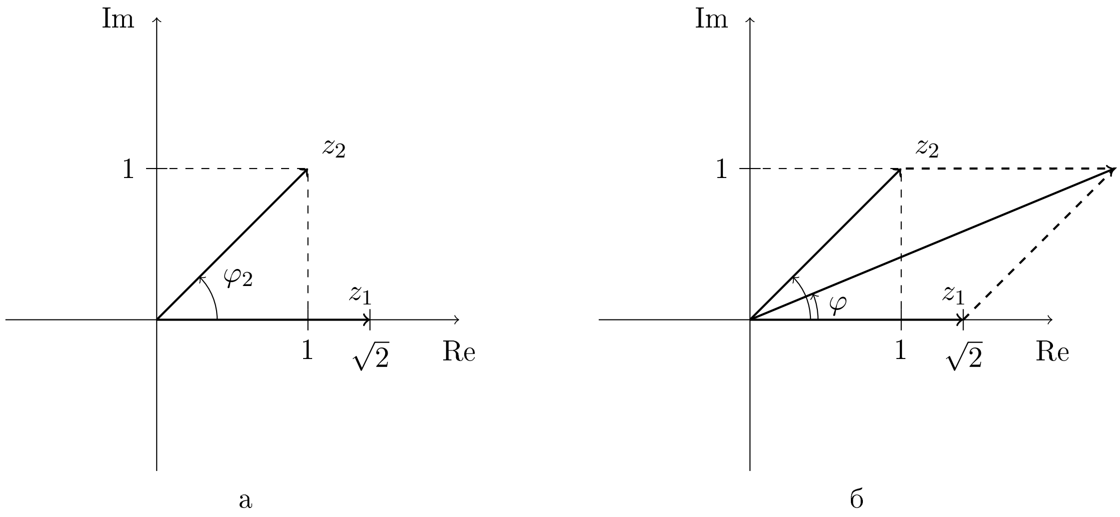
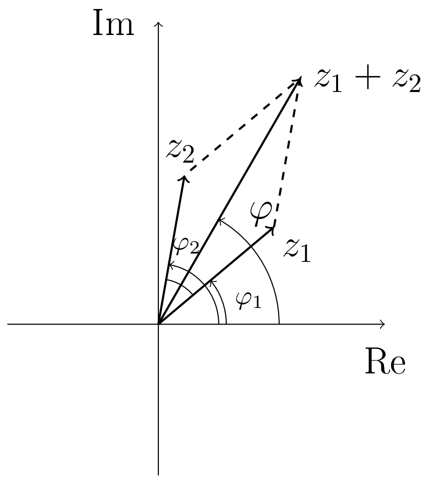


Рис. 1.1: Вспомогательные построения для примера 10.

$$= (4 + 2\sqrt{2})^4(-1 + 0) = -(4 + 2\sqrt{2})^4. \qquad \blacksquare$$

Заметим, что аналогичные геометрические рассуждения можно применять для нахождения аргумента φ суммы двух чисел z_1 и z_2 с равными модулями (и известными аргументами φ_1 и φ_2):

$$\text{если } |z_1| = |z_2|, \text{ то } \varphi = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}.$$



Понятие поля

Пусть задано некоторое множество F, про элементы которого мы не делаем никаких предположений. Пусть на множестве F заданы две бинарные операции, которые традиционно называем сложением и умножением, хотя опять-таки не делаем никаких предположений об устройстве этих операций:

$$\forall x,\, y \in F\, (\exists (x + y) \in F);$$

$$\forall x,\, y \in F\, (\exists (x \cdot y) \in F),$$

т. е. опять говорим, что множество F замкнуто относительно операций сложения и умножения.

Обозначим множество F в совокупности с операциями $+$, $\cdot$ следующим образом: $\mathcal{F} = \langle F;\, +,\, \cdot \rangle$, при этом F называется *носителем* $\mathcal{F}$.

Говорим, что $\mathcal{F}$ является *полем* (или F с операциями $+$, $\cdot$ образует *поле*), если выполняются следующие девять *аксиом поля*:

1) $\forall x,\, y,\, z \in F\Big((x+y)+z = x+(y+z)\Big)$ — *ассоциативность* сложения;
2) $\exists 0 \in F\Big(\forall x \in F(x + 0 = 0 + x = x)\Big)$ — существование нуля;
3) $\forall x \in F\Big(\exists(-x) \in F\,(x + (-x) = (-x) + x = 0)\Big)$ — существование противоположного элемента;
4) $\forall x, y \in F\Big(x + y = y + x\Big)$ — *коммутативность* сложения;
5) $\forall x, y, z \in F\Big((x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)\Big)$ — *ассоциативность* умножения;
6) $\exists 1 \in F\Big(\forall x \in F\,(x \cdot 1 = 1 \cdot x = x)\Big)$ — существование единицы;
7) $\forall x,\ y \in F\Big(x \cdot y = y \cdot x\Big)$ — *коммутативность* умножения;
8) $\forall x \in F \setminus \{0\}\Big(\exists x^{-1} \in F\,(x \cdot x^{-1} = 1)\Big)$ — существование обратного элемента;
9) $\forall x,\ y,\ z \in F\Big((x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z\Big)$ — *дистрибутивность*.

Если хотя бы одна из аксиом не выполняется, то $\mathcal{F}$ не является полем.

Пример 11. Из числовых множеств $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}$ не являются полями[7] , а $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ с естественными операциями сложения и умножения образуют поля. Числовые множества, являющиеся полями (т.е. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$), называются *числовыми полями.* ■

1.2. Задачи

1. Выполните операции: а) $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^3$; б) $\left(\dfrac{i^5+2}{i^{11}+1}\right)^2$;

в) $\dfrac{(1+3i^5)(8-i^{17})}{(2+i)^2}$; г) $\dfrac{(2+i)(4+i)(13+i)}{1+i^5}$; д) $\left(\dfrac{(5+i)(7-6i)}{3+i}\right)^2$.

[7]**Покажите, что в множестве $\mathbb{N}$ не выполняется аксиома 3, а в $\mathbb{Z}$ — аксиома 8.**

2. Представьте комплексные числа в тригонометрической и показательной форме, изобразите точками на комплексной плоскости:

а) -2; б) $3i$; в) 4; г) $1-i\sqrt{3}$; д) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{i}{2}$; е) $\dfrac{1-i}{1+i}$.

3. Даны числа $z_1 = 1-i\sqrt{3}$; $z_2 = \sqrt{3}+i$. Вычислите:

$$\text{а) } \left(\frac{\overline{z_1}}{z_2}\right)^2; \quad \text{б) } \overline{z_1 \cdot z_2}; \quad \text{в) } \frac{z_1}{z_2} - \frac{z_1}{\overline{z_2}}.$$

4. Вычислите, используя формулу Муавра. Ответ запишите в алгебраической форме:

а) $(1+i)^{27}$;

б) $(2\sqrt{2}-2\sqrt{6}\cdot i)^{24}$;

в) $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}+i(\sqrt{3}-1)}{1+i\sqrt{3}}\right)^{20}$;

г) $2(1+\sqrt{3}\cdot i)^8 - 32(1+\sqrt{3}\cdot i)^4 + 128(1+\sqrt{3}\cdot i)^2$.

5. Найдите значения выражений, используя формулу Муавра. Ответ запишите в алгебраической форме:

а) $\left(1+\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)^{32}$;

б) $\left((2+\sqrt{3})i-1\right)^{12}$;

в) $\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{i}{2}\right)^{27}$;

6. Найдите корни из комплексных чисел. Ответы запишите в алгебраической форме и изобразите точками на комплексной плоскости:

а) $\sqrt{1}$; б) $\sqrt[3]{1}$; в) $\sqrt[4]{1}$; г) $\sqrt[3]{-64i}$; д) $\sqrt{1-i}$; е) $\sqrt[4]{-4}$; ж) $\sqrt[3]{i}$; з) $\sqrt[3]{\dfrac{8+24i}{3-i}}$; и) $\sqrt[6]{1}$.

7. Постройте множества точек на комплексной плоскости:

а) $|z| \le 3$; б) $2 \le |z| \le 3$; в) $\dfrac{\pi}{2} < \varphi < \pi$; г) $-\dfrac{\pi}{3} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{3}$;

д) $|z-z_0| \le r$; е) $|z-2i| < 1$.

8. При каком $n \in \mathbb{N}$ число $(1+i)^{6n}$ является целым положительным? целым отрицательным? мнимым числом?

9. Найдите вещественные числа x и y, удовлетворяющие уравнениям:

а) $(5-2i)x + (-7+3i)y = 3+2i$;

б) $(3+2i)x + (4+3i)y = 4-3i$.

10. Найдите все комплексные числа, сопряженные:

а) своему квадрату,

б) своему кубу.

11*. Докажите, что если $z + z^{-1} = 2\cos\varphi$, то $z^n + z^{-n} = 2\cos n\varphi$.

12. Образует ли данное числовое множество поле относительно стандартных операций сложения и умножения:

а) $\mathbb{Z}$; б) $\mathbb{Q}$; в) $\mathbb{R}$; г) $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{p + q\sqrt{2} | p, q \in \mathbb{Q}\}$;

д) $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{m + n\sqrt{2} | m, n \in \mathbb{Z}\}$; е) $\mathbb{Z}_2 = \left\{\dfrac{a}{2^n} \,\middle|\, a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\}$;

ж) $\mathbb{Z}[i] = \{x + iy | x, y \in \mathbb{Z}\}$?

1.3. Многочлены и алгебраические уравнения

Многочленом (полиномом) n-й степени над полем $\mathbb{P}$ называется выражение вида

$$P_n[x] = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0; \tag{1.1}$$

$$a_0, \dots, a_n \in \mathbb{P}, a_n \neq 0, n \in \mathbb{N}.$$

Мы в дальнейшем ограничимся рассмотрением многочленов над полем $\mathbb{R}$ (с вещественными коэффициентами) и над полем $\mathbb{C}$ (с комплексными коэффициентами).

Число n называется *степенью* многочлена $P_n[x]$ (пишем: $\deg P_n[x] = n$). Если же все коэффициенты многочлена равны 0 (такой многочлен $P[x] \equiv 0$ мы называем *нулевым многочленом*), то считаем, что $\deg P[x] = -\infty$.

Пусть даны два многочлена $f[x]$ и $g[x]$, $\deg f[x] = n \geq \deg g[x] = m$. Тогда существуют единственные многочлены $q[x]$ и $r[x]$ такие, что

$$f[x] = g[x]q[x] + r[x], \deg r[x] < \deg g[x]. \tag{1.2}$$

Разложение (1.2) называется *делением с остатком* многочлена $f[x]$ на многочлен $g[x]$. Если $r[x] \equiv 0$, говорят, что многочлен $f[x]$ делится на $g[x]$ *без остатка*.

Многочлен $f[x]$ называется *разложимым* или *приводимым над полем* $\mathbb{P}$, если найдутся два таких многочлена $p[x]$ и $q[x]$ с коэффициентами из $\mathbb{P}$, что их степени строго меньше степени $f[x]$ (строго больше 0) и $f[x] = p[x]q[x]$. В противном случае многочлен $f[x]$ называется *неприводимым (неразложимым) над полем* $\mathbb{P}$.

Под полным разложением многочлена над полем $\mathbb{P}$ понимают представление его в виде произведения неприводимых многочленов над полем $\mathbb{P}$.

Корнем многочлена (1.1) называется число x_0 такое, что $P_n[x_0] = 0$.

Основная теорема алгебры (теорема Гаусса). *Всякий многочлен с любыми числовыми коэффициентами, степень которого не меньше единицы, имеет хотя бы один корень, в общем случае комплексный.*

Следствие из теоремы Безу. *Если c_1 — корень многочлена $P_n[x]$, то $P_n[x]$ делится без остатка на двучлен $x - c_1$:*

$$P_n[x] = (x - c_1)Q_{n-1}[x].$$

По той же причине, если c_2 — второй корень многочлена $P_n[x]$, то

$$Q_{n-1}[x] = (x - c_2)R_{n-2}[x]$$

или

$$P_n[x] = (x - c_1)(x - c_2)R_{n-2}[x],$$

и т. д.

Таким образом, имеем $P_n[x] = a_n(x - c_1)(x - c_2)\cdots(x - c_n)$ — разложение многочлена $P_n[x]$ на линейные множители, $c_1, \ldots, c_n$ — все корни многочлена $P_n[x]$. Среди корней могут быть совпадающие. Поэтому *полное* разложение многочлена над полем комплексных чисел имеет вид

$$P_n[x] = a_n(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2}\cdots(x - x_m)^{k_m},\ k_1 + \cdots + k_m = n, \qquad (1.3)$$

где $x_1, \ldots, x_m$ — все различные корни многочлена $P_n[x]$. В разложении (1.3) число k_i называется *кратностью* корня x_i. Корень кратности 1 также называется *простым* корнем.

Пусть коэффициенты $P_n[x]$ $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$ (в этом случае говорим, что многочлен $P_n[x]$ — вещественный) и $z_k = x_k + iy_k$ — его комплексный корень кратности s. Тогда $\overline{z}_k = x_k - iy_k$ с необходимостью также является корнем многочлена $P_n(z)$ той же кратности s. Таким образом, в разложении (1.3) имеется два множителя:

$$(x - z_k)^s(x - \overline{z}_k)^s = (x^2 + px + q)^s,$$

где

$$p = -z_k - \overline{z}_k = -x_k - iy_k - x_k + iy_k = -2x_k \in \mathbb{R},$$
$$q = z_k \cdot \overline{z}_k = x_k^2 + y_k^2 \in \mathbb{R}, D = p^2 - 4q < 0.$$

Перемножив в разложении (1.3) множители, содержащие комплексно-сопряженные корни, получим полное разложение над полем действительных чисел:

$$P_n[x] = a_n(x-x_1)^{k_1}\cdots(x-x_l)^{k_l}(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}\cdots(x^2+p_rx+q_r)^{s_r}, \quad (1.4)$$

$$x_1, \ldots, x_l \in \mathbb{R}.$$

Пример 12. Разложить полином $x^6 - 16x^3 + 64$ над полем действительных и над полем комплексных чисел.

Решение

$x^6 - 16x^3 + 64 = (x^3 - 8)^2 = (x-2)^2(x^2 + 2x + 4)^2$ — разложение над полем $\mathbb{R}$.

Найдем комплексные корни трехчлена $x^2 + 2x + 4$:

$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{3} \cdot i.$$

В результате получим

$$x^6 - 16x^3 + 64 = (x-2)^2(x + 1 - \sqrt{3} \cdot i)^2(x + 1 + \sqrt{3} \cdot i)^2$$

— разложение над полем $\mathbb{C}$. ■

Разложение рациональных дробей в сумму простейших

Рациональной дробью над полем $\mathbb{P}$ называется функция вида

$$\frac{p[x]}{q[x]}, \tag{1.5}$$

где $p[x]$ и $q[x]$ — многочлены с коэффициентами из $\mathbb{P}$. Если при этом выполнено условие $\deg p[x] < \deg q[x]$, то функция (1.5) называется *правильной рациональной дробью*. Заметим, что любая рациональная дробь всегда может быть представлена в виде суммы полинома и правильной рациональной дроби (докажите!).

Простейшей дробью над полем $\mathbb{P}$ называется функция вида

$$\frac{p[x]}{\big(q[x]\big)^r},$$

где $p[x]$ и $q[x]$ — многочлены над полем $\mathbb{P}$, причем $q[x]$ неразложим над этим полем и $\deg p[x] < \deg q[x]$.

Теорема. *Любая правильная рациональная дробь над полем* $\mathbb{P}$ *может быть представлена в виде суммы простейших дробей над полем* $\mathbb{P}$.

Пусть (1.5) — правильная рациональная дробь и

$$q[x] = (q_1[x])^{r_1} \cdot (q_2[x])^{r_2} \cdots (q_k[x])^{r_k}$$

— полное разложение на множители ее знаменателя над необходимым полем. Тогда в искомое разложение (1.5) в сумму простейших дробей будут входить дроби следующего вида:

$$\frac{s_1[x]}{q_1[x]}, \frac{s_2[x]}{(q_1[x])^2}, \ldots, \frac{s_{r_1}[x]}{(q_1[x])^{r_1}}, \ldots, \frac{t_{r_k}[x]}{(q_k[x])^{r_k}},$$

где коэффициенты многочленов $s_1[x], \ldots, s_{r_1}[x], \ldots, t_{r_k}[x]$ определяются с помощью метода неопределенных коэффициентов.

В наиболее важном для нас случае поля вещественных чисел с учетом разложения знаменателя, как в (1.4), получаем

$$\frac{\frac{1}{a_n}P[x]}{(x-x_1)^{k_1}\ldots(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}\ldots} = \frac{A_1}{(x-x_1)} + \cdots + \frac{A_{k_1}}{(x-x_1)^{k_1}} + \cdots +$$

$$+\frac{B_1x+C_1}{(x^2+p_1x+q_1)} + \cdots + \frac{B_{s_1}x+C_{s_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}} + \ldots \tag{1.6}$$

Сумму простых дробей в правой части равенства (1.6) приводят к общему знаменателю, после чего находят неопределенные коэффициенты $A_1, \ldots, A_{k_1}, \ldots, B_1, \ldots, B_{s_1}, \ldots, C_1, \ldots, C_{s_1}, \ldots$, пользуясь равенством числителей.

Пример 13. Разложить над полем действительных чисел рациональную дробь

$$\frac{x+1}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}$$

в сумму простейших дробей.

Решение. Разложим знаменатель на неприводимые множители

$$x^4-2x^3+2x^2-2x+1 = (x^4-2x^3+x^2)+(x^2-2x+1) =$$

$$= (x-1)^2x^2+(x-1)^2 = (x-1)^2(x^2+1).$$

Исходя из вида разложения представление данной дроби в виде суммы простейших дробей записываем следующим образом:

$$\frac{x+1}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}, \tag{1.7}$$

где коэффициенты A, B, C, D подлежат дальнейшему определению. Приведем правую часть равенства (1.7) к общему знаменателю

$$\frac{x+1}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1} = \frac{A(x-1)(x^2+1)+B(x^2+1)+(Cx+D)(x-1)^2}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1},$$

причем равенство числителей должно выполняться при любом значении x. Подставим в числители $x=1$:

$$1+1 = B(1^2+1);\ 2 = 2B;\ B = 1.$$

Раскрыв скобки и приведя подобные члены, получим:

$x+1 = (A+C)x^3+(1-A-2C+D)x^2+(A+C-2D)x+(1-A+D)$, или

$$\begin{cases} A + C & = & 0; \\ 1 - A - 2C + D & = & 0; \\ A + C - 2D & = & 1; \\ 1 - A + D & = & 1; \end{cases} \quad \begin{cases} A & = & -1/2; \\ C & = & 1/2; \\ D & = & -1/2, \end{cases}$$

т. е. искомое разложение имеет вид

$$\frac{x+1}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1} = -\frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}}{x^2+1}. \blacksquare$$

Схема Горнера

Для деления с остатком многочлена $P[x]$ на двучлен $x - x_0$ очень удобна так называемая *схема Горнера*. Пусть

$$P[x] = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = (b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0)(x - x_0) + r. \quad (1.8)$$

Положим $b_{n-1} \doteq a_n$, а для нахождения остальных коэффициентов разложения (1.8) используем следующие формулы:

$$b_{n-2} \doteq a_{n-1} + x_0 b_{n-1}, \ldots, b_0 \doteq a_1 + x_0 b_1,\ r \doteq a_0 + x_0 b_1.$$

Эти формулы удобно записывать в виде таблицы

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots\cdots$	a_1	a_0
$+$		$b_{n-1}x_0$	$b_{n-2}x_0$	$\cdots\cdots$	b_1x_0	b_0x_0
x_0	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	$\cdots\cdots$	b_0	r

Таким образом, вычисление идет рекуррентно, начиная от старших коэффициентов частного к младшим и остатку.

Пример 14. Используя схему Горнера, разделить с остатком многочлен $f[x] = 2x^5 + 3x^4 - x^2 + x - 5$ на двучлен $(x - 2)$.

Решение

	2	3	0	−1	1	−5
+		4	14	28	54	110
2	2	7	14	27	55	105

Ответ: $f[x] = (x - 2) \cdot (2x^4 + 7x^3 + 14x^2 + 27x + 55) + 105.$ $\blacksquare$

Схему Горнера удобно использовать для решения задач поиска корней многочлена и полного разложения многочлена. Поскольку остаток от деления многочлена $P[x]$ на двучлен $(x - c)$ по теореме Безу в точности равен значению $P[c]$, проведя это деление, мы сможем определить, является ли c корнем многочлена. Конечно, эту проверку можно провести и с помощью простой подстановки c в $P[x]$, но такая подстановка требует более сложных вычислений и, кроме того, если c окажется корнем $P[x]$, нам все равно потребуется провести деление. Таким образом, применение схемы Горнера представляется более эффективным подходом.

Перед нами встает вопрос, какие же значения могут или не могут являться корнями данного многочлена. Полностью ответ на этот вопрос удается сформулировать лишь для многочленов с рациональными коэффициентами. Заметим, что, домножив такой многочлен на наименьший общий знаменатель его коэффициентов, мы получим многочлен с целыми коэффициентами, имеющий ровно то же самое множество корней. Следующее утверждение поможет нам искать *целые* корни многочленов с целочисленными коэффициентами.

Утверждение. *Пусть многочлен* $P[x] = a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0$ *имеет целые коэффициенты. Тогда целое число c может быть корнем* $P[x]$ *только лишь в случае, когда свободный коэффициент* a_0 *делится на c нацело.*

Это утверждение поможет нам в поиске целых корней многочлена с целыми коэффициентами, если они есть.

Пример 15. Найти полное разложение многочлена $f[x] = x^5 + x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 8x + 24$ над полем вещественных чисел.

Решение

Целые корни многочлена $f[x]$ следует искать среди элементов множества $\{\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm8, \pm12, \pm24\}$. Подставляя ±1, легко убеждаемся, что эти значения не являются корнями $f[x]$. Попробуем значение $c = 2$:

$$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & 1 & -8 & -6 & 8 & 24 \\ + & & 2 & 6 & -4 & -20 & -24 \\ \hline 2 & 1 & 3 & -2 & -10 & -12 & 0 \end{array}$$

Получили нулевой остаток, следовательно, мы нашли первый корень многочлена. Обозначим его через $x_1 = 2$. При делении $f[x]$ на $(x - x_1)$ получили многочлен четвертой степени, коэффициенты которого выписаны в нижней строке таблицы. Воспользуемся этой строкой, чтобы еще раз поделить многочлен на $(x - x_1)$ и проверить таким образом, не является ли x_1 кратным корнем:

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 3 & -2 & -10 & -12 \\ + & & 2 & 10 & 16 & 12 \\ \hline 2 & 1 & 5 & 8 & 6 & 0 \end{array}$$

Получили $x_2 = x_1 = 2$. Проверим еще раз значение $c = 2$:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 5 & 8 & 6 \\ + & & 2 & 14 & 44 \\ \hline 2 & 1 & 7 & 22 & 50 \end{array}$$

Остаток получился ненулевой, следовательно, нужно пробовать другие корни. Можно также заметить, что коэффициенты многочлена-частного все положительные, а это значит, что положительных корней у него быть не может. Проверим отрицательный корень $c = -2$:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 5 & 8 & 6 \\ + & & -2 & -6 & -4 \\ \hline -2 & 1 & 3 & 2 & 2 \end{array}$$

Число -2 не является корнем, пробуем $c = -3$:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 5 & 8 & 6 \\ + & & -3 & -6 & -6 \\ \hline -3 & 1 & 2 & 2 & 0 \end{array}$$

Получили $x_3 = -3$ и имеем частичное разложение $f[x] = (x-2)^2(x+$ $+3)(x^2+2x+2)$. Последний множитель имеет отрицательный дискриминант и потому не имеет вещественных корней, следовательно, полученное разложение является полным разложением над полем вещественных чисел.

Ответ: $f[x] = (x-2)^2(x+3)(x^2+2x+2)$. ■

Также схема Горнера может быть полезной для разложения на простейшие рациональной дроби, знаменатель которой имеет вид $(x-c)^r$. Действительно, пусть $\deg f[x] < r$ и

$$\frac{f[x]}{(x-c)^r} = \frac{A_1}{x-c} + \frac{A_2}{(x-c)^2} + \cdots + \frac{A_r}{(x-c)^r}.$$

Тогда $f(x) = A_1(x-c)^{r-1} + A_2(x-c)^{r-2} + \cdots + A_{r-1}(x-c) + A_r$. Полученное разложение называется *разложением многочлена* $f[x]$ *по степеням* $(x-$ $-c)$. Заметим, что A_r есть не что иное, как остаток от деления $f[x]$ на $(x-c)$, A_{r-1} — остаток от деления частного на $(x-c)$ и так далее.

Пример 16. Разложить на простейшие дроби

$$\frac{2x^5 - 3x^4 + x^3 + 5x^2 - 7x + 12}{(x-3)^6}.$$

Решение. Разложим числитель по степеням $(x-3)$. Для этого применим схему Горнера несколько раз. В сокращенной записи получим

	2	-3	1	5	-7	12
3	2	3	10	35	98	$\boxed{306}$
3	2	9	37	146	$\boxed{536}$	
3	2	15	82	$\boxed{392}$		
3	2	21	$\boxed{145}$			
3	2	$\boxed{27}$				
3	$\boxed{2}$					

Получаем $f[x] = 2(x-3)^5 + 27(x-3)^4 + 145(x-3)^3 + 392(x-3)^2 + 536(x-3)+306$. Следовательно, разложение на простейшие дроби будет иметь следующий вид:

$$\frac{2x^5 - 3x^4 + x^3 + 5x^2 - 7x + 12}{(x-3)^6} =$$

$$= \frac{2}{x-3} + \frac{27}{(x-3)^2} + \frac{145}{(x-3)^3} + \frac{392}{(x-3)^4} + \frac{536}{(x-3)^5} + \frac{306}{(x-3)^6}. \blacksquare$$

1.3. Задачи

1. Решите уравнения:

а) $x^2 + 2x + 5 = 0$;

б) $x^2 + (1-2i)x - 7 - i = 0$;

в) $(x+1)^4 - 16 = 0$;

г) $(x+1)^4 + 16 = 0$;

д) $x^4 + 9x^2 + 20 = 0$.

2. Разложите многочлены над полями действительных и комплексных чисел:

а) $x^4 - 1$;

б) $x^4 + 4x^3 + 11x^2 + 14x + 10$; $x_1 = -1 + i$ — корень многочлена;

в) $x^5 + x^4 + x^3 - x^2 - x - 1$, $x_1 = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ — корень многочлена;

г) $x^4 + 6x^3 + 9x^2 + 100$, $x_1 = 1 + 2i$ — корень многочлена;

д) $x^4 + 2x^2 + 4$;

е) $x^4 - 3x^2 + 9$;

ж) $x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 38x - 39$;

з) $x^5 + 2x^4 - 20x^3 - 68x^2 - 41x + 30$;

и) $2x^6 - 14x^5 - x^4 + 45x^3 + 153x^2 + 729x - 2754$.

3. Постройте многочлен наименьшей степени с комплексными коэффициентами, имеющий:

а) простые корни $1, 2, -1, i$;

б) простые корни $1+i, 1$, двукратный корень $2-i$.

4. Постройте многочлен наименьшей степени с вещественными коэффициентами, имеющий:

а) двукратные корни $1, -1$, простой корень $2 - i$;

б) двукратный корень i, простой корень $2 - i$.

5. Представьте рациональную дробь в виде суммы простейших дробей над полем комплексных чисел:

$$\text{а) } \frac{1}{x^4 + 4}; \quad \text{б) } \frac{4x^3 + 10x}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)}.$$

6. Представьте рациональную дробь в виде суммы простейших дробей над полем вещественных чисел:

$$\text{а) } \frac{1}{x^4 + 4}; \quad \text{б) } \frac{2x}{(x + 1)(x^2 + 1)}.$$

7. Разделите с остатком многочлен $P[x]$ на $(x - x_0)$ и найдите $P[x_0]$:

а) $P[x] = 2x^5 - 5x^3 - 8x$, $x_0 = -3$;

б) $P[x] = x^4 - 3x^3 - 10x^2 + 2x + 5$, $x_0 = -2$;

в) $P[x] = x^5 - x^4 + 2x^2 + 4x - 2$, $x_0 = 1$;

г) $P[x] = x^6 - 5x^5 + x^3 + 2x - 8$, $x_0 = 2$.

8. Определите кратность корня x_0 многочлена $P[x]$:

а) $P[x] = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$, $x_0 = 2$;

б) $P[x] = 3x^5 + 2x^4 + x^3 - 10x - 8$, $x_0 = -1$;

в) $P[x] = x^6 - 9x^5 + 26x^4 - 10x^3 - 99x^2 + 243x - 216$, $x_0 = 3$;

г) $P[x] = x^7 - 5x^6 + 11x^5 - 15x^4 + 15x^3 - 11x^2 + 5x - 1$, $x_0 = 1$.

Глава 2

Матрицы и определители

2.1. Определители: свойства, вычисление

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел. Числа, из которых состоит матрица, называются ее *элементами*. Обозначение:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left(a_{ij}\right)_{m\times n},$$

здесь m — число строк матрицы, n — число столбцов, $m \times n$ — *размерность матрицы*, a_{ij} — элемент матрицы A, стоящий в i-й строке и j-м столбце. Элемент a_{11} читается "a один один", а не "a одиннадцать".

Матрица называется *квадратной*, если $m = n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}; \quad \begin{matrix} a_{11}, \dots a_{ii}, \dots a_{nn} & \text{— главная диагональ } A, \\ a_{1n}, a_{2n-1}, \dots, a_{n1} & \text{— ее побочная диагональ.} \end{matrix}$$

Число строк (столбцов) n квадратной матрицы называется также ее *порядком*. Каждой квадратной матрице ставится в соответствие число, называемое *определителем*[1] матрицы. Обозначение:

$$\det A = \Delta A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Вычисление определителей малых порядков

1) Определитель матрицы первого порядка $|A| = |a_{11}| = a_{11}$.

2) Определитель матрицы второго порядка вычисляется по формуле

$$|B| = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}.$$

[1] **Мы не даем точного определения определителя. Вам необходимо только знать, что определитель — это число, соответствующее квадратной матрице, и научиться его находить.**

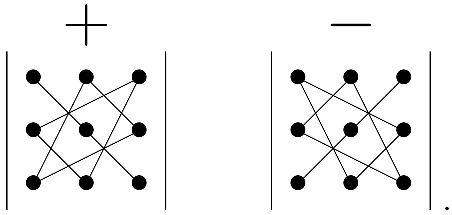
Пример 1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 1 \cdot 7 - 2 \cdot 5 = -3.$ ■

3) Определитель матрицы третьего порядка

$$|C| = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} = c_{11}c_{22}c_{33} + c_{12}c_{23}c_{31} + c_{13}c_{21}c_{32} -$$

$$- c_{13}c_{22}c_{31} - c_{12}c_{21}c_{33} - c_{11}c_{23}c_{32}.$$

Для запоминания этой формулы существует мнемоническое *правило треугольника*



Пример 2. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1{\cdot}5{\cdot}9 + 2{\cdot}6{\cdot}7 + 3{\cdot}4{\cdot}8 - 3{\cdot}5{\cdot}7 - 2{\cdot}4{\cdot}9 - 1{\cdot}6{\cdot}8 = 0.$ ■

Заметим, что это правило применимо только к определителям третьего порядка; для определителей высших порядков подобного правила не существует[2] .

Вычисление определителей старших порядков

Минором элемента a_{ij} матрицы A называется определитель матрицы, получаемый из A вычеркиванием i-й строки и j-го столбца. Обозначается такой минор через M_{ij}.

Пример 3. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$; $M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$. ■

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} называется выражение $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$. Таким образом, алгебраическое дополнение по модулю совпадает с соответствующим минором, и если при этом сумма индексов $i + j$ нечетная, то знак алгебраического дополнения противоположен знаку соответствующего минора.

---

[2]На самом деле можно изобрести нечто подобное (хотя и не такое красивое) для определителей старших порядков, но это вряд ли имеет смысл. Обратите внимание, что мнемоническое правило облегчает только запоминание формулы, но никак не ее использование. А аналогичная формула уже для четвертого порядка будет состоять из 24 слагаемых, каждое из которых состоит из 4 множителей. Может, и найдутся герои, способные такую формулу применять, но мы предлагаем более простой метод.

Для вычисления определителей любых порядков используется следующая

Теорема. *Сумма произведений элементов какой-нибудь строки или столбца на их алгебраические дополнения* ($a_{i1}A_{i1} + \cdots + a_{in}A_{in}$) *не зависит от выбора строки или столбца и равна определителю данной матрицы*

$$\forall\, 1 \le i \le n\ \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}. \tag{2.1}$$

Формула (2.1) называется *формулой разложения определителя по* (i-*й*) *строке.* Заметим, что аналогичный результат верен и для столбцов, и можно записать также формулу разложения по столбцу.

Пример 4. Разложить определитель по первой строке.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Пример 5. Вычислить определитель, разложив его по второй строке.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = -3 \cdot (-1)^3 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} +$$

$$+0 \cdot (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -12 - 5 = -17. \blacksquare$$

Наряду с матрицей $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$ будем также рассматривать матрицу A^{T} (читается "A транспонированная"), строки которой совпадают со столбцами матрицы A, и наоборот:

$$A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Свойства определителей

1) $|A| = |A^{\mathrm{T}}|$, т. е. при вычислении определителя столбцы и строки матрицы равноправны.

2) Если у матрицы поменять местами две строки (два столбца), то ее определитель сменит знак:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Следствие. *Если у матрицы две строки (два столбца) одинаковые, то определитель этой матрицы равен нулю.*

3) Общий множитель элементов строки (столбца) можно выносить за знак определителя:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \dots & \lambda a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Следствие 1. *Если у матрицы есть нулевая строка (столбец),то определитель этой матрицы равен нулю.*

Следствие 2. *Если у матрицы две строки (два столбца) пропорциональны, то определитель этой матрицы равен нулю.*

$$4) \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{i1}+c_{i1} & \dots & b_{in}+c_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{i1} & \dots & b_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{i1} & \dots & c_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

5) Определитель матрицы не изменится, если к элементам одной строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столб-

ца), умноженные на некоторое одно и то же число:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1}+\lambda a_{j1} & a_{i2}+\lambda a_{j2} & \dots & a_{in}+\lambda a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

6) Сумма произведений элементов какой-нибудь строки (столбца) определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки (столбца) равна нулю

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj} = 0 \text{ при } k \neq i.$$

Используя свойство 5, определитель преобразуем к виду, упрощающему его вычисление, когда в некоторой строке или столбце "много" нулей (не более одного ненулевого элемента) — в этом случае удобно разложить определитель по этой строке (столбцу).

Пример 6. Найти значение определителя.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 4 \\ -2 & 5 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +\mathrm{I} \end{matrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} -2\mathrm{II} \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & -5 & -11 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} = a_{21}A_{21} = 1 \cdot (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} -5 & -11 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = \underline{-66}. \blacksquare$$

А если удастся привести определитель к *треугольному виду*[3], в котором ниже главной диагонали стоят лишь нулевые элементы, то это еще лучше:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}.$$

Пример 7. Привести определитель $A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$ к треугольному виду и вычислить его.

[3]На самом деле, такой вид матрицы называется *верхнетреугольным*. Такая же формула верна и для нижнетреугольных матриц (смотри с. 37).

Решение

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ -\mathrm{I} \\ -\mathrm{I} \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -2\mathrm{II} \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1. \blacksquare$$

2.1. Задачи

1. Не вычисляя, докажите, что определитель равен нулю:

$$\text{а)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}; \quad \text{б)} \begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}; \quad \text{в)} \begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & 3 \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta & 3 \\ \cos^2\gamma & \sin^2\gamma & 3 \end{vmatrix};$$

$$\text{г)} \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}.$$

2. Вычислите определители:

$$\text{а)} \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}; \quad \text{б)} \begin{vmatrix} a+bi & b \\ 2a & a-bi \end{vmatrix}; \quad \text{в)} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix};$$

$$\text{г)} \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 4 & -1 & -7 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{д)} \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ -4 & 1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}; \quad \text{е)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & a \\ 2 & 0 & b & 0 \\ 3 & c & 4 & 5 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix};$$

$$\text{ж)} \begin{vmatrix} 0 & b & c & d \\ b & 0 & d & c \\ c & d & 0 & b \\ d & c & b & 0 \end{vmatrix}; \quad \text{з)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & -1 \\ -3 & -2 & 1 & 0 \end{vmatrix}; \quad \text{и)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & -5 & 13 \\ 1 & -2 & 10 & 4 \\ -2 & 9 & -8 & 25 \end{vmatrix}.$$

3*. Вычислите определители порядка n, элементы которых заданы условиями:

а) $a_{ij} = \min\{i, j\}$; б) $a_{ij} = \max\{i, j\}$.

4. Решите уравнения, не раскрывая определителей:

$$\text{а)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3-x \end{vmatrix} = 0; \quad \text{б)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5-t^2 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 5-t^2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

2.2. Решение систем линейных уравнений с помощью формул Крамера

Пусть задана система n линейных уравнений с n неизвестными (т. е. *квадратная* система):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots & \dots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n & = & b_n. \end{cases}, \text{ или}^4 AX = B.$$

Если $|A| \neq 0$, то система имеет единственное решение и называется *определенной*[5]. Ее решение может быть найдено с помощью следующих *формул Крамера*:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}; \dots ; x_n = \frac{\Delta_{x_n}}{\Delta},$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}; \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix};$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & b_n & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}; \cdots ; \Delta_{x_n} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n-1} & b_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn-1} & b_n \end{vmatrix}.$$

Важно запомнить, что метод Крамера применим только для решения **квадратных определенных** систем.

Пример 8. Решить систему линейных уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 3x_3 & = & -1; \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 & = & 2; \\ 4x_1 + 5x_3 & = & -1 \end{cases}$$

Решение

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 3; \ \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 3;$$

[4] Последняя, матричная запись системы линейных уравнений подробно объясняется в главе 6. Впрочем, вы и сами поймете, откуда она берется, изучив операции над матрицами в следующем разделе.

[5] **Верно и обратное: если квадратная система линейных уравнений $AX = B$ определенная, то $|A| \neq 0$.**

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 3; \Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -3;$$

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \frac{3}{3} = 1;\ x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = 1;\ x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} = -1.\ \blacksquare$$

2.2. Задачи

1. Решите системы линейных уравнений методом Крамера:

а) $\begin{cases} 3x - 5y &= 1, \\ 2x - 7y &= -3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x - y - 4z &= 6, \\ 2x + 3y - 7z &= 16, \\ 5x + 2y + z &= 16; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x + y &= 5, \\ x + 3z &= 16 \\ 5y - z &= 10; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 3x - y + 2z &= -5, \\ -2x + y - z &= 3, \\ -x - 3y + 3z &= -16; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 2x - y + 3z &= 9, \\ 3x - 5y + z &= -4, \\ 4x - 7y + z &= 5; \end{cases}$

е) $\begin{cases} 2x + y + 4z + 8v &= -1, \\ x + 3y - 6z + 2v &= 3, \\ 3x - 2y + 2z - 2v &= 8, \\ 2x - y + 2z &= 4; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} 5x - 6y + 4z &= 3, \\ 3x - 3y + 2z &= 2, \\ 4x - 5y + 2z &= 1; \end{cases}$

з) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 4, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 &= 6, \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= 12, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= 6. \end{cases}$

2. Найдите многочлен $f(x)$ второй степени с действительными коэффициентами, для которого:

а) $f(1) = 8,\ f(-1) = 2,\ f(2) = 14;$

б) $f(1) = 4,\ f(-2) = 13,\ f(-1) = 8.$

3. Для каких значений λ система уравнений будет иметь единственное решение:

а) $\begin{cases} \lambda x + y & = & 1; \\ x + \lambda y + z & = & 2; \\ y + \lambda z & = & 3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x + 2y + 3z + 4v & = & 1; \\ (3-\lambda)x + 2y + 3z + 4v & = & 2; \\ (2+\lambda)x + 3y + (4-\lambda)z + v & = & 3; \\ 2x + 3y + 4z + v & = & 4? \end{cases}$

2.3. Матрицы и операции над ними. Ранг матрицы

Виды матриц

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}; \quad \lambda E = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix};$$

единичная матрица скалярная матрица

$$\mathrm{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix};$$

диагональная матрица

$$U = \begin{pmatrix} a_{11} & * & \cdots & * \\ 0 & a_{22} & \cdots & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}; \quad L = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ * & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ * & \cdots & * & a_{nn} \end{pmatrix};$$

верхнетреугольная матрица нижнетреугольная матрица

$$\mathbb{0} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}.$$

нулевая матрица вектор-строка вектор-столбец

Звездочками обозначаются элементы матриц, которые могут принимать произвольные значения. Заметим, что единичная, скалярная и диагональная матрицы — всегда квадратные, а нулевая[6] матрица может быть произвольной размерности. Ясно также, что E (и $\mathbb{0}$, если она квадратная) — частный случай скалярной матрицы, которая, в свою очередь, является частным случаем диагональной матрицы, представляюшей собой частный случай как верхне-, так и нижнетреугольной. Для верхне- и нижнетреугольной матриц существует общее название — *треугольные*.

Линейные операции над матрицами

Пусть $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{m\times n}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Матрицы A и B равны ($A = B$), если их размерности совпадают и

$$\forall\, 1 \le i \le m \;\; \forall\, 1 \le j \le n \Big(a_{ij} = b_{ij}\Big);$$

$D = A^{\mathrm{T}}$ (транспонирование матрицы): $D = (d_{ij})_{n\times m}$, $d_{ij} = a_{ji}$.

$C = A + B$ (сумма матриц), где $C = (c_{ij})_{m\times n}$, $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

$G = \lambda A$ (произведение матрицы на число): $G = (g_{ij})_{m\times n}$, $g_{ij} = \lambda a_{ij}$.

Замечание. *Складывать можно только матрицы одинаковой размерности.*

Умножение матриц

Произведением вектор-строки $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$ на вектор-столбец $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ называется число

$$AB = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n = \sum_{i=1}^{n} a_ib_i.$$

Пример 9. Перемножить следующие матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1\cdot 4 + (-2)(-3) + 3\cdot 2 + 4 \cdot 1 = 20. \blacksquare$$

Произведением матрицы $A = (a_{ij})_{m\times p}$ на матрицу $B = (b_{ij})_{p\times n}$ называется матрица $C = (c_{ij})_{m\times n}$, элементы которой вычисляются по формуле

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \dots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}.$$

[6] В данном пособии во избежание путаницы мы обозначаем нулевую матрицу символом $\mathbb{0}$. Но эта нотация не является общепринятой, и часто нулевую матрицу обозначают просто 0. Как правило, по контексту всегда можно однозначно определить, что именно имеется в виду — число 0 или нулевая матрица.

Замечание. *Размерность произведения матриц определяется по правилу* $(m \times p)(p \times n) = (m \times n)$. *Если число столбцов левой матрицы не совпадает с числом строк правой матрицы, то они неперемножаемы.*

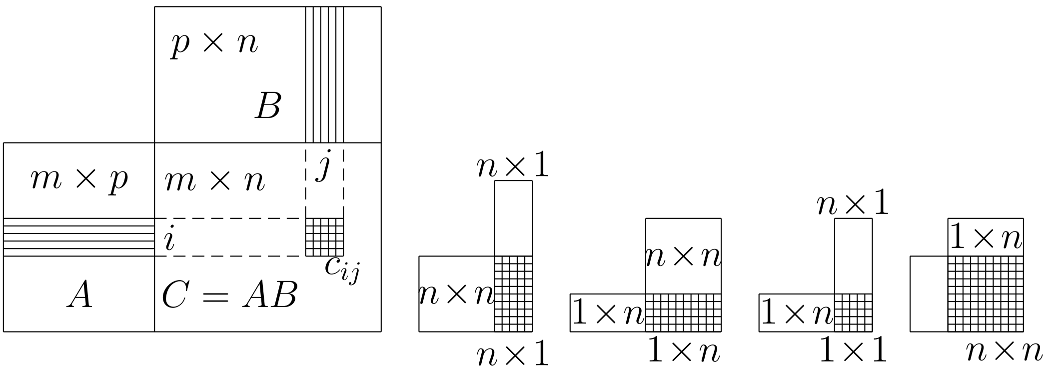
Пример 10. Перемножить матрицы:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 - 1(-3) + 3 \cdot 2 & 2(-2) - 1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 \\ 0 \cdot 1 + 4(-3) - 2 \cdot 2 & 0(-2) + 4 \cdot 1 - 2 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 4 \\ -16 & -2 \end{pmatrix}. \ \blacksquare$$

В общем случае[7] $AB \neq BA$. Если же равенство $AB = BA$ выполняется, то матрицы A и B называются *коммутирующими* или *перестановочными.*

Умножение матриц удобно изображать графически



Свойства операций над матрицами

Для любых матриц A, B и C, для которых определены соответствующие операции, и для любых чисел λ и μ выполняются следующие равенства:

1) $A + B = B + A$;
2) $(A + B) + C = A + (B + C)$;
3) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$, $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$;
4) $(AB)C = A(BC)$;
5) $(A + B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}}$;
6) $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$, $(\lambda A)^{\mathrm{T}} = \lambda A^{\mathrm{T}}$;

[7]**Вообще говоря, из перемножаемости матриц A и B не следует перемножаемость B и A. Даже если оба произведения AB и BA определены, они могут иметь разную размерность. Но даже если AB и BA имеют одинаковую размерность (т.е. матрицы A и B — квадратные одного порядка), все равно, вообще говоря, $AB \neq BA$.**

7) $(A+B)C = AC + BC$, $A(B+C) = AB + AC$;

8) $AE = A$, $EB = B$.

Элементарные преобразования матриц

Следующие преобразования матриц называются *элементарными*:

1) перестановка строк;

2) умножение какой-либо строки на число, отличное от нуля;

3) прибавление к одной строке другой строки, умноженной на какое-либо число;

4) те же операции над столбцами.

В результате элементарных преобразований получаем матрицу, *эквивалентную* исходной.

Ранг матрицы

Пусть в матрице A размерности $m \times n$ выбраны k строк и k столбцов, $k \leq m$ и n. Определитель матрицы, элементы которой стоят на пересечении этих строк и столбцов, называется *минором* порядка k матрицы A.

Пусть все миноры матрицы A порядков, больших r, равны нулю, и при этом существует отличный от нуля минор порядка r. Число r называется *рангом* матрицы A. Обозначение[8]: $\operatorname{rank} A = r$. Другими словами, *рангом матрицы* A называется максимальный порядок отличного от нуля минора матрицы A. Этот минор называется *базисным минором*. Заметим, что он определяется неоднозначно.

Теорема (о базисном миноре). *Базисные строки (столбцы) линейно независимы. Любая строка (столбец) матрицы является линейной комбинацией*[9] *базисных строк (столбцов).*

Из упомянутой выше теоремы вытекает еще одно определение ранга матрицы, эквивалентное исходному: рангом матрицы A называется наибольшее число линейно независимых строк (столбцов) матрицы A.

Методы вычисления ранга матрицы

А. Метод окаймляющих миноров

Если применить определение формально, то для нахождения ранга нам потребуется вычислить все миноры всех допустимых порядков. К счастью, нам не придется этого делать. Оказывается, что если минор

[8] Заметим, что для ранга нет стандартного обозначения. Разные авторы обозначают его по-разному: $\operatorname{rk} A$, реже $r(A)$ и даже r_A.

[9] Понятия линейной комбинации и линейной независимости вводятся в главе 7 на с. 103; про них можно прочитать также в главе 3 на с. 53.

M_k порядка k не равен нулю, а все *окаймляющие* его миноры, т. е. миноры порядка $k+1$, включающие в себя M_k, равны нулю, то не существует ненулевого минора порядка больше k. Поэтому мы начинаем поиск ненулевых миноров с самого младшего порядка — первого. Дальше действуем следующим образом. Пусть мы нашли минор M_k порядка k, отличный от нуля. Рассмотрим лишь окаймляющие его миноры. Если все такие миноры равны нулю, то ранг матрицы равен k. Если нашелся минор M_{k+1} порядка $k+1$, отличный от нуля, то ранг матрицы уже, по меньшей мере, $k+1$, и мы рассматриваем миноры, окаймляющие минор M_{k+1}, и т. д.

Б. Метод элементарных преобразований

С помощью элементарных преобразований приводим матрицу A к *левоступенчатому* виду

$$A \sim \begin{pmatrix} 0 & \cdots & a'_{1i_1} & \cdots & & & & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a'_{2i_2} & \cdots & & \\ \vdots & & & \vdots & & \ddots & & \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a'_{ri_r} & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \qquad (2.2)$$

Матрицу такого вида мы будем также называть просто *ступенчатой*. Формальное ее определение можно дать следующим образом. Обозначим через α_i число начальных нулей слева в i-й строке матрицы (т.е. число нулей до первого ненулевого элемента, или длину строки, если она нулевая). Матрица называется *левоступенчатой*, если $\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_m$, причем равенство $\alpha_i = \alpha_{i+1}$ возможно только лишь в том случае, когда i-я и $(i+1)$-я строки обе нулевые.

Ранг такой матрицы[10] равен числу ненулевых строк r. Поскольку элементарные преобразования не изменяют ранга матрицы (см. задачу **6** на с. 44), ранг матрицы A тоже равен r.

Пример 11. Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$.

[10]Неформально можно определить понятие левоступенчатой матрицы следующим образом: матрица называется (лево)ступенчатой, если ее элементы можно разделить "лесенкой" — ломаной линией, изображенной в (2.2) — обладающей следующими свойствами: 1) левее и ниже лесенки все элементы равны 0; 2) высота каждой "ступеньки" равна 1; 3) в начале каждой ступеньки стоит ненулевой элемент.

Решение

А. Метод окаймляющих миноров. Формально мы должны начать с первого порядка, но легко заметить, что минор второго порядка, образованный первой и второй строкой и вторым и третьим столбцом, не равен нулю:

$$M_2 = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = -5 + 6 = 1 \neq 0.$$

Теперь окаймляем этот минор. Поскольку он расположен во втором и третьем столбце и в первой и второй строке, для окаймления перебираем три оставшихся столбца и одну оставшуюся строку.

$M_3^{(1)} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, так как первый и второй столбцы пропорциональны.

$$M_3^{(2)} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -2 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 8 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ -2\mathrm{I} \\ -\mathrm{I} \end{matrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 10 \end{vmatrix} = 0.$$

$$M_3^{(3)} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ -2 & 5 & 7 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ -2\mathrm{I} \\ -\mathrm{I} \end{matrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Так как все окаймляющие миноры третьего порядка равны 0 и существует ненулевой минор второго порядка, то $\operatorname{rank} A = 2$.

Б. Метод элементарных преобразований.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \text{-2I} \\ \text{-I} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 10 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \text{-2II} \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Так как в полученном ступенчатом виде осталось ровно две ненулевые строки, то $\operatorname{rank} A = 2$. ■

2.3. Задачи

1. Даны матрицы: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \end{pmatrix}$,

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \\ d_{31} & d_{32} \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{pmatrix}.$$

Какие из них можно перемножать? Укажите размерности всех произведений.

2. Вычислите:

а) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 8 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$;

д) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 4 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \\ 5 & -7 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ 5 & -5 \\ 3 & 17 \end{pmatrix}$;

е) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 29 \\ 2 & 18 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$;

ж) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

з) $\begin{pmatrix} 3 & 9 & 4 \\ 2 & 7 & 3 \\ 6 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 8 & 10 \\ -12 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$;

и) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}^2$;

к) $f(A)$, где $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Докажите, что матрица $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ удовлетворяет уравнению

$$X^2 - (a+d)X + (ad - bc)E = \mathbb{0}.$$

4. Каким свойствам должны удовлетворять матрицы A и B для того, чтобы были справедливы следующие равенства:

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2; \qquad (A+B)(A-B) = A^2 - B^2?$$

5. Докажите:

а) если $A^2 = \mathbb{0}$, то $(E+A)^3 = E + 3A$;

б) если $A^2 = A$, то $(E+A)^3 = E + 7A$.

6. Докажите, что ранг матрицы не изменится, если:

а) заменить строки столбцами (транспонировать матрицу);

б) умножить элементы одной строки (столбца) на число, отличное от нуля;

в) переставить две строки (столбца);

г) к элементам одной строки прибавить соответствующие элементы другой строки, умноженные на некоторое число.

7. Как может измениться ранг матрицы, если приписать к ней:

а) один столбец; б) две строки?

8. С помощью элементарных преобразований приведите матрицу к ступенчатому виду. Укажите ранг матрицы:

$$\text{а)} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}; \ \text{б)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -2 \\ 11 & 4 & 56 & 2 \\ 2 & -1 & 5 & -10 \end{pmatrix};$$

$$\text{в)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}; \ \text{г)} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & -4 & 2 \end{pmatrix};$$

$$\text{д)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}; \ \text{е)} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. При каких значениях λ матрица имеет наименьший ранг:

$$\text{а)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 \\ -3 & 1 & \lambda & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}; \quad \text{б)} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 5 \\ 4 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & \lambda & -2 & 3 \end{pmatrix}?$$

2.4. Обратная матрица. Решение систем линейных уравнений с помощью обратной матрицы

Квадратная матрица A называется *вырожденной* (*невырожденной*), если $\det A = 0\,(\det A \neq 0)$.

Теорема. *Если A — невырожденная матрица, то существует матрица A^{-1} такая, что $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ (E — единичная матрица).*

Матрица A^{-1} называется *обратной* к матрице A. Заметим, что выполняются следующие свойства:

1) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;

2) $(A^{\mathrm{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}$;

3) $(\lambda A)^{-1} = \dfrac{1}{\lambda}A^{-1}$.

Нахождение обратной матрицы

А. I способ[11]

а) Вычислим $\det A$. Пусть $\det A = \Delta \neq 0$ (иначе обратной матрицы не существует).

б) Найдем $\tilde{A} = (A_{ij})$, где A_{ij} — алгебраические дополнения элементов матрицы A. Таким образом, матрица $\tilde{A}$ составлена из алгебраических дополнений к соответствующим элементам матрицы A.

в) Найдем $A^* = (\tilde{A})^{\mathrm{T}}$. Матрица A^* называется *присоединенной* матрицей для матрицы A.

г) $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}A^*$.

Таким образом, обратная матрица вычисляется по следующей формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

Пример 12. Найти A^{-1}

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение

[11] **Этот способ не имеет своего общеупотребительного названия, хотя его иногда называют методом алгебраических дополнений. Этот метод вытекает из доказательства упомянутой выше теоремы об обратной матрице.**

а) $\det A = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 17.$

б) $A_{11} = -3$; $A_{12} = 4$; $A_{13} = -2$; $A_{21} = -22$; $A_{22} = 1$; $A_{23} = 8$; $A_{31} = 7$; $A_{32} = 2$; $A_{33} = -1$. $\tilde{A} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -2 \\ -22 & 1 & 8 \\ 7 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

в) $A^* = \begin{pmatrix} -3 & -22 & 7 \\ 4 & 1 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \end{pmatrix}$.

г) $A^{-1} = \dfrac{1}{17}\begin{pmatrix} -3 & -22 & 7 \\ 4 & 1 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \end{pmatrix}$. ■

Б. II способ — метод элементарных преобразований

Построим матрицу $(A|E)$ размерности $n \times 2n$ и с помощью элементарных преобразований строк (см. с. 40) приведем ее к виду $(E|B)$: $(A|E) \sim (E|B)$. При этом $B = A^{-1}$. Если матрица $(A|E)$ никакими преобразованиями не приводится к нужному виду, это означает, что $|A| = 0$ и A^{-1} не существует.

Пример 13. Найти обратную матрицы с помощью элементарных преобразований:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & -1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 7 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -17 & 2 & -8 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 7 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{17} & \frac{8}{17} & -\frac{1}{17} \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{17} & -\frac{22}{17} & \frac{7}{17} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{17} & \frac{1}{17} & \frac{2}{17} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{17} & \frac{8}{17} & -\frac{1}{17} \end{array}\right); \ A^{-1} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} -3 & -22 & 7 \\ 4 & 1 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \end{pmatrix}. \ ■$$

Решение систем линейных уравнений с помощью обратной матрицы

Пусть дана квадратная система линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n & = & b_1; \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n & = & b_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots & \dots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n & = & b_n. \end{cases}$$

Обозначим: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$. Тогда систему можно записать в матричном виде[12] : $AX = B$. Если $\det A \neq 0$, то система является определенной и существует A^{-1}. Умножим слева эту систему на A^{-1}:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B;$$

$$EX = A^{-1}B;$$

$$X = A^{-1}B.$$

Заметим, что метод обратной матрицы, как и метод Крамера, можно применять только к **квадратным определенным** системам.

Пример 14. Решить систему линейных уравнений с помощью обратной матрицы:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - 3x_3 & = & -2; \\ x_2 + 2x_3 & = & 3; \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 & = & 11. \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix};$$

$$A^{-1} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} -3 & -22 & 7 \\ 4 & 1 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \end{pmatrix};$$

Решение

$$X = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} -3 & -22 & 7 \\ 4 & 1 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 11 \end{pmatrix} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 6 - 66 + 77 \\ -8 + 3 + 22 \\ 4 + 24 - 11 \end{pmatrix} =$$

[12] **Теперь-то уже понятно происхождение такой записи. Если формально умножить A на X, получим вектор-столбец, элементы которого совпадают с левыми частями системы уравнений, так что матричная запись полностью эквивалентна записи в виде уравнений.**

$$= \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 17 \\ 17 \\ 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1. \end{cases} \quad \blacksquare$$

Пример 15. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Введем обозначения:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}; \; C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда уравнение примет вид: $AXB = C$.

Для того чтобы из этого уравнения найти матрицу X, нужно обе части уравнения **слева** умножить на матрицу A^{-1}, а **справа** на матрицу B^{-1}:

$$A^{-1}AXBB^{-1} = A^{-1}CB^{-1}.$$

Поскольку $A^{-1}A = E$, $BB^{-1} = E$, $EX = X$, $XE = X$, получаем $X = A^{-1}CB^{-1}$.

Находим $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}$; $B^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$,
после чего вычисляем X:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 32 & -116 & 45 \\ -1243 & 4511 & -1752 \\ 879 & -3190 & 1239 \end{pmatrix}. \blacksquare$$

2.4. Задачи

1. Найдите матрицу, обратную данной:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}; \quad \text{в) } \begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 3 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\text{г) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{д) } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}; \quad \text{е) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

2. Решите матричные уравнения, если X — матрица соответствующей размерности:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix};$

б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix};$

в) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix};$

г) $X \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix};$

д) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 13 & 11 \end{pmatrix}.$

3. Решите системы линейных уравнений с помощью обратной матрицы:

а) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 7; \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = 12; \\ 2x_2 - 4x_3 = -14; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 11; \\ 3x_1 + x_2 = 3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 17; \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 7; \\ 3x_1 - 5x_2 - x_3 = 6; \end{cases}$

г) $\begin{cases} -x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 = 0; \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 6; \\ 2x_2 + 5x_3 - x_4 = -8; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$

4. Докажите, что если $(E+A)^{-1} = E+B$, то $A+B+AB = \mathbb{0}$.

5. Докажите, что если $A^2 = \mathbb{0}$, то $(E+A)^{-1} = E-A$.

6. Докажите, что если A — целочисленная квадратная матрица и $\det A = \pm 1$, то A^{-1} — тоже целочисленная квадратная матрица.

7*. Проверьте справедливость равенства

$$\begin{pmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

и с его помощью вычислите $\begin{pmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{pmatrix}^5$.

Глава 3

Пространство геометрических векторов

3.1. Геометрические векторы. Линейные операции над ними

Вектором мы будем называть направленный отрезок[1]. Обозначение: $\overline{a}$ или $\overline{AB}$, где A и B — начало и конец вектора. *Длина* (*модуль*) вектора обозначается $|\overline{a}|, |\overline{AB}|$. Вектор нулевой длины обозначается $\overline{0}$ и называется *нулевым вектором*.

Векторы, направления которых параллельны, называются *коллинеарными*. Обозначение: $\overline{a}||\overline{b}$. Коллинеарные векторы могут быть *сонаправленными* или *противоположно направленными* ($\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}$ или $\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b}$).

Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называются *равными* ($\overline{a} = \overline{b}$), если $|\overline{a}| = |\overline{b}|$ и $\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}$. Отсюда следует, что векторы не "привязаны" ни к какой точке и свободно "перемещаются" параллельно самим себе. Векторы называются *противоположными* ($\overline{a} = -\overline{b}$), если $|\overline{a}| = |\overline{b}|$ и $\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b}$.

Векторы, параллельные одной плоскости, называются *компланарными*.

Линейные операции над векторами

Суммой двух векторов является вектор, для нахождения которого можно пользоваться двумя правилами: правилом параллелограмма и правилом треугольника[2] .

Правило параллелограмма: *суммой* векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$, приложенных к одной точке, называется вектор, совпадающий с диагональю параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$. (Сумма приложена к той же точке, что и слагаемые.)

Правило треугольника: если начало вектора $\overline{b}$ совмещается с концом вектора $\overline{a}$, то *суммой* векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется вектор, направленный из начала вектора $\overline{a}$ в конец вектора $\overline{b}$.

[1]Такое определение не совсем корректно и влечет некоторые противоречия. Тем не менее в целях упрощения мы вынуждены ограничиться таким "определением". Во избежание упомянутых выше противоречий достаточно четко представлять себе, что вектор — это геометрический объект, заданный только *длиной* и *направлением*.

[2]Из геометрических соображений легко понять, что эти правила эквивалентны. Заметим тем не менее, что правило треугольника более удобно при суммировании более чем двух векторов.

Разностью векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется вектор $\overline{c}$, равный сумме вектора $\overline{a}$ и вектора, противоположного $\overline{b}$.

Произведением вектора $\overline{a}$ на действительное число λ называется вектор $\overline{b} = \lambda\overline{a}$ такой, что: 1) $|\overline{b}| = |\lambda||\overline{a}|$, 2) $\overline{b} \uparrow\uparrow \overline{a}$, если $\lambda > 0$, и $\overline{b} \uparrow\downarrow \overline{a}$, если $\lambda < 0$.

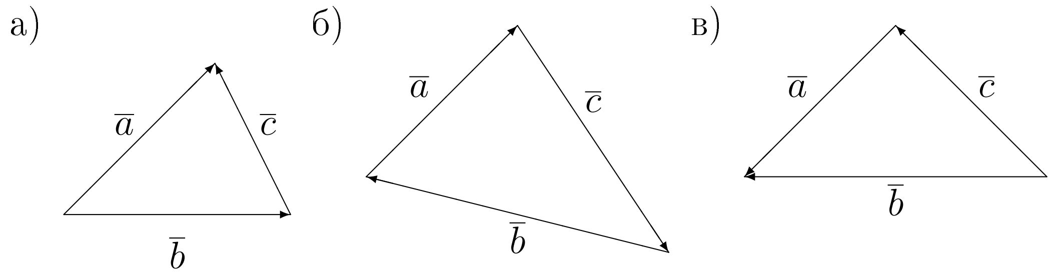
Из этого определения следует, что

$$\overline{a}||\overline{b} \iff \exists\lambda \in \mathbb{R}\ (\overline{a} = \lambda\overline{b} \text{ или } \overline{b} = \lambda\overline{a}). \tag{3.1}$$

Вектор $\overline{a}_0$ называется *ортом* вектора $\overline{a}$, если $|\overline{a_0}| = 1$ и $\overline{a_0} \uparrow\uparrow \overline{a}$. Вектор, длина которого равна 1, называется *единичным* вектором или просто *ортом.*

3.1. Задачи

1. Выразите вектор $\overline{c}$ через векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$.



2. Какому условию удовлетворяют векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$:

а) если $|\overline{a}+\overline{b}| = |\overline{a}-\overline{b}|$; б) $|\overline{a}+\overline{b}| > |\overline{a}-\overline{b}|$; в) $|\overline{a}+\overline{b}| < |\overline{a}-\overline{b}|$?

3. В параллелограмме $ABCD$ даны векторы $\overline{AB} = \overline{a}$ и $\overline{AD} = \overline{b}$, M — точка пересечения диагоналей. Найдите векторы $\overline{MA}$, $\overline{MB}$, $\overline{MC}$, $\overline{MD}$.

4. Даны векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$: $|\overline{a}| = 3, |\overline{b}| = 4$, $(\widehat{\overline{a},\overline{b}}) = 120^\circ$. Постройте вектор $\overline{c} = 2\overline{a} - 1,5\overline{b}$. Найдите его длину.

5. Докажите, что сумма векторов, соединяющих точку пересечения медиан треугольника с его вершинами, равна нулевому вектору.

6. В треугольнике OAB единичные векторы направлений $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$ равны соответственно $\overline{m}$ и $\overline{n}$, $\overline{OM}$ — медиана. Сделайте чертеж и выразите векторы $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{AB}$, $\overline{BA}$, $\overline{OM}$ через $\overline{m}$ и $\overline{n}$:

а) если $|\overline{OA}| = 2, |\overline{OB}| = 6$; б) $|\overline{OA}| = 6, |\overline{OB}| = 4$.

7. Даны три компланарных единичных вектора $\overline{m}$, $\overline{n}$, $\overline{p}$, $(\widehat{\overline{m},\overline{n}}) = \alpha$, $(\widehat{\overline{n},\overline{p}}) = \beta$. Постройте вектор $\overline{u} = a\overline{m} + b\overline{n} + c\overline{p}$:

а) если $\alpha = 30^\circ, \beta = 60^\circ$, $a = 2, b = 1, c = 3$;

б) $\alpha = 60^\circ, \beta = 30^\circ$, $a = 3, b = 1, c = -2$.

3.2. Пространство геометрических векторов

Множество геометрических векторов в совокупности с введенными в предыдущем разделе линейными операциями над ними будем называть *пространством геометрических векторов.*

Заметим, что на самом деле существует несколько пространств геометрических векторов, поскольку мы можем рассматривать векторы только на плоскости, или в трехмерном пространстве, а можем и вовсе на прямой. Договоримся только, что если мы рассматриваем пространство векторов на плоскости, то в него входят **все** векторы плоскости, и т. д. Будем обозначать эти пространства векторов, включающие векторы, лежащие на прямой, на плоскости или в пространстве, соответственно V_1, V_2 и V_3.

Заметим, что результат применения линейных операций над векторами не выводит нас за пределы рассматриваемого пространства геометрических векторов. В частности, пусть $\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_k$ — векторы из V_n ($n = 1, 2$ или 3). Тогда сумма этих векторов, умноженных на некоторые числа

$$\lambda_1\overline{a}_1 + \cdots + \lambda_k\overline{a}_k,$$

называется *линейной комбинацией* векторов $\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_k$ и тоже принадлежит V_n. Вещественные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ называются *коэффициентами линейной комбинации.*

Линейная комбинация, все коэффициенты которой равны нулю, называется *тривиальной.* Будем называть набор векторов *системой векторов.* Понятно, что тривиальная линейная комбинация любой системы векторов всегда равна нулевому вектору. А может ли нетривиальная линейная комбинация быть нулевой? Это уже зависит от заданной системы векторов.

Набор векторов $\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_k$ называется *линейно зависимым*, если найдется нулевая нетривиальная линейная комбинация векторов этой системы, т. е. существуют такие числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, не все одновременно равные нулю, что

$$\lambda_1\overline{a}_1 + \cdots + \lambda_k\overline{a}_k = \overline{0}. \tag{3.2}$$

В противном случае говорят, что векторы $\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_k$ *линейно независимы.* Таким образом, для линейно независимых векторов $\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_k$ равенство (3.2) возможно только тогда, когда $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$.

Пусть дана система векторов $\{a\} = \{\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_k\}$. *Базисом системы* *векторов* $\{a\}$ называется максимальная (по числу векторов) линейно независимая подсистема векторов из $\{a\}$.

Пример 1. Когда система из одного вектора $\{\overline{a}\}$ будет линейно зависимой?

Решение. Для одного вектора $\overline{a}$ соотношение (3.2) перепишется так:

$$\lambda\overline{a} = \overline{0}, \tag{3.3}$$

при этом линейная комбинация должна быть нетривиальная, т.е. $\lambda \neq 0$. Но при ненулевом λ соотношение (3.3) выполняется тогда и только тогда, когда $\overline{a}$ — нулевой вектор.

Ответ: $\overline{a}$ линейно зависим $\iff$ $\overline{a} = \overline{0}$. ∎

Пример 2. Когда система векторов $\{\overline{a}, \overline{b}\}$ линейно зависима?

Решение. Запишем нулевую линейную комбинацию для этой системы:

$$\lambda\overline{a} + \mu\overline{b} = \overline{0}, \tag{3.4}$$

и, поскольку линейная комбинация нетривиальная, это означает, что $\lambda \neq 0$ или $\mu \neq 0$. Пусть для определенности $\lambda \neq 0$. Тогда из (3.4) можно выразить $\overline{a}$:

$$\overline{a} = -\frac{\mu}{\lambda}\overline{b}.$$

Это последнее соотношение эквивалентно коллинеарности векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ (см. (3.1)). Также понятно, что из коллинеарности пары векторов следует их линейная зависимость.

Ответ: система векторов $\{\overline{a}, \overline{b}\}$ линейно зависима $\iff$ $\overline{a}||\overline{b}$. ∎

Максимальная (по включению) линейно независимая система векторов из V_n ($n = 1, 2$ или 3) называется *базисом* пространства V_n. Слова "максимальная по включению" в данном случае означают, что при добавлении к такой системе любого вектора из V_n теряется свойство линейной независимости. Таким образом, если $\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_n$ — базис пространства V_n, то:

1) векторы $\{\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_n\}$ образуют линейно независимую систему;

2) $\forall \overline{e} \in V_n$ система $\{\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_n, \overline{e}\}$ линейно зависима.

В каждом пространстве геометрических векторов существует множество различных базисов, но они все состоят из одного и того же числа векторов. Число векторов в базисе пространства называется *размерностью* этого пространства.

Пример 3. Базисом пространства V_1 является любой ненулевой вектор из этого пространства, поскольку любые два вектора из V_1 будут коллинеарны и, следовательно, линейно зависимы (см. пример 2). ∎

Следующие две теоремы определяют базисы в пространствах V_2 и V_3.

Теорема *Любая пара неколлинеарных векторов плоскости V_2 образует базис плоскости.*

Теорема *Любая тройка некомпланарных векторов пространства V_3 образует базис V_3.*

Таким образом, V_n может читаться как "пространство геометрических векторов размерности n".

Пусть $\{e\} = \{\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_n\}$ — базис пространства V_n, $\overline{x}$ — произвольный вектор из V_n. Тогда вектор $\overline{x}$ может быть *разложен по базису* $\{e\}$, т. е. может быть представлен, причем единственным образом, в виде линейной комбинации векторов из $\{e\}$.

Действительно, по определению базиса система векторов $\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_n$, $\overline{x}$ является линейно зависимой, следовательно, по определению линейной зависимости существует нулевая нетривиальная линейная комбинация векторов этой системы:

$$\lambda_1\overline{e}_1 + \cdots + \lambda_n\overline{e}_n + \lambda\overline{x} = \overline{0},$$

причем не все коэффициенты равны нулю. Заметим, что, хотя некоторые из коэффициентов могут быть нулевые, $\lambda \neq 0$. Действительно, если $\lambda = 0$, то $\lambda_1\overline{e}_1 + \cdots + \lambda_n\overline{e}_n = \overline{0}$, а это равенство для линейно независимой системы векторов $\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_n$ возможно только при всех нулевых коэффициентах, а наша линейная комбинация не является тривиальной. Поскольку $\lambda \neq 0$,

$$\overline{x} = -\frac{\lambda_1}{\lambda}\overline{e}_1 - \cdots - \frac{\lambda_n}{\lambda}\overline{e}_n \doteq x_1\overline{e}_1 + \cdots + x_n\overline{e}_n.$$

Числа $x_1, \ldots, x_n$ называются *координатами* вектора $\overline{x}$ в базисе $\{e\}$.

Пример 4. Определить, образуют ли векторы $\overline{e}_1(1,3,4)$, $\overline{e}_2(3,5,2)$ и $\overline{e}_3(1,0,2)$ базис пространства V_3.

Решение. Размерность V_3 равна трем, так что базис V_3 должен состоять также из трех векторов. Для того чтобы векторы $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$ и $\overline{e}_3$ образовывали базис, необходимо и достаточно, чтобы они были линейно независимыми. Запишем их нулевую линейную комбинацию

$$\lambda_1\overline{e}_1 + \lambda_2\overline{e}_2 + \lambda_3\overline{e}_3 = \overline{0}.$$

Теперь вместо всех векторов подставим столбцы их координат:

$$\lambda_1\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}3\\5\\2\end{pmatrix} + \lambda_3\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 3\lambda_1 \\ 4\lambda_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3\lambda_2 \\ 5\lambda_2 \\ 2\lambda_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_3 \\ 0 \\ 2\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 \\ 3\lambda_1 + 5\lambda_2 \\ 4\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 &= 0; \\ 3\lambda_1 + 5\lambda_2 &= 0; \\ 4\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 &= 0. \end{cases}$$

Таким образом, система векторов будет линейно независима тогда и только тогда, когда полученная система линейных уравнений будет иметь только нулевое (*тривиальное*) решение. Ясно, что у этой системы всегда существует нулевое решение, поэтому нас интересует, единственно ли ее решение? Если решение единственно, то система будет определенной (см. с. 35) и ее матрица будет невырожденной. Найдем определитель матрицы системы линейных уравнений:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -12 - 10 = -22 \neq 0.$$

Итак, система линейных уравнений определенная, т. е. имеет единственное решение и (поскольку она заведомо имеет нулевое решение), таким образом, не имеет ненулевых решений, следовательно, только тривиальная линейная комбинация векторов $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$ и $\overline{e}_3$ будет нулевой, значит, эта система векторов линейно независима и образует базис. ■

Пример 5. Найти координаты вектора $\overline{x} = (2, -3, 1)$ в базисе $\overline{e}_1 = (1, 1, 1)$, $\overline{e}_2 = (1, 1, 0)$, $\overline{e}_3 = (1, 0, 0)$.

Решение. Нам нужно найти такие числа x_1, x_2, x_3, что $\overline{x} = x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2 + x_3\overline{e}_3$. Записав это равенство в координатной форме (как в предыдущем примере), получим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 &= 2; \\ x_1 + x_2 &= -3; \\ x_1 &= 1. \end{cases}$$

Эту систему можно решать методом Крамера; то, что ее определитель не равен нулю, только подтверждает тот факт, что векторы $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$ и $\overline{e}_3$ образуют базис. Решая систему, получим $x_1 = 1$, $x_2 = -4$, $x_3 = 5$, или $\overline{x} = \overline{e}_1 - 4\overline{e}_2 + 5\overline{e}_3$. ■

3.2. Задачи

1. При каком значении λ из линейной независимости системы векторов $\{\overline{a}_1, \overline{a}_2\}$ вытекает линейная независимость системы $\{\lambda\overline{a}_1 + \overline{a}_2, \overline{a}_1 + \lambda\overline{a}_2\}$?

2. Найдите все значения λ, при которых вектор $\overline{b}$ линейно выражается через векторы $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, $\overline{a}_3$:

а) если $\overline{a}_1 = (2, 3, 5)$, $\overline{a}_2 = (3, 7, 8)$, $\overline{a}_3 = (1, -6, 1)$, $\overline{b} = (7, -2, \lambda)$;

б) $\overline{a}_1 = (4, 4, 3)$, $\overline{a}_2 = (7, 2, 1)$, $\overline{a}_3 = (4, 1, 6)$, $\overline{b} = (5, 9, \lambda)$.

3. Найдите все базисы системы векторов $\overline{a}_1 = (3, 2, 3)$, $\overline{a}_2 = (2, 3, 4)$, $\overline{a}_3 = (3, 2, 1)$, $\overline{a}_4 = (4, 1, -2)$.

4. Докажите, что векторы $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$ и $\overline{e}_3$ образуют базис. Найдите координаты вектора $\overline{x}$ в этом базисе:

а) $\overline{e}_1 = (1, 1, 1)$, $\overline{e}_2 = (1, 1, 0)$, $\overline{e}_3 = (1, 0, 0)$, $\overline{x} = (3, 2, 1)$;

б) $\overline{e}_1 = (1, 1, 1)$, $\overline{e}_2 = (1, 1, 2)$, $\overline{e}_3 = (1, 2, 3)$, $\overline{x} = (6, 9, 14)$;

в) $\overline{e}_1 = (2, 1, -3)$, $\overline{e}_2 = (3, 2, -5)$, $\overline{e}_3 = (1, -1, 1)$, $\overline{x} = (6, 2, -7)$;

г) $\overline{e}_1 = (1, 2, 1)$, $\overline{e}_2 = (2, 3, 3)$, $\overline{e}_3 = (3, 7, 1)$, $\overline{x} = (3, 1, 4)$.

5. Покажите, что тройка векторов, содержащая два коллинеарных вектора, линейно зависима.

6. Покажите, что для любых векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ и любых чисел α, β, γ система векторов $\alpha\overline{a} - \beta\overline{b}$, $\gamma\overline{b} - \alpha\overline{c}$, $\beta\overline{c} - \gamma\overline{a}$ линейно зависима.

7. Две системы векторов называются *эквивалентными*, если каждый вектор одной системы есть линейная комбинация векторов другой системы и наоборот. Покажите, что если три вектора связаны соотношением $\alpha\overline{a} + \beta\overline{b} + \gamma\overline{c} = \overline{0}$, где $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, $\gamma \neq 0$, то системы векторов $\{\overline{a}, \overline{b}\}$, $\{\overline{a}, \overline{c}\}$, $\{\overline{b}, \overline{c}\}$, $\{\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\}$ эквивалентны.

8. Когда система векторов имеет единственный базис?

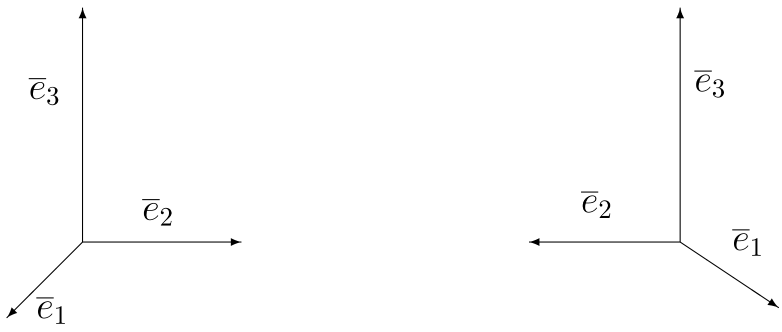
3.3. Декартов базис и система координат

В пространстве V_3 геометрических векторов рассмотрим различные базисы $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$ такие, что

$$\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3 \text{ попарно перпендикулярны и } |\overline{e}_1| = |\overline{e}_2| = |\overline{e}_3| = 1. \qquad (3.5)$$

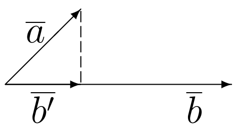
Такие базисы называются *ортонормированными*. Некоторые из них “похожи” на другие, т. е. совмещаются при подходящих поворотах. Если брать только “непохожие” базисы, то останется только два, будем говорить, *класса ориентации*[3]. Представители этих классов показаны на следующем рисунке.

[3] Более точное определение дано на с. 63.



правый *левый*

Правый ортонормированный базис в V_3 (удовлетворяющий свойству (3.5)) называется *декартовым прямоугольным базисом.* Обозначают такой базис $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$. Совокупность точки O (начала координат) и базиса $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$ называется *прямоугольной декартовой системой координат.*



Проекцией $\text{пр}_{\overline{b}}\overline{a}$ вектора $\overline{a}$ на вектор $\overline{b}$ называется длина вектора $\overline{b'}$, взятая со знаком "плюс", если $\overline{b} \uparrow\uparrow \overline{b'}$, и со знаком "минус", если $\overline{b} \uparrow\downarrow \overline{b'}$.

Координаты вектора $\overline{a}$ в декартовом прямоугольном базисе являются проекциями $\overline{a}$ на координатные оси:

$\overline{a} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$;

$x = \text{пр}_{\overline{i}}\overline{a}; y = \text{пр}_{\overline{j}}\overline{a}; z = \text{пр}_{\overline{k}}\overline{a}$.

Если α, β, γ — углы, которые вектор $\overline{a}$ составляет с векторами $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$, то:

$x = |\overline{a}|\cos\alpha; y = |\overline{a}|\cos\beta; z = |\overline{a}|\cos\gamma$.

$\overline{a}_0 = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \dfrac{1}{|\overline{a}|}(x, y, z)$.

Величины $\cos\alpha, \cos\beta$ и $\cos\gamma$ называются *направляющими косинусами* вектора $\overline{a}$ и связаны соотношением: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Длина вектора находится по формуле $|\overline{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Вектор $\overline{OM} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$ называется радиусом-вектором точки $M(x, y, z)$.

Если $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ — две точки в прямоугольной декартовой системе координат, то вектор $\overline{M_1M_2}$ имеет координаты

$$(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)^4.$$

Пусть $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ — две точки в прямоугольной декартовой системе координат, а точка M делит отрезок AB в отношении $\dfrac{|AM|}{|MB|} = \lambda$. Координаты точки M находятся по следующим формулам

[4]Т. е. координаты вектора находятся по правилу "из конца отнять начало".

деления отрезка в данном отношении:

$$x_M = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda};\ y_M = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda};\ z_M = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

Если точка M — середина отрезка AB, то $\lambda = 1$ и тогла $x_M = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, $y_M = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$, $z_M = \dfrac{z_1 + z_2}{2}$.

Замечание. Если точка M находится вне отрезка AB (так называемое *внешнее деление*, то значение λ берется отрицательным.

Пусть $\overline{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\overline{b} = (x_2, y_2, z_2)$ — векторы в прямоугольной декартовой системе координат. Тогда:

$$\overline{a} = \overline{b} \Longleftrightarrow x_1 = x_2;\ y_1 = y_2;\ z_1 = z_2;$$

$$\overline{a} \| \overline{b} \Longleftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2};$$

$$\overline{c} = \overline{a} + \overline{b} \Longleftrightarrow \overline{c} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2);$$

$$\overline{b} = \lambda \overline{a} \Longleftrightarrow \overline{b} = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1).$$

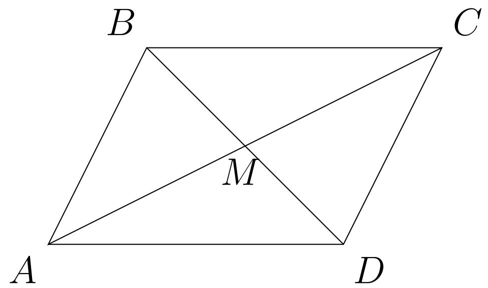
Пример 6. $\overline{a} = (3, 2, z); |\overline{a}| = 5; (\widehat{\overline{a}, Oz})$ — острый угол. Определить z.

Решение

$$|\overline{a}| = \sqrt{9 + 4 + z^2} = 5;$$

$$z^2 = 25 - 9 - 4; z^2 = 12; z = \sqrt{12}. \blacksquare$$

Пример 7. Даны смежные вершины параллелограмма $A(2, -3)$, $B(4, 2)$ и точка пересечения его диагоналей $M(7, 0)$. Найти координаты двух других вершин.



Решение. Найдем координаты вершины C. Так как $\dfrac{AC}{CM} = \dfrac{2}{1} = 2$ и точка C находится вне отрезка AM, то точка C делит отрезок AM в отношении $\lambda = -2$. Применим формулу деления отрезка в данном отношении:

$$x_C = \frac{x_A - 2x_M}{1 - 2} = \frac{2 - 2 \cdot 7}{-1} = 12,\ \ y_C = \frac{y_A - 2y_M}{1 - 2} = \frac{-2 - 2 \cdot 0}{-1} = 3.$$

Аналогично найдем координаты точки D:

$$x_D = \frac{x_B - 2x_M}{1-2} = \frac{4 - 2\cdot 7}{-1} = 10,\; y_D = \frac{y_B - 2y_M}{1-2} = \frac{2 - 2\cdot 0}{-1} = -2.$$

Проверим правильность решения, найдя координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{DC}$ (при правильном решении они должны совпадать). $\overline{AB} = (4-2, 2-(-3)) = (2,5)$; $\overline{DC} = (12-10, 3-(-2) = (2,5) = \overline{AB}$. Проверка подтверждает правильность найденного решения. ■

3.3. Задачи

1. Укажите геометрический смысл проекций единичного вектора.

2. Докажите, что точки $A(3,-1,2)$, $B(1,2,-1)$, $C(-1,1,-3)$, $D(3,-5,3)$ — вершины трапеции $ABCD$.

3. Найдите вектор $\overline{b}$, если $|\overline{b}| = 75$, $\overline{c} = 16\overline{i} - 15\overline{j} + 12\overline{k}$ и $\overline{b} \uparrow\downarrow \overline{c}$.

4. Даны точки $A(1,2,3)$ и $B(3,-4,6)$. Постройте вектор $\overline{AB}$, его проекции на оси координат. Определите длину и направляющие косинусы вектора $\overline{AB}$.

5. На плоскости даны точки: $A(1,-2)$, $B(2,1)$, $C(3,2)$, $D(-2,3)$. Докажите, что $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ — базис. Разложите вектор $\overline{CD}$ по этому базису.

6. Вектор $\overline{r}$ составляет с осями координат равные острые углы, $|\overline{r}| = 2\sqrt{3}$. Определите координаты вектора $\overline{r}$.

7. Зная одну из вершин $\triangle ABC$: $A(2,-5,3)$ и векторы, совпадающие с двумя его сторонами $\overline{AB} = (4,1,2)$ и $\overline{BC} = (3,-2,5)$, найдите остальные вершины и сторону $\overline{CA}$.

8. Даны векторы $\overline{p} = (3,2,1)$, $\overline{q} = (-1,1,-2)$, $\overline{r} = (2,1,-3)$. Найдите разложение вектора $\overline{s} = (11,2,5)$ по базису $\overline{p}, \overline{q}, \overline{r}$.

9. Основанием правильного тетраэдра $SABC$ служит треугольник ABC со стороной 1. SO — высота пирамиды. Найдите координаты векторов $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, $\overline{OS}$, если за оси прямоугольной декартовой системы координат принять прямые OA, OK, OS. OK лежит в плоскости ABC, и точки K и C лежат по одну сторону от прямой OA[5].

10. В треугольнике с вершинами $A(3,2,1)$, $B(-1,0,2)$, $C(1,4,2)$ найдите длину медианы AM.

11. Отрезок AB разделен на 3 равные части точками M_1 и M_2 начиная от точки A. Найти координаты точек деления.

12. Докажите, что координаты точки пересечения медиан M треугольника Δ_{ABC} могут быть найдены по формулам $x_M = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3}$, $y_M = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3}$, $z_M = \dfrac{z_A + z_B + z_C}{3}$.

[5] Таким образом, векторы $\overline{OA}$, $\overline{OK}$ и $\overline{OS}$ образуют правую тройку. См. с. 63.

Глава 4

Произведения векторов

4.1. Скалярное произведение

Скалярным произведением двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется число, равное произведению длин векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ на косинус угла между ними. Обозначается через $(\overline{a}, \overline{b})$ или $\overline{a}\overline{b}$:

$$\overline{a}\overline{b} = |\overline{a}||\overline{b}|\cos(\widehat{\overline{a}, \overline{b}}) = |\overline{a}|\text{пр}_{\overline{a}}\overline{b} = |\overline{b}|\text{пр}_{\overline{b}}\overline{a}.$$

Свойства скалярного произведения

1) $\overline{a}\overline{b} = \overline{b}\overline{a}$;
2) $\overline{a}(\overline{b} + \overline{c}) = \overline{a}\overline{b} + \overline{a}\overline{c}$;
3) $(\lambda\overline{a})\overline{b} = \lambda(\overline{a}\overline{b})$;
4) $\overline{a}^2 = \overline{a}\overline{a} = |\overline{a}|^2$;
5) $\cos(\widehat{\overline{a}, \overline{b}}) = \dfrac{\overline{a}\overline{b}}{|\overline{a}||\overline{b}|}$;
6) $\text{пр}_{\overline{b}}\overline{a} = \dfrac{\overline{a}\overline{b}}{|\overline{b}|}$ (геометрический смысл);
7) $\overline{a}\overline{b} = 0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{rcl} \overline{a} & \perp & \overline{b}, \\ |\overline{a}| & = & 0, \\ |\overline{b}| & = & 0; \end{array}\right.$
8) работа силы $\overline{\mathcal{F}}$, действующей на материальную точку при перемещении ее из начала в конец вектора $\overline{s}$, вычисляется по формуле: $A = \overline{\mathcal{F}}\overline{s}$ (физический смысл).

Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называются *ортогональными*, если $\overline{a}\overline{b} = 0$. Понятие ортогональности векторов эквивалентно понятию перпендикулярности их направлений, если считать, что нулевой вектор перпендикулярен любому вектору[1]. Обозначать эту ситуацию мы будем через $\overline{a} \perp \overline{b}$. Если векторы $\overline{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\overline{b} = (x_2, y_2, z_2)$ заданы своими координатами в прямоугольном декартовом базисе[2] , то их скалярное произведение вычисляется по формуле

$$\overline{a}\overline{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2,$$

в частности,

$$\overline{a}^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2;\ |\overline{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2};$$

[1]Это вполне разумное допущение, и мы так и будем считать впредь. То, что нулевой вектор не имеет направления, следует понимать так, что он **направлен во все стороны одновременно**. Отсюда, в частности, вытекает то, что нулевой вектор параллелен любому вектору, и в то же время он перпендикулярен любому вектору, в том числе самому себе.

[2]Эта же формула верна в любом другом ортонормированном базисе.

$$\cos(\widehat{\overline{a},\overline{b}}) = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Пример 1. Даны вершины треугольника ABC: $A(1,-1,2)$, $B(0,3,-2)$ и $C(1,2,0)$. Найти угол при вершине C, проекцию $\overline{AB}$ на $\overline{AC}$, длину высоты BD, опущенной из вершины B.

Решение

$$\cos C = \frac{\overline{CB}\cdot\overline{CA}}{|\overline{CB}||\overline{CA}|};$$

$$\overline{CB} = (-1,1,-2);\ \overline{CA} = (0,-3,2);\ \overline{CB}\cdot\overline{CA} = 0-3-4 = -7;$$

$$|\overline{CB}| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6};\ |\overline{CA}| = \sqrt{0+9+4} = \sqrt{13}.$$

$$\cos C = \frac{-7}{\sqrt{6\cdot 13}} = -\frac{7}{\sqrt{78}} \Rightarrow C \text{ — тупой угол.}$$

$$\text{пр}_{\overline{AC}}\overline{AB} = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{|\overline{AC}|};\quad \overline{AB} = (-1,4,-4);\ \ \overline{AC} = (0,3,-2).$$

$$\text{пр}_{\overline{AC}}\overline{AB} = \frac{(-1,4,-1)(0,3,-2)}{\sqrt{0+9+4}} = \frac{12+2}{\sqrt{13}} = \frac{14}{\sqrt{13}}.$$

$$BD = \sqrt{AB^2 - \left(\text{пр}_{\overline{AC}}\overline{AB}\right)^2} = \sqrt{(1+16+16) - \frac{196}{13}} =$$

$$= \sqrt{\frac{429-196}{13}} = \sqrt{\frac{233}{13}}.$$

Ответ. $C = \pi - \arccos\frac{7}{\sqrt{78}}$, $\text{пр}_{\overline{AC}}\overline{AB} = \frac{14}{\sqrt{13}}$, $BD = \sqrt{\frac{233}{13}}$. ■

4.1. Задачи

1. В каком случае скалярное произведение векторов равно проекции одного вектора на направление другого?

2. Проверьте, верны ли равенства, если $a = |\overline{a}|$, $b = |\overline{b}|$:

$$\text{а) } a\overline{a} = a^2;\quad \text{б) } \overline{a}^2 a = a^3;\quad \text{в) } (\overline{a}\,\overline{a})\overline{b} = \overline{a}^2\overline{b};$$

$$\text{г) } a^2\overline{a} = a^3;\quad \text{д) } (\overline{a}\overline{b})^2 = \overline{a}^2\overline{b}^2.$$

3. Дан вектор $\overline{a} = 2\overline{m} - \overline{n}$, где $\overline{m}$ и $\overline{n}$ — единичные векторы, угол между которыми $120°$. Найдите $\cos(\widehat{\overline{a},\overline{n}})$, $\cos(\widehat{\overline{a},\overline{m}})$.

4. При каком значении параметра α векторы $\overline{a} = \alpha\overline{i} - 3\overline{j} + 2\overline{k}$ и $\overline{b} = \overline{i} + 2\overline{j} - \alpha\overline{k}$ ортогональны?

5. На осях Ox, Oy, Oz отложены отрезки, равные 4, и на них построен куб. Пусть M — центр верхней грани, N — центр правой боковой грани. Определите векторы $\overline{OM}$ и $\overline{ON}$ и угол между ними.

6. Найдите проекцию вектора $\overline{a} = (4, -3, 2)$ на ось, составляющую с координатными осями равные острые углы.

7. Вычислите работу, производимую силой $\overline{\mathcal{F}} = (3, -2, -5)$, если точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения $A(2, -3, 5)$ в положение $B(3, -2, -1)$.

8. Даны векторы $\overline{a} = (3, -1, 5)$ и $\overline{b} = (1, 2, -3)$. Найдите вектор $\overline{m}$, если $\overline{m} \perp Oz$, $\overline{m}\,\overline{a} = 9$, $\overline{m}\,\overline{b} = -4$.

9. В плоскости xOy найдите вектор $\overline{p}$, ортогональный вектору $\overline{a} = (5, -3, 4)$ и имеющий одинаковую с ним длину.

10. Найдите угол между биссектрисами углов xOy и yOz.

11. Единичные векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ удовлетворяют условию $\overline{a} + \overline{b} + \overline{c} = 0$. Вычислите $\overline{a}\overline{b} + \overline{b}\overline{c} + \overline{c}\,\overline{a}$.

12. Докажите, что вектор $\overline{p} = (\overline{a}\overline{c})\overline{b} - (\overline{a}\overline{b})\overline{c}$ ортогонален вектору $\overline{a}$.

13. При каком условии вектор $(\overline{a} + \overline{b})$ ортогонален вектору $(\overline{a} - \overline{b})$?

14. Упростите:
$(3\overline{i} - 2\overline{j})\overline{j} + (\overline{j} - 2\overline{k})\overline{j} - (\overline{i} - 2\overline{j})^2$.

15. Найдите угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если:

а) $|\overline{a}| = 2$, $|\overline{b}| = 1$, $(\widehat{\overline{a}, \overline{b}}) = \dfrac{\pi}{3}$;

б) $|\overline{a}| = 3$, $|\overline{b}| = 2$, $(\widehat{\overline{a}, \overline{b}}) = \dfrac{2\pi}{3}$.

16. Какой угол образуют единичные векторы $\overline{p}$ и $\overline{q}$, если векторы $\overline{a} = \overline{p} + 2\overline{q}$ и $\overline{b} = 5\overline{p} - 4\overline{q}$: а) перпендикулярны; б) параллельны?

4.2. Векторное произведение

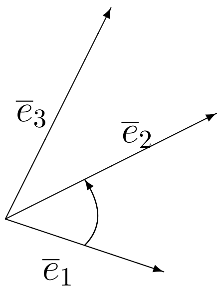
Упорядоченная тройка некомпланарных векторов $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ называется *правой*, если для наблюдателя, находящегося в конце вектора $\overline{e}_3$, кратчайший поворот от $\overline{e}_1$ к $\overline{e}_2$ происходит против часовой стрелки. В противном случае тройка называется *левой*[3]. *Векторным произведением* векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ (обозначается $[\overline{a}, \overline{b}]$ или $\overline{a} \times \overline{b}$) называется вектор $\overline{c}$, определяемый следующими условиями:

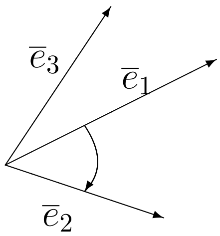
1) $\overline{c} \perp \overline{a}$, $\overline{c} \perp \overline{b}$;

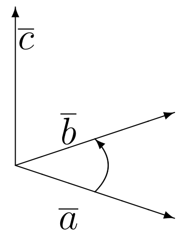
2) $|\overline{c}| = |\overline{a}||\overline{b}| \sin(\widehat{\overline{a}, \overline{b}})$;

3) если $\overline{a} \not\parallel \overline{b}$, то векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ образуют правую тройку.

[3]Заметим, что это определение согласуется с рисунком на с. 57.







а) правая тройка; б) левая тройка; в) $\overline{c} = \overline{a} \times \overline{b}$.

Заметим, что векторное произведение, в отличие от скалярного, задается только в трехмерном пространстве геометрических векторов V_3.

Свойства векторного произведения

1) $\overline{a} \| \overline{b} \Longleftrightarrow \overline{a} \times \overline{b} = \overline{0}$ (критерий коллинеарности векторов);

2) $\overline{a} \times \overline{b} = -\overline{b} \times \overline{a}$;

3) $\lambda \overline{a} \times \overline{b} = \lambda(\overline{a} \times \overline{b})$;

4) $(\overline{a} + \overline{b}) \times \overline{c} = \overline{a} \times \overline{c} + \overline{b} \times \overline{c}$;

5) площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$, вычисляется по формуле $S = |\overline{a} \times \overline{b}|$ (геометрический смысл).

Если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ заданы координатами $\overline{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\overline{b} = (x_2, y_2, z_2)$ в прямоугольном декартовом базисе, то

$$\overline{a} \times \overline{b} = (y_1 z_2 - y_2 z_1, x_2 z_1 - x_1 z_2, x_1 y_2 - x_2 y_1),$$

или (в символической записи[4])

$$\overline{a} \times \overline{b} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \overline{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \overline{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \overline{k}.$$

Механический смысл векторного произведения состоит в следующем: если $\overline{F}$ — вектор силы, а $\overline{r}$ — радиус-вектор точки приложения силы, имеющий свое начало в точке A , $m_A(\overline{F})$ —момент силы $\overline{F}$ относительно точки A, то

$$m_A(\overline{F}) = \overline{r} \times \overline{F}.$$

Пример 2. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a} = 2\overline{m} + \overline{n}$ и $\overline{b} = \overline{m} - 2\overline{n}$, где $|\overline{m}| = 3$, $|\overline{n}| = 1$; $(\widehat{\overline{m}, \overline{n}}) = \dfrac{2\pi}{3}$.

Решение. $S = |\overline{a} \times \overline{b}|$; $\overline{a} \times \overline{b} = (2\overline{m} + \overline{n}) \times (\overline{m} - 2\overline{n}) =$

$$= 2\overline{m} \times \overline{m} - 4\overline{m} \times \overline{n} + \overline{n} \times \overline{m} - 2\overline{n} \times \overline{n} = 4\overline{n} \times \overline{m} + \overline{n} \times \overline{m} = 5\overline{n} \times \overline{m}.$$

[4] См. пример 4 со с. 31.

$$S = |5\overline{n} \times \overline{m}| = 5|\overline{n}||\overline{m}| \sin \frac{2\pi}{3} = 5 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \underline{\frac{15\sqrt{3}}{2}}. \ \blacksquare$$

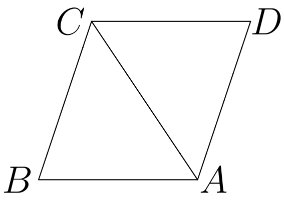
Пример 3. Найти площадь треугольника ABC: $A(1, 2, 3)$; $B(3, 2, 1)$; $C(1, -1, 0)$.

Решение. Если достроить треугольник ABC до параллелограмма $ABCD$, то $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2} S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}|\overline{BA} \times \overline{BC}|$;

$\overline{BA} = (-2, 0, 2)$, $\overline{BC} = (-2, -3, -1)$;

$$\overline{BA} \times \overline{BC} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ -2 & 0 & 2 \\ -2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 6\overline{i} - 6\overline{j} + 6\overline{k};$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{36 + 36 + 36} = \underline{3\sqrt{3}}. \ \blacksquare$$



4.2. Задачи

1. Можно ли сделать вывод, что $\overline{a} = \overline{c}$, если $\overline{a} \times \overline{b} = \overline{c} \times \overline{b}$?

2. При каком условии ненулевые векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{a} \times \overline{b}$ образуют базис трехмерного пространства?

3. Докажите равенство

$$\operatorname{tg}(\widehat{\overline{a}, \overline{b}}) = \frac{|\overline{a} \times \overline{b}|}{\overline{a}\overline{b}}.$$

4. Каким координатным плоскостям параллельны векторы $\overline{a} \times \overline{i}$, $\overline{a} \times \overline{j}$, $\overline{a} \times \overline{k}$?

5. Даны вершины треугольника ABC: $A(1, -1, 2)$, $B(5, -6, 2)$, $C(1, 3, -1)$. Вычислите длину высоты, опущенной из вершины B.

6. Сила $\overline{\mathcal{P}} = (2, 2, 9)$ приложена к точке $A(4, 2, -3)$. Определите величину и направляющие косинусы момента силы относительно точки $C(2, 4, 0)$.

7. С помощью векторного произведения найдите вектор $\overline{m}$, зная, что он ортогонален векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$, и $\overline{m} \cdot \overline{c} = 10$. $\overline{a} = (2, -3, 1)$, $\overline{b} = (1, -2, 3)$, $\overline{c} = (1, 2, -7)$.

8. Зная две стороны треугольника ABC: $\overline{AB} = 3\overline{p} - 4\overline{q}$ и $\overline{BC} = \overline{p} + 5\overline{q}$, вычислите длину его высоты CD, если:

а) $|\overline{p}| = |\overline{q}| = 1$, $(\widehat{\overline{p}, \overline{q}}) = \dfrac{\pi}{2}$;

б) $|\overline{p}| = 2$, $|\overline{q}| = 3$, $(\widehat{\overline{p}, \overline{q}}) = \dfrac{\pi}{3}$.

9. Вектор $\overline{m}$ перпендикулярен векторам $\overline{a} = (4, -2, -3)$ и $\overline{b} = (0, 1, 3)$ и образует с осью Oy тупой угол. $|\overline{m}| = 26$. Найдите координаты вектора $\overline{m}$.

10. Найдите вектор $\overline{m}$, если $\overline{m}\overline{j} = 3$, $\overline{m} \times \overline{j} = -2\overline{k}$.

11. Дано: $\overline{a} \times \overline{b} = \overline{c} \times \overline{d}$, $\overline{a} \times \overline{c} = \overline{b} \times \overline{d}$. Докажите, что $(\overline{a} - \overline{d})$ и $(\overline{b} - \overline{c})$ — коллинеарны.

12. Найдите $|\overline{a} \times \overline{b}|$, если $|\overline{a}| = 10$, $|\overline{b}| = 2$ и $\overline{a}\overline{b} = 12$.

13. Угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$ равен $\dfrac{\pi}{4}$; $|\overline{a}| = |\overline{b}| = 5$. Найдите площадь треугольника, построенного на векторах $\overline{a} - 2\overline{b}$ и $3\overline{a} + 2\overline{b}$.

14. Определите и постройте вектор $\overline{c} = \overline{a} \times \overline{b}$, если $\overline{a} = 2\overline{i} + 3\overline{j}$, $\overline{b} = 3\overline{j} + 2\overline{k}$.

15. Докажите, что:

а) $(\overline{a} \times \overline{b})^2 \leq \overline{a}^2\overline{b}^2$;

б) $\forall\ \overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d} \in V_3$ ($\overline{a} \times \overline{d}$, $\overline{b} \times \overline{d}$, $\overline{c} \times \overline{d}$ — компланарны);

в) $(\overline{a} \times \overline{b})^2 + (\overline{a}\overline{b})^2 = \overline{a}^2\overline{b}^2$.

16. Упростите:

а) $(\overline{a} + \overline{b}) \times (\overline{a} - \overline{b}) + 3\overline{a} \times (\overline{a} + 2\overline{b}) + (2\overline{a} + 3\overline{b}) \times \overline{a}$;

б) $(\overline{a} + 2\overline{b} - 3\overline{c}) \times (\overline{a} - \overline{b}) + (\overline{a} + \overline{c}) \times (\overline{b} + \overline{c}) + (3\overline{a} + \overline{b}) \times (\overline{b} - \overline{c})$.

17. Вычислите площадь параллелограмма, диагонали которого определяют векторы $\overline{d}_1 = 3\overline{m} + \overline{n}$ и $\overline{d}_2 = \overline{m} - 5\overline{n}$, если $|\overline{m}| = |\overline{n}| = 1$, $(\widehat{\overline{m}, \overline{n}}) = \dfrac{\pi}{4}$.

4.3. Смешанное произведение

Смешанным произведением упорядоченной тройки векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ называется число, равное скалярному произведению вектора $\overline{a} \times \overline{b}$ на вектор $\overline{c}$. Обозначение: $\overline{a}\overline{b}\overline{c} = (\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = (\overline{a} \times \overline{b})\overline{c}$. Так же как и векторное, смешанное произведение определяется только в V_3.

Свойства смешанного произведения

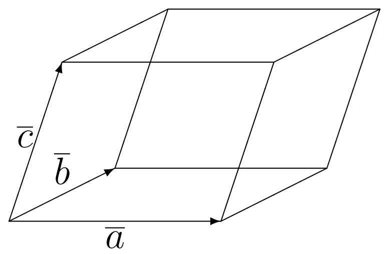
1) $\overline{a}\overline{b}\overline{c} = \overline{b}\overline{c}\overline{a} = \overline{c}\overline{a}\overline{b} = -\overline{a}\overline{c}\overline{b} = -\overline{b}\overline{a}\overline{c} = -\overline{c}\overline{b}\overline{a}$;

2) $(\lambda\overline{a})\overline{b}\overline{c} = \lambda(\overline{a}\overline{b}\overline{c})$;

3) $(\overline{a_1} + \overline{a_2})\overline{b}\overline{c} = \overline{a_1}\overline{b}\overline{c} + \overline{a_2}\overline{b}\overline{c}$;

4) векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда $\overline{a}\overline{b}\overline{c} = 0$.

Геометрический смысл смешанного произведения



Модуль смешанного произведения $\overline{a}\overline{b}\overline{c}$ равен объему параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{a}, \overline{b}$ и $\overline{c}$, а знак отвечает за ориентацию тройки $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$: $\overline{a}\overline{b}\overline{c} > 0$, если тройка правая, и $\overline{a}\overline{b}\overline{c} < 0$ в противном случае[5].

Если векторы заданы своими координатами в декартовом прямоугольном базисе: $\overline{a} = (x_1, y_1, z_1), \overline{b} = (x_2, y_2, z_2), \overline{c} = (x_3, y_3, z_3)$, то их смешанное произведение вычисляется по формуле

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Пример 4. Проверить, лежат ли точки $A(2, -3, 4)$, $B(2, 3, -4)$, $C(-2, 3, 4)$, $D(2, 3, 4)$ в одной плоскости, найти объем тетраэдра $ABCD$.

Решение. Найдем векторы: $\overline{AB}(0, 6, -8)$; $\overline{AC}(-4, 6, 0)$; $\overline{AD}(0, 6, 0)$. Вычислим их смешанное произведение

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD} = \begin{vmatrix} 0 & 6 & -8 \\ -4 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \end{vmatrix} = -6 \cdot (-32) = 192.$$

Поскольку смешанное произведение отлично от нуля, векторы некомпланарны и, следовательно, точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости.

Так как объем тетраэдра равен $\frac{1}{6}$ объема соответствующего параллелепипеда, имеем

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}|\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD}| = \frac{1}{6} \cdot 192 = 32. \blacksquare$$

4.3. Задачи

1. В каком случае параллелепипед, построенный на трех векторах, имеет наибольший объем?

2. Какой геометрический смысл имеет выражение $\dfrac{|\overline{a}\overline{b}\overline{c}|}{|\overline{a} \times \overline{b}|}$ для пирамиды, построенной на некомпланарных векторах $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$?

3. Вектор $\overline{c}$ перпендикулярен векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$, угол между которыми равен $\frac{\pi}{6}$, $|\overline{a}| = 6$, $|\overline{b}| = |\overline{c}| = 3$. Вычислите $|\overline{a}\overline{b}\overline{c}|$.

[5] А если $\overline{a}\overline{b}\overline{c} = 0$, то по свойству 4) векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ компланарны, т. е. линейно зависимы, и, следовательно, вопрос об ориентации этой тройки не ставится.

4. Докажите тождество: $(\overline{a}+\overline{b})(\overline{b}+\overline{c})(\overline{c}+\overline{a}) = 2\overline{a}\overline{b}\overline{c}$.

5. Докажите аналитически и геометрически, что для любых векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ векторы $(\overline{a}-\overline{b})$, $(\overline{b}-\overline{c})$, $(\overline{c}-\overline{a})$ — компланарны.

6. Даны вершины пирамиды $OABC$. Вычислите объем, площадь грани ABC, высоту пирамиды, опущенную на эту грань, если:

а) $A(5,2,0), B(2,5,0), C(1,2,4)$;

б) $A(3,5,6), B(3,6,5), C(0,2,4)$.

7. Докажите, что векторы $\overline{a} = -\overline{i} + 3\overline{j} + 2\overline{k}$, $\overline{b} = 2\overline{i} - 3\overline{j} - 4\overline{k}$, $\overline{c} = -3\overline{i} + 12\overline{j} + 6\overline{k}$ компланарны. Разложите вектор $\overline{c}$ в базисе $\overline{a}, \overline{b}$.

8. Найдите объем тетраэдра, расположенного в первом октанте, построенного на векторах $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}$, если эти векторы направлены по биссектрисам координатных углов и длина каждого из них равна двум.

9. Докажите, что объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{a}, \overline{b}, \overline{a}\times\overline{b}$, равен $|\overline{a}\times\overline{b}|^2$.

10. Объем тетраэдра $ABCD$ равен 5. $A(2,1,-1)$, $B(3,0,1)$, $C(2,-1,3)$. Найдите вершину D, если она лежит на оси Oy.

11. Докажите:

а) $(\overline{a}+\overline{b})\overline{a}(\overline{c}+\overline{b}) = -\overline{a}\overline{b}\overline{c}$;

б) $|\overline{a}\overline{b}\overline{c}| \le |\overline{a}|\,|\overline{b}|\,|\overline{c}|$;

в) если $\overline{a}\times\overline{b} + \overline{b}\times\overline{c} + \overline{c}\times\overline{a} = \overline{0}$, то $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ — компланарны.

12. Докажите, что для любых чисел α и β выполняется равенство

$$\overline{a}\overline{b}(\overline{c} + \alpha\overline{a} + \beta\overline{b}) = \overline{a}\overline{b}\overline{c}.$$

Глава 5

Линейные геометрические объекты

5.1. Прямая на плоскости

Аналитический подход к изучению геометрических объектов, таких как кривые и поверхности, заключается в описании этих объектов их *уравнениями.* Уравнение $F(x, y) = 0$ называется *уравнением кривой* Γ (на плоскости), если выполняются два условия.

1. Координаты любой точки $M(x, y) \in \Gamma$ удовлетворяют уравнению $F(x, y) = 0$;

2. Любая точка $M(x, y)$, координаты которой удовлетворяют уравнению $F(x, y) = 0$, принадлежит кривой Γ.

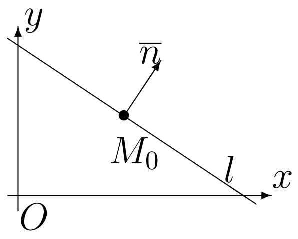
Таким образом, кривая Γ состоит из всех точек, координаты которых удовлетворяют ее уравнению.

Для того чтобы задать прямую, нужно определить ее направление и расположение. Направление определяет класс параллельных прямых, и, для того чтобы из них выбрать одну, достаточно указать координаты любой точки на прямой. С другой стороны, если зафиксировать точку прямой, то мы зададим класс прямых, проходящих через данную точку. Все они отличаются направлением, задав которое мы определим прямую. Таким образом, для того чтобы определить прямую (и в дальнейшем построить ее уравнение), требуется задать ее *направление* и произвольную *точку* на прямой.

Направление удобнее всего задавать с помощью вектора. На плоскости это можно сделать двумя способами. Ненулевой вектор, направление которого перпендикулярно прямой l, называется *нормальным*, а ненулевой вектор, направление которого параллельно прямой, *направляющим* вектором прямой l. Направление прямой на плоскости может быть задано с помощью любого из описанных векторов. При этом длина нормального и направляющего векторов не имеет значения, поскольку эти векторы служат только для задания направления прямой.

Заметим также, что нормальный и направляющий векторы прямой ортогональны. Следовательно, если нормальный вектор имеет координаты (A, B), то в качестве направляющего вектора можно взять вектор с координатами $(-B, A)$.

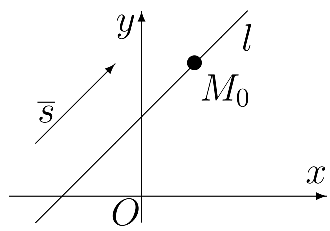
Приведем некоторые способы задания прямой.



1) Прямая, проходящая через точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно (нормальному) вектору $\overline{n} = (A, B)$, описывается уравнением $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$. Таким образом, для нахождения уравнения прямой на плоскости нам достаточно знать координаты некоторой точки, принадлежащей прямой, и координаты некоторого нормального вектора прямой.

2) $Ax + By + C = 0$ — общее уравнение прямой. Уравнение такого вида получается из уравнения вида 1) раскрыванием скобок. Здесь вектор $\overline{n} = (A, B)$ — нормальный, а вектор $\overline{s} = (-B, A)$ — направляющий.

3) Прямая, проходящая через точку $M_0(x_0, y_0)$ параллельно (направляющему) вектору $\overline{s} = (p, q)$, описывается *каноническим* уравнением

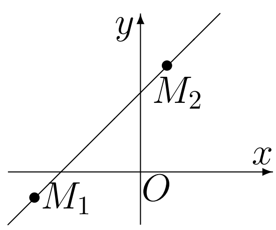


$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q}.$$

Таким образом, можно задать прямую и с помощью направляющего вектора. Также можно записать *параметрические* уравнения

$$\begin{cases} x = x_0 + pt; \\ y = y_0 + qt, \end{cases}$$

где t — параметр, изменяющийся от $-\infty$ до ∞.



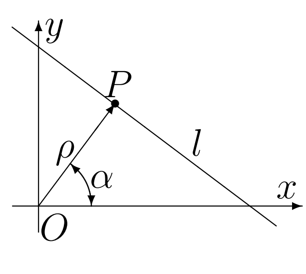
4) Прямая, проходящая через две несовпадающие точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, описывается уравнением

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

или общим уравнением

$$(y_2 - y_1)(x - x_1) + (x_1 - x_2)(y - y_1) = 0.$$

5) $x\cos\alpha + y\sin\alpha - \rho = 0, \rho \geq 0$ — *нормальное уравнение* прямой l, радиус-вектор $\overline{OP} \perp l$, $|\overline{OP}| = \rho$; $(\widehat{\overline{OP}, Ox}) = \alpha$. Чтобы перейти от общего уравнения 2) к нормальному, надо все его члены умножить на нормирующий множитель $\mu = \dfrac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$, знак μ противоположен знаку C.



Отклонение точки $M(x_1, y_1)$ от прямой l, заданной уравнением 5), вычисляется по формуле

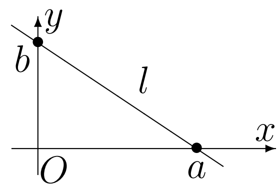
$$\delta(M, l) = x_1 \cos\alpha + y_1 \sin\alpha - \rho.$$

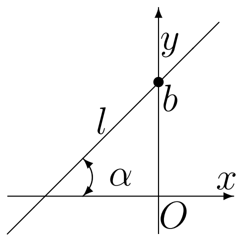
Если точка M и начало координат находятся по разные стороны от прямой l, то $\delta > 0$, а если по одну сторону, то $\delta < 0$. Расстояние от точки M до прямой l равно модулю отклонения

$$\rho(M, l) = |x_1 \cos\alpha + y_1 \sin\alpha - \rho| = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

6) Уравнение прямой в отрезках

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$



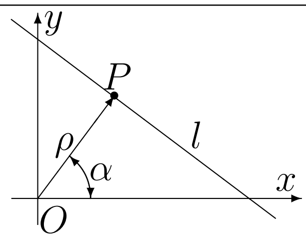
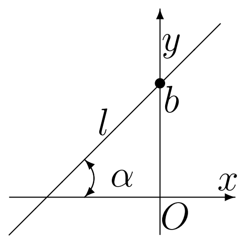


7) Если в общем уравнении 1) $B \neq 0$, то, выразив y, получаем уравнение вида $y = kx + b$, где $k = \mathrm{tg}\alpha$ — *угловой коэффициент* прямой l.

А теперь составим удобную таблицу различных уравнений прямой на плоскости.

Название уравнения	Вид уравнения	Геометрический смысл параметров
1. Общее уравнение прямой	$Ax + By + C = 0$	$\overline{n} = (A, B) \perp l$; $\overline{s} = (-B, A) \parallel l$
2. Уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору	$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$	$\overline{n} = (A, B) \perp l$; $M_0(x_0, y_0) \in l$
3. Каноническое уравнение прямой	$\dfrac{x - x_0}{p} = \dfrac{y - y_0}{q}$	$\overline{s} = (p, q) \parallel l$; $M_0(x_0, y_0) \in l$
4. Параметрические уравнения прямой	$\begin{cases} x = x_0 + pt; \\ y = y_0 + qt \end{cases}$	$\overline{s} = (p, q) \parallel l$; $M_0(x_0, y_0) \in l$
5. Уравнение прямой, проходящей через две точки	$\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$; $(y_2 - y_1)(x - x_1) +$ $+ (x_1 - x_2)(y - y_1) = 0$	$M_1(x_1, y_1) \in l$; $M_2(x_2, y_2) \in l$.

Окончание таблицы

Название уравнения	Вид уравнения	Геометрический смысл параметров
6. Нормальное уравнение прямой	$x\cos\alpha + y\sin\alpha - \rho = 0$	 $\rho \geqslant 0$ — расстояние от начала координат до прямой
7. Уравнение прямой в отрезках на осях ($l \nparallel Ox$, $l \nparallel Oy$, $O(0,0) \notin l$)	$\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$	a — отрезок на Ox, b — отрезок на Oy
8. Уравнение прямой с угловым коэффициентом ($l \nparallel Oy$)	$y = kx + b$	 $k = \mathrm{tg}\alpha$ — угловой коэффициент, b — отрезок на Oy
9. Уравнение прямой с заданным угловым коэффициентом, проходящей через данную точку	$y - y_0 = k(x - x_0)$	k — угловой коэффициент, $M_0(x_0, y_0) \in l$

Замечание. Если в уравнениях вида 3 и 5 один из знаменателей обращается в ноль (два знаменателя обратиться в ноль одновременно не могут), то уравнение прямой получается приравниванием нулю соответствующего числителя.

Угол между прямыми l_1 и l_2 равен углу между их направляющими $\overline{s}_1$ и $\overline{s}_2$ или нормальными векторами $\overline{n}_1$ и $\overline{n}_2$:

$$\cos\varphi = \frac{\overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2}{|\overline{n}_1||\overline{n}_2|} = \frac{\overline{s}_1 \cdot \overline{s}_2}{|\overline{s}_1||\overline{s}_2|}.$$

Если прямые заданы уравнениями с угловым коэффициентом, то

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

Условия параллельности и перпендикулярности прямых

$$l_1 \| l_2 \ : \ k_1 = k_2 \text{ или } \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \text{ или } \frac{p_1}{p_2} = \frac{q_1}{q_2};$$

$$l_1 \perp l_2 \ : \ k_1 k_2 = -1 \text{ или } A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0 \text{ или } p_1 p_2 + q_1 q_1 = 0.$$

Пример 1. Дан треугольник ABC : $A(1,-2), B(-2,3), C(0,2)$. Написать уравнение высоты, проведенной из вершины A, найти точку D пересечения этой высоты с прямой BC и уравнение биссектрисы прямого угла $\angle ADB$.

Решение

$$\overline{BC} = (2,-1) \text{ — нормальный вектор высоты } AD.$$

Используем уравнение 1:

$$2(x-1) - (y+2) = 0; \ \underline{2x - y - 4 = 0}.$$

Чтобы найти координаты точки D, нужно решить систему уравнений, составленную из уравнений прямых AD и BC. Найдем уравнение BC в форме 3:

$$\frac{x+2}{2} = \frac{y-3}{-1}, \ \ x + 2y - 4 = 0.$$

Решим систему:

$$\begin{cases} 2x - y - 4 = 0, \\ x + 2y - 4 = 0; \end{cases} \qquad x = \frac{12}{5}, \ y = \frac{4}{5}; \ \ \underline{D\left(\frac{12}{5}, \frac{4}{5}\right)}.$$

Направляющий вектор $\overline{s}$ биссектрисы DN угла $\angle ADB$ найдем как сумму ортов векторов $\overline{DA}$ и $\overline{DB}$. $\overline{DA} = \left(-\frac{7}{5}, -\frac{14}{5}\right)$, $\overline{DB} = \left(-\frac{22}{5}, \frac{11}{5}\right)$,

$$\overline{DA}_0 = \frac{1}{|\overline{DA}|}\overline{DA} = \frac{1}{\sqrt{\frac{49}{25} + \frac{196}{25}}}\left(-\frac{7}{5}, -\frac{14}{5}\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right),$$

$$\overline{DB}_0 = \frac{1}{\sqrt{\frac{484}{25} + \frac{121}{25}}}\left(-\frac{22}{5}, \frac{11}{5}\right) = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right).$$

$\overline{s} = \overline{DA}_0 + \overline{DB}_0 = \left(-\dfrac{3}{\sqrt{5}}, -\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$. Уравнение биссектрисы найдем в форме 3:

$$\frac{x - \dfrac{12}{5}}{-\dfrac{3}{\sqrt{5}}} = \frac{y - \dfrac{4}{5}}{-\dfrac{1}{\sqrt{5}}}, \quad \frac{5x - 12}{3} = \frac{5y - 4}{1}, \quad \underline{x - 3y = 0}.$$

Ответ. $AD:\ 2x - y - 4 = 0$, $D\left(\dfrac{12}{5}, \dfrac{4}{5}\right)$, $DN:\ x - 3y = 0$. ■

5.1. Задачи

1. Прямая проходит через точки $M(x_1, y_1)$ и $N(x_2, y_2)$. Выразите угловой коэффициент этой прямой через координаты точек. Чему он будет равен, если $M(1, -3)$, $N(2, 4)$?

2. Для данной прямой $l:\ 2x + y - 1 = 0$ и точки $M(-1, 2)$:

а) вычислите расстояние от точки M до прямой;

б) напишите уравнения прямых, проходящих через точку M перпендикулярно прямой l и параллельно прямой l.

3. Даны вершины треугольника ABC. Найти: 1) уравнение прямой AB; 2) уравнение высоты CD; 3) длину высоты CD; 4) угол между высотой CD и медианой BM; 5) уравнение биссектрисы внутреннего угла при вершине A, если:

а) $A(1, -2)$, $B(5, 4)$, $C(-2, 0)$;

б) $A(-3, -5)$, $B(-2, 2)$, $C(7, 5)$.

4. При каком значении m две прямые $(m - 1)x + my - 5 = 0$ и $mx + (2m - 1)y + 7 = 0$ пересекаются в точке, лежащей на оси абсцисс?

5. Прямая $y = kx + 5$ удалена от начала координат на расстояние $d = \sqrt{5}$. Найдите k.

6. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $Q(-1, 0)$ перпендикулярно отрезку OQ.

7. Напишите уравнения биссектрис углов между прямыми
$2x + 3y = 12$ и $3x + 2y = 12$.

8. Составьте уравнение прямой, если точка $P(2, 3)$ — основание перпендикуляра, опущенного из начала координат на эту прямую.

9. Докажите, что точки $A(3, -5)$, $B(-2, -7)$ и $C(18, 1)$ лежат на одной прямой.

10. Докажите, что прямые $24x - 10y + 39 = 0$ и $12x - 5y - 26 = 0$ параллельны, и найдите расстояние между ними.

11. Из точки $M(-5, 6)$ выходит луч света под углом $\varphi = \operatorname{arctg}(-2)$ к оси Ox, отражается от оси Ox, затем от оси Oy. Напишите уравнения всех трех лучей.

12. Составьте уравнение прямой, которая проходит через точку $M(8, 6)$ и отсекает от координатного угла треугольник с площадью, равной 12.

13. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $M(-2, 3)$ на одинаковых расстояниях от точек $M_1(5, -1)$ и $M_2(3, 7)$.

14. Напишите уравнения прямых, проходящих через начало координат под углом 45° к прямой $y = 4 - 2x$.

15. Даны две вершины треугольника ABC : $A(-4, 3)$ и $B(4, -1)$ и точка пересечения высот $M(3, 3)$. Найдите вершину C.

16. Стороны AB и BC параллелограмма заданы уравнениями $2x - y + 5 = 0$ и $x - 2y + 4 = 0$. Диагонали пересекаются в точке $M(1, 4)$. Найдите длины высот.

17. Даны прямая $l:\ x + 2y - 4 = 0$ и точка $A(5, 7)$. Найдите проекцию точки A на прямую l.

18. Две стороны квадрата лежат на прямых $5x - 12y - 65 = 0$ и $5x - 12y + 26 = 0$. Вычислите площадь квадрата.

19. В треугольнике ABC найдите координаты середин его сторон и точки пересечения медиан:

а) $A(7, -4)$, $B(-1, 8)$, $C(-12, -1)$;

б) $A(-4, 2)$, $B(2, 6)$, $C(0, -2)$.

20. Найдите уравнение биссектрисы внутреннего угла A треугольника ABC:

а) $A(1, -2)$, $B(5, 4)$, $C(-2, 0)$,

б) $A(3, -3)$, $B(7, 3)$, $C(0, -1)$.

21. Даны три последовательные вершины параллелограмма A, B, C. Найдите координаты четвертой вершины D:

а) $A(3, 2)$, $B(-2, 1)$, $C(1, -4)$,

б) $A(5, 1)$, $B(0, 0)$, $C(3, -5)$.

22. Отрезок задан точками A, B. До какой точки C его нужно продолжить в направлении от A к B, чтобы получить отрезок AC, длина которого было бы в α раз больше длины AB:

а) $A(-4, 7)$, $B(0, 1)$, $\alpha = 1.5$,

б) $A(-3, -6)$, $B(1, -3)$, $\alpha = 5$.

5.2. Плоскость и прямая в пространстве

Плоскость в пространстве

Поверхности в пространстве также будем описывать с помощью *уравнений*. Плоскость в пространстве удобнее всего задавать с помощью вектора, перпендикулярного плоскости, т. е. *нормального вектора*, и какой-нибудь точки, лежащей на плоскости. В результате получится уравнение, аналогичное общему уравнению прямой на плоскости.

Рассмотрим различные модификации общего уравнения плоскости.

1) $Ax + By + Cz + D = 0$ — *общее уравнение* плоскости, вектор $\overline{n} = (A, B, C) \neq \overline{0}$ — нормальный вектор.

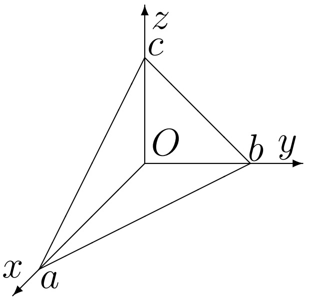
2) Плоскость, перпендикулярная вектору $\overline{n} = (A, B, C)$ и проходящая через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, описывается уравнением

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Это основная формула, которой мы будем пользоваться при построении уравнений плоскостей. Для того чтобы воспользоваться ею, достаточно найти координаты любой точки на плоскости и координаты некоторого нормального вектора плоскости.

3) Плоскость, проходящая через три данные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, не лежащие на одной прямой, описывается уравнением

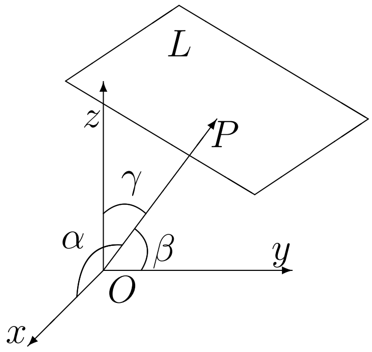
$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$



4) Плоскость, отсекающая на осях координат ненулевые отрезки a, b, c, описывается уравнением *в отрезках*

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

5) Если нормальный вектор имеет единичную длину и направлен из начала координат в сторону плоскости, то получаем *нормальное уравнение* плоскости



$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - \rho = 0 \qquad (5.1)$$

$$\rho \geq 0;\ \overline{OP} \perp L;\ |\overline{OP}| = \rho;\ (\widehat{\overline{OP}, Ox}) = \alpha;$$

$$(\widehat{\overline{OP}, Oy}) = \beta;\ (\widehat{\overline{OP}, Oz}) = \gamma.$$

Для того чтобы привести общее уравнение плоскости к нормальному, нужно умножить все члены общего уравнения 2) на нормирующий множитель $\mu = \dfrac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$; знак μ противоположен знаку D.

Отклонение точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ от плоскости L, заданной уравнением (5.1), находится по формуле

Опишем различные уравнения плоскости P в следующей сводной таблице.

Название	Вид	Геометрический смысл параметров
Общее уравнение плоскости	$Ax + By + Cz + D = 0$	$\overline{n} = (A, B, C) \perp P$ — нормальный вектор
Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярную данному вектору	$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$	$\overline{n} = (A, B, C) \perp P$, $M_0(x_0, y_0, z_0) \in P$.
Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки	$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$	$\left.\begin{matrix} M_1(x_1, y_1, z_1) \\ M_2(x_2, y_2, z_2) \\ M_2(x_2, y_2, z_2) \end{matrix}\right\} \in P.$

Окончание таблицы

Название	Вид	Геометрический смысл параметров
Нормальное уравнение плоскости	$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$	$\overline{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)\perp P$, $\overline(n)$ направлен в сторону P от начала координат, его координаты — его направляющие косинусы, p — расстояние от начала координат до P.
Параметрическое уравнение плоскости	$\overline{r}=\overline{r}_0+t_1\overline{a}+t_2\overline{b}$	$\overline{r}_0$ — радиус-вектор точки $M_0\in P$, $\overline{a},\overline{b}$ — неколлинеарные векторы, параллельные P, t_1, t_2 — параметры.
Параметрические уравнения плоскости в координатной форме	$\begin{cases}x=x_0+t_1p_1+t_2p_2,\\ y=y_0+t_1q_1+t_2q_2,\\ z=z_0+t_1r_1+t_2r_2\end{cases}$	$M_0(x_0,y_0,z_0)\in P$, $\overline{a}=(p_1,q_1,r_1)$,$\overline{b}=(p_2,q_2,r_2)$.
Уравнение плоскости в отрезках	$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$	a — отрезок на Ox, b — отрезок на Oy, c — отрезок на Oz, $a,b,c\neq 0$.

$$\delta(M_1,L)=x_1\cos\alpha+y_1\cos\beta+z_1\cos\gamma-\rho.$$

Если точка M_1 и начало координат находятся по разные стороны от плоскости L, то $\delta>0$, в противном случае $\delta<0$. Если $\delta=0$, то плоскость L проходит через точку M_1.

Расстояние от точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$ до плоскости L находится по формуле

$$\rho(M_1, L) = |\delta(M_1, L)| = |x_1 \cos\alpha + y_1 \cos\beta + z_1 \cos\gamma - \rho| =$$
$$= \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Исследование общего уравнения плоскости

Пусть плоскость L задана общим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$. Тогда вектор $\overline{n} = (A, B, C)$ — нормальный вектор L. Заметим, что нормальный вектор ненулевой, т. е. коэффициенты A, B и C не могут обращаться в ноль одновременно.

В следующей таблице приведены результаты исследования общего уравнения плоскости L.

$A = 0$	$L \parallel Ox$
$B = 0$	$L \parallel Oy$
$C = 0$	$L \parallel Oz$
$D = 0$	L проходит через начало координат

Прямая в пространстве

Прежде всего заметим, что прямая в пространстве не может быть задана одним уравнением. Поэтому будем говорить об **уравнениях** прямой в пространстве. Проще всего задать прямую с помощью точки и направления. Направление задается ненулевым *направляющим вектором*, направление которого параллельно прямой — аналогично тому, как это делается для описания прямой на плоскости[1].

Опишем различные способы построения уравнений прямой в пространстве.

1) Прямая, проходящая через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно направляющему вектору $\overline{s} = (p, q, r)$, описывается *каноническими уравнениями*

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = \frac{z - z_0}{r},$$

или *параметрическими уравнениями*

$$\begin{cases} x = x_0 + pt; \\ y = y_0 + qt; \\ z = z_0 + rt. \end{cases}$$

[1]Таким образом, плоскость в пространстве описывается с помощью точки и нормального вектора, а прямая — с помощью точки и направляющего вектора.

2) Прямая, являющаяся пересечением двух плоскостей, описывается *общими уравнениями*

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0; \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}^2 \neq 0.$$

Последнее условие означает, что плоскости не параллельны и, следовательно, пересекаются по прямой.

3) Прямая, проходящая через две несовпадающие точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, описывается уравнениями

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Если при этом один или два знаменателя обращаются в ноль, это означает, что к нулю нужно приравнять соответствующие числители.

Опишем различные уравнения прямой l в следующей сводной таблице.

Название	Вид	Геометрический смысл параметров
Общие уравнения прямой в пространстве	$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases}$ $\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}^2 \neq 0$	$\overline{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$, $\overline{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ — нормальные векторы непараллельных плоскостей, задающих прямую как линию пересечения
Канонические уравнения прямой в пространстве	$\dfrac{x - x_0}{p} = \dfrac{y - y_0}{q} = \dfrac{z - z_0}{r}$	$\overline{s} = (p, q, r) \| l$ — направляющий вектор, $M_0(x_0, y_0, z_0) \in l$
Параметрические уравнения прямой в пространстве	$\begin{cases} x = x_0 + pt, \\ y = y_0 + qt, \\ z = z_0 + rt \end{cases}$	$\overline{s} = (p, q, r) \| l$ — направляющий вектор, $M_0(x_0, y_0, z_0) \in l$, t — параметр

Окончание таблицы

Название	Вид	Геометрический смысл параметров
Параметрическое уравнение прямой в векторной форме	$\overline{r} = \overline{r}_0 + t\overline{s}$	$\overline{r}_0$ — радиус-вектор точки $M_0 \in l$, $\overline{s}$ — направляющий вектор l.
Уравнение прямой, проходящей черед две различные точки	$\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1}$	$\left.\begin{array}{l} M_1(x_1, y_1, z_1) \\ m_2(x_2, y_2, z_2) \end{array}\right\} \in l.$

Нахождение угла между прямой и плоскостью или между плоскостями сводится к нахождению углов между соответствующими векторами (нормальными для плоскости и направляющими для прямой).

Угол между плоскостями

$$\left\{ \begin{array}{rcl} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &=& 0; \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &=& 0 \end{array} \right.$$

находится по формуле

$$\cos\varphi = \frac{\overline{n}_1\overline{n}_2}{|\overline{n}_1||\overline{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Угол между прямой l и плоскостью L находится по формуле

$$\sin\varphi = \frac{|\overline{s}\overline{n}|}{|\overline{s}||\overline{n}|} = \frac{|pA + qB + rC|}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

В следующей таблице описаны различные случаи взаимного расположения прямых и плоскостей. Пусть плоскость L_1 задана уравнением $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, плоскость L_2 — уравнением $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, прямая l_1 — уравнениями $\dfrac{x - x_1}{p_1} = \dfrac{y - y_1}{q_1} = \dfrac{z - z_1}{r_1}$, прямая l_2 — уравнениями $\dfrac{x - x_2}{p_2} = \dfrac{y - y_2}{q_2} = \dfrac{z - z_2}{r_2}$. Обозначим через $\overline{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ нормальный вектор плоскости L_1, через $\overline{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ нормальный вектор плоскости L_2, $\overline{s}_1 = (p_1, q_1, r_1)$ — направляющий вектор прямой l_1, $\overline{s}_2 = (p_2, q_2, r_2)$ — направляющий вектор прямой l_2. Заметим также, что точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ лежат на прямых l_1

и l_2 соответственно.

Расположение	Условия на векторы	Условия на параметры
$L_1 \perp L_2$	$\overline{n}_1 \perp \overline{n}_2$	$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$
$L_1 \parallel L_2$	$\overline{n}_1 \parallel \overline{n}_2$	$\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$
$L_1 = L_2$	$\overline{n}_1 = \overline{n}_2$, $\delta(O, L_1) = \delta(O, L_2)$	$\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{D_1}{D_2}$
$l_1 \perp L_1$	$\overline{n}_1 \parallel \overline{s}_1$	$\dfrac{A_1}{p_1} = \dfrac{B_1}{q_1} = \dfrac{C_1}{r_1}$
$l_1 \parallel L_1$	$\overline{n}_1 \perp \overline{s}_1$	$A_1p_1 + B_1q_1 + C_1r_1 = 0$
$l_1 \subset L_1$	$\overline{n}_1 \perp \overline{s}_1$, $M_1 \in L_1$	$A_1p_1 + B_1q_1 + C_1r_1 = 0$ $A_1x_1 + B_1y_1 + C_1z_1 + D_1 = 0$
$l_1 \perp l_2$	$\overline{s}_1 \perp \overline{s}_2$	$p_1p_2 + q_1q_2 + r_1r_2 = 0$
$l_1 \parallel l_2$	$\overline{s}_1 \parallel \overline{s}_2$	$\dfrac{p_1}{p_2} = \dfrac{q_1}{q_2} = \dfrac{r_1}{r_2}$
$l_1 = l_2$	$\overline{s}_1 \parallel \overline{s}_2$, $M_2 \in l_1$	$\dfrac{p_1}{p_2} = \dfrac{q_1}{q_2} = \dfrac{r_1}{r_2}$, $\dfrac{x - x_2}{p_1} = \dfrac{y - y_2}{q_1} = \dfrac{z - z_2}{r_1}$
l_1 и l_2 пересекаются	$\overline{s}_1$, $\overline{s}_2$ и $\overline{M_1M_2}$ компланарны	$\begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} = 0$
l_1 и l_2 скрещиваются	$\overline{s}_1$, $\overline{s}_2$ и $\overline{M_1M_2}$ не компланарны	$\begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} \neq 0$

Пример 2. Написать уравнения перпендикуляра, опущенного из точки $M(1, 0, -1)$ на прямую l: $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z}{-3}$.

Решение

1) Составим уравнение плоскости L, проходящей через точку M перпендикулярно прямой l:

$$\overline{s} = (1, 2, -3) \text{ — нормальный вектор искомой плоскости;}$$

$$1(x-1)+2(y-0)-3(z+1)=0;\ \underline{x+2y-3z-4=0}.$$

2) Найдем точку пересечения (K) плоскости L и прямой l.

Для этого перейдем от канонических уравнений прямой l к параметрическим уравнениям:

$$\frac{x+1}{1}=t;\ \frac{y-1}{2}=t;\ \frac{z}{-3}=t,$$

откуда получим

$$\begin{cases} x &= t-1; \\ y &= 2t+1; \\ z &= -3t \end{cases}$$

Подставим в уравнение плоскости:

$$t-1+2(2t+1)-3(-3t)-4=0;$$

$$14t-3=0;\ t_0=\frac{3}{14}.$$

Найденное значение t_0 подставим в параметрические уравнения прямой и найдем координаты точки K:

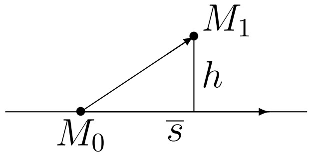
$$K\left(-\frac{11}{14},\frac{10}{7},-\frac{9}{14}\right).$$

3) $MK \perp l$, т. е. MK — искомая прямая.

$$\text{Уравнения } MK:\ \frac{x-1}{-\frac{11}{14}-1}=\frac{y-0}{\frac{10}{7}-0}=\frac{z+1}{-\frac{9}{14}+1},$$

$$\text{или } \underline{\frac{x-1}{5}=\frac{y}{-4}=\frac{z+1}{-1}}.\ \blacksquare$$

Пример 3. Найти расстояние от точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$ до прямой l, заданной каноническими уравнениями $\dfrac{x-x_0}{p}=\dfrac{y-y_0}{q}=\dfrac{z-z_0}{r}$.



Решение. Расстояние от точки M_1 до прямой l есть высота параллелограмма, построенного на векторах $\overline{s}=(p,q,r)$ и $\overline{M_0M_1}$ (где $M_0(x_0,y_0,z_0)$), опущенная на основание $\overline{s}$. Поскольку высота равна площади параллелограмма, поделенной на длину основания, получаем следующую формулу:

$$\rho(M_1,l)=\frac{\left|\overline{M_0M_1}\times\overline{s}\right|}{|\overline{s}|}.\ \blacksquare$$

5.2. Задачи

1. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку M и перпендикулярной к плоскостям P_1, P_2:

а) $M(-1,-1,2)$, $P_1: x-2y+z-4=0$, $P_2: x+2y-2z+4=0$,

б) $M(3,0,1)$, $P_1: 2x+y-3z+1=0$, $P_2: 3x-2y+z-4=0$.

2. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точки M_1 и M_2 и перпендикулярной к плоскости P:

а) $M_1(-1,-2,0)$, $M_2(1,1,2)$, P: $x+2y-2z-4=0$,

б) $M_1(3,0,2)$, $M_2(-1,2,7)$, P: $2x-3y+2z-5=0$.

3. Напишите уравнение плоскости, проходящей через ось Oz и составляющей с плоскостью P угол $60°$:

а) P: $2x+y+\sqrt{5}\cdot z=0$

б) P: $y+z-5=0$.

4. Найдите расстояние от точки M до плоскости, проходящей через точки M_1, M_2, M_3:

а) $M(4,3,0)$, $M_1(1,3,0)$, $M_2(4,-1,2)$, $M_3(3,0,1)$,

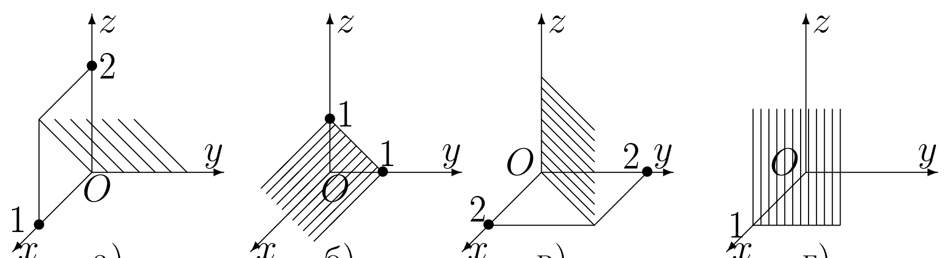
б) $M(1,-2,3)$, $M_1(3,5-1)$, $M_2(0,2,1)$, $M_3(1,-2,0)$.

5. Найдите расстояние между параллельными плоскостями:

а) $4x+3y-5z-8=0$ и $4x+3y-5z+12=0$,

б) $2x+y-2z+5=0$ и $2x+y-2z+8=0$.

6. Составьте уравнения плоскостей:



7. Напишите уравнение плоскости, равноудаленной от параллельных плоскостей $4x-y-2z-3=0$ и $4x-y-2z-5=0$.

8. Напишите канонические уравнения прямой

$$\begin{cases} 2x-y+2z-3 = 0; \\ x+2y-z-1 = 0. \end{cases}$$

9. Напишите уравнения прямой, проходящей через точку $M(a,b,c)$ перпендикулярно оси Ox и пересекающей эту ось.

10. Найдите расстояние между параллельными прямыми:

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+3}{2} \text{ и } \frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{2}.$$

11. Докажите, что прямая $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-3}{1}$ параллельна плоскости $x+y-z=0$.

12. Даны прямая $l: \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z+1}{3}$ и точка $M(3,4,0)$. Напишите уравнение плоскости, проходящей:

а) через точку M перпендикулярно прямой l;

б) через прямую l и точку M.

13. Напишите уравнение плоскости, проходящей через прямую $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z+2}{2}$ перпендикулярно плоскости $2x+3y-z-4=0$.

14. Напишите уравнение плоскости, проходящей через параллельные прямые

$$\frac{x-3}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{2} \text{ и } \frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{2}.$$

15. Напишите уравнение прямой, проходящей через начало координат и составляющей равные углы с плоскостями $4y=3x$, $y=0$, $z=0$. Найдите эти углы.

16. Найдите проекцию точки $M(3,1,-1)$ на плоскость, заданную уравнением $x+2y+3z-30=0$.

17. Найдите проекцию точки $M(2,3,4)$ на прямую $x=y=z$.

18. Через точки $M_1(-6,6,-5)$ и $M_2(12,-6,1)$ проведена прямая. Определите точки пересечения этой прямой с координатными плоскостями.

19. Составьте канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M(2,3,-5)$ параллельно прямой $\begin{cases} 3x-y+2z-7 &= 0; \\ x+3y-2z+3 &= 0. \end{cases}$

20. Докажите, что прямая $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$ лежит в плоскости $4x+3y+7z-17=0$.

21. Докажите, что прямые l_1 и l_2 скрещиваются, и постройте общий перпендикуляр к ним, если:

а) $l_1: \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z}{-2}$, $l_2: \dfrac{x}{-1}=\dfrac{y+2}{0}=\dfrac{z-3}{1}$;

б) $l_1: \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z+5}{4}$, $l_2: \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+6}{2}=\dfrac{z+9}{2}$.

22. Дано общеее уравнение плоскости. Запишите параметрические уравнения этой плоскости в векторной и в координатной формах:

а) $3x+2y-z+5=0$, б) $2x+z-25=0$,

в) $y-3z+1=0$, г) $2y+3=0$.

23. Плоскость задана параметрическим уравнением $\overline{r}=\overline{r_0}+\alpha\overline{a}+\beta\overline{b}$. Запишите общее уравнение этой плоскости:

а) $\overline{r}_0=(1,-2,0)$, $\overline{a}=(3,-1,2)$, $\overline{b}=(0,1,-2)$,

б) $\overline{r}_0=(0,2,-1)$, $\overline{a}=(2,-1,3)$, $\overline{b}=(2,0,-1)$, в) $\overline{r}_0 = (2, 1, -1)$, $\overline{a} = (0, 3, 2)$, $\overline{b} = (1, -2, 0)$.

24. Докажите, что три плоскости проходят через одну прямую:

а) $7x + 4y + 7z + 1 = 0$, $2x - y - z + 2 = 0$, $x + 2y + 3z - 1 = 0$,

б) $2x - 3y + z - 5 = 0$, $x - 2y + 3z + 1 = 0$, $x - y - 2z - 2 = 0$.

25. Определить, при каких значениях α и β данные плоскости 1) имеют одну общую точку; 2) проходят через одну прямую; 3) пересекаются по трём различным параллельным прямым:

а) $2x - y + 3z - 1 = 0$, $x + 2y - z + \beta = 0$, $x + \alpha y - 6z + 10 = 0$,

б) $3x + y - z + 1 = 0$, $x - y + 3z + \beta = 0$, $x + \alpha y - 2z + 5 = 0$.

26. Вычислить площади граней пирамиды, ее объем и высоту, опущенную из начала координа, если пирамида ограничена координатными плоскостями и плоскостью:

а) $2x - 3y + 6z - 12 = 0$,

б) $5x - 6y + 3z + 120 = 0$.

27. Плоскость задана параметрическими уравнениями в координатной форме. Составьте параметрическое уравнение плоскости в векторной форме:

а) $\begin{cases} x = 5 - 2t_1, \\ y = t_1 - 3t_2, \\ z = 1 - t_1 + 2t_2; \end{cases}$; б) $\begin{cases} x = 3t_1 - t_2, \\ y = 3 - 2t_1, \\ z = 2 + 3t_1 + 3t_2. \end{cases}$

28. Напишите параметрическое уравнение плоскости в векторной форме, если она проходит через точки M_1, M_2 параллельно вектору $'ovarlinea$:

а) $M_1(3, -1, 2)$, $M_2(0, 1, 3)$, $\overline{a} = (-1, 1, 0)$,

б) $M_1(0, 1, -3)$, $M_2(3, 0, 1)$, $\overline{a} = (1, 0, 2)$.

29. Напишите параметрическое уравнение плоскости в векторной форме, если она проходит через точку M параллельно векторам $\overline{a}_1$, $\overline{a_2}$:

а) $M(1, -2, 1)$, $\overline{a}_1 = (3, 1, 2)$, $\overline{a}_2 = (-2, 0, 1)$,

б) $M(2, 3, 0)$, $\overline{a}_1 = (1, -2, 3)$, $\overline{a}_2 = (3, 0, -1)$.

30. Напишите параметрические уравнения плоскости в векторной форме, если плоскость проходит через прямую l_1 параллельно прямой l_2:

а) $l_1 : \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-2}{0}$, $l_2 : \dfrac{x+1}{-1} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z+1}{2}$,

б) $l_1 : \dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z+1}{-1}$, $l_2 : \dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z}{3}$.

31. Даны вершины пирамиды $ABCD$. Составьте параметрические уравнения ее граней и ребер в векторной форме:

а) $A(1, 0, -1)$, $B(3, 2, 0)$, $C(-2, 3, 1)$, $D(4, -1, 3)$,

б) $A(0, 2, 1)$, $B(-2, 1, 3)$, $C(1, -1, 2)$, $D(0, 3, 4)$.

Глава 6

Общая теория систем линейных уравнений

6.1. Исследование и решение систем линейных алгебраических уравнений. Метод Гаусса

Пусть задана система m линейных уравнений[1] с n неизвестными:

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots & \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n & = & b_m; \end{array}\right. \tag{6.1}$$

или $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ — матрица системы;}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ — вектор-столбец неизвестных;} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \text{ — вектор-столбец свободных членов.}$$

Вектор-столбец $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ называется *решением системы* (6.1), если $AC = B$, или

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}c_1 + \dots + a_{1n}c_n & = & b_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots & \dots \\ a_{m1}c_1 + \dots + a_{mn}c_n & = & b_m. \end{array}\right.$$

Исследование систем линейных уравнений

Система называется *совместной*, если она имеет решение. В противном случае система называется *несовместной*.

[1] В дальнейшем в этой главе — просто *система*.

Система называется *определенной*, если она имеет единственное решение.

Таким образом, имеется три варианта[2]:

1) система несовместна (имеет 0 решений);

2) система определенная (имеет 1 решение);

3) система совместная, но неопределенная (имеет бесконечное число решений).

Обозначим через $r_A = \operatorname{rank} A$ ранг матрицы системы, а через $r_{\overline{A}} = \operatorname{rank} \overline{A}$ — ранг *расширенной матрицы* системы

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

Заметим, что расширенная матрица системы содержит в себе всю информацию о системе линейных уравнений, т. е. задает ее полностью.

Теорема Кронекера—Капелли. *Для того чтобы система* (6.1) *была совместна, необходимо и достаточно, чтобы* $r_A = r_{\overline{A}}$.

Пусть система совместна и $r_A = r_{\overline{A}} = r$ — *ранг системы*[3], n — число неизвестных, m — число уравнений.

1) Пусть $r < m$. Будем считать без ограничения общности[4], что базисный минор находится в левом верхнем углу матрицы A, т. е. первые r строк и первые r столбцов матрицы $\overline{A}$ линейно независимы[5] . Тогда последние $m - r$ уравнений можно отбросить[6] , так как они линейно выражаются через первые r. Таким образом, мы переходим к системе следующего вида, в которой число уравнений совпадает с рангом системы:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n & = & b_1; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots & \dots \\ a_{r1}x_1 + \dots + a_{rn}x_n & = & b_r. \end{cases}$$

[2]Три, а не четыре, поскольку определенная система всегда совместна, а несовместная всегда является неопределенной.

[3]Понятно, что говорить о ранге системы можно только в том случае, когда система совместна.

[4]В данном случае слова “без ограничения общности” означают, что мы всегда сможем добиться такой ситуации, применив необходимые перестановки строк (уравнений) или столбцов (переменных).

[5]Мы рассматриваем строки матрицы как элементы линейного пространства $\mathbb{R}^n$ — см. с. 103.

[6]Можно показать, что любой вектор C, являющийся решением первых r уравнений, будет также и решением всей системы.

2) Если $r = n$, то система имеет единственное решение, которое может быть найдено, например, с помощью формул Крамера.

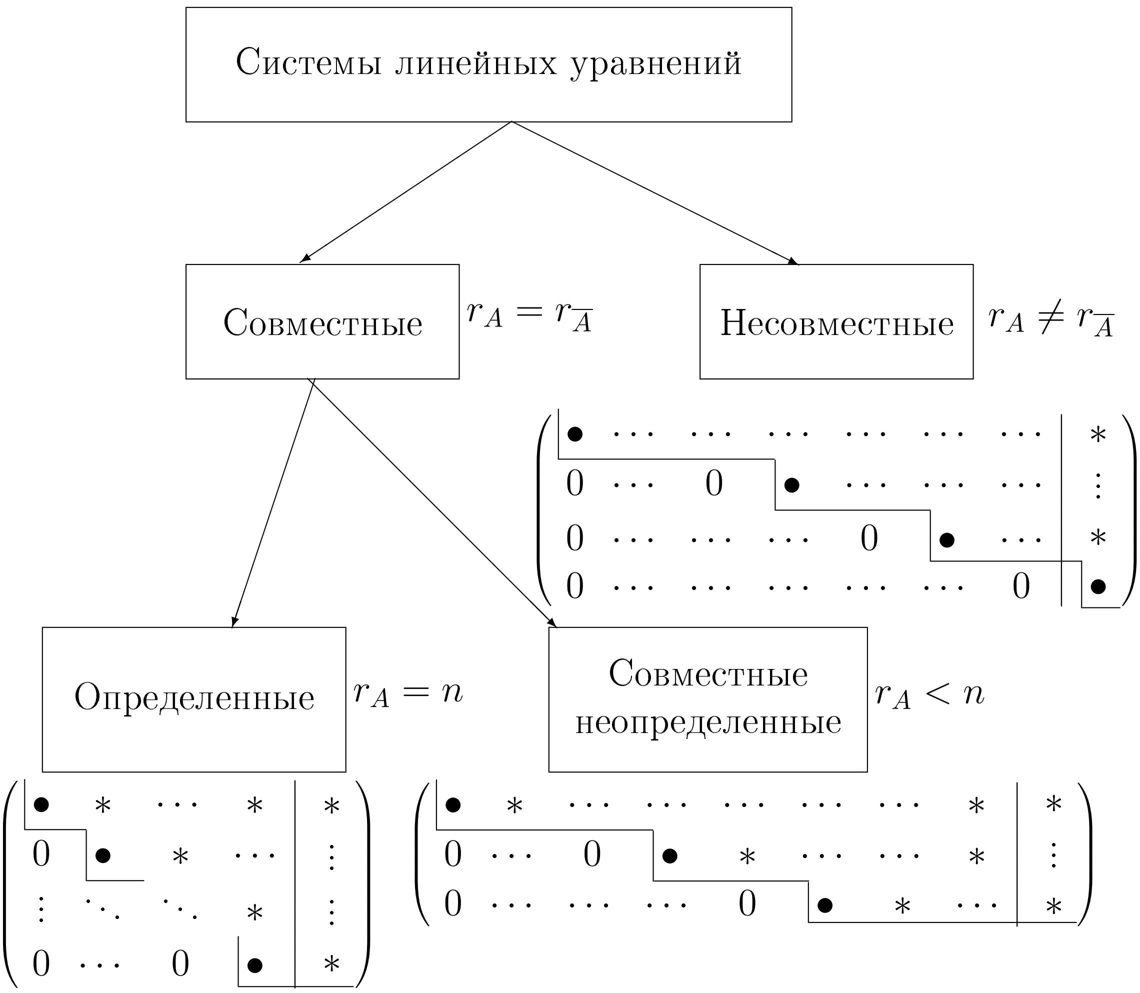
3) Пусть $r < n$ (считаем, что базисный минор находится в левом верхнем углу матрицы A).

Назовем неизвестные $x_1, \ldots, x_r$ *базисными*, а

$x_{r+1,}, \ldots, x_n$ — *свободными.*

Придавая свободным неизвестным произвольные значения, получаем определенную систему относительно базисных переменных. Принимая свободные неизвестные за параметры, можно выразить базисные переменные через свободные, т.е. получить *общее решение* системы (6.1).

Итак, в ходе исследования систем линейных уравнений мы получили следующую схему, отражающую *классификацию систем линейных уравнений*:



В этой схеме символ “$*$” означает любое число, а символ “$\bullet$” — любое ненулевое число.

Метод Гаусса — универсальный[7] метод исследования и решения систем линейных уравнений. В ходе решения системы методом Гаусса определяется принадлежность системы тому или иному классу (совместность, определенность), в случае ее совместности находится ранг системы, определяются базисные и свободные переменные и находится общее решение системы.

Метод Гаусса состоит из трех этапов.

I этап (подготовительный). Также называется “прямой ход” метода Гаусса. Цель этого этапа — привести расширенную матрицу системы к ступенчатому виду, используя **только** элементарные преобразования **строк**.

II этап (исследование). В ходе исследования требуется выяснить три момента:

а) совместна ли система (т. е. по теореме Кронекера—Капелли совпадают ли ранги матрицы системы и расширенной матрицы). Значения обоих рангов видны из ступенчатого вида расширенной матрицы. Заметим, что вывод о несовместности системы можно также сделать, если в ступенчатом виде расширенной матрицы присутствует “нехорошая” строка, в которой все элементы равны нулю, кроме последнего. Такой вывод можно сделать даже раньше, до полного приведения к ступенчатому виду, если в ходе преобразований появилась “нехорошая” строка. Если система несовместна, решение задачи прекращается[8];

б) чему равен ранг системы (ранг матрицы системы). Договоримся в этом описании ранг матрицы системы обозначать просто одной буквой r;

в) какие переменные выбрать за базисные. Число базисных переменных должно быть равно r, но не любые r переменных могут служить базисными. Базисными переменными могут служить лишь такие r переменных, для которых соответствующие им столбцы ступенчатого вида матрицы системы входят в какой-нибудь базисный минор этой матрицы. Отсюда ясно, что набор базисных переменных может определяться неоднозначно. К счастью, нам не придется перебирать всевозможные наборы из r переменных в поисках базисного. Метод Гаусса предлагает способ сделать такой выбор сразу. Давайте рассмотрим в ступенчатом виде расширенной матрицы системы выступающие части “ступенек”. Теперь в

[7] Т. е. подходящий для любых систем.

[8] Обратите внимание, что задача “решить систему” имеет решение, даже если система несовместна. В последнем случае так и запишем ответ задачи: “Система несовместна.”

каждой такой части выберем ненулевой элемент (который с гарантией существует в силу определения ступенчатой матрицы). Конечно, все эти выбранные элементы находятся в разных столбцах. Эти столбцы и соответствуют переменным, которые мы примем за базисные. Остальные переменные — свободные. Заметим, что если свободных переменных нет, то система линейных уравнений определенная.

III этап (нахождение общего решения). Называется также “обратный ход” метода Гаусса. Цель этого этапа — выразить все базисные переменные только через свободные. Для этого мы должны преобразовать расширенную матрицу системы элементарными преобразованиями строк к такому виду, в котором каждый столбец, соответствующий базисной переменной, содержит только один ненулевой элемент (который мы выделяли на предыдущем этапе), причем этот элемент равен 1. Это преобразование соответствует исключению базисных переменных из “верхних уравнений”. Третий этап носит название “обратный ход”, потому что требуемые преобразования удобно проводить снизу вверх: сначала исключить последнюю базисную переменную из всех строк, кроме последней ненулевой, потом перейти к следующей снизу, и т.д. Проведя все необходимые преобразования, запишем систему линейных уравнений, соответствующую полученной расширенной матрице. Заметим, что эта система *эквивалентна*[9] исходной, и в каждое уравнение входит ровно одна базисная переменная, причем с коэффициентом 1, что очень облегчает выражение базисных переменных через свободные.

Заметим, что последний этап можно также проводить и не в матричном виде, а непосредственно преобразуя систему линейных уравнений, соответствующую ступенчатому виду расширенной матрицы системы. Обратите внимание, что в последнее уравнение этой системы входит только одна базисная переменная и ее легко выразить через свободные. Это выражение подставим в предпоследнее уравнение и из него выразим следующую базисную переменную, и так далее, снизу вверх. В результате этих выражений также получим требуемое общее решение системы.

[9]Т. е. имеет то же самое множество решений.

Метод Гаусса представляет собой самый мощный и удобный инструмент для решения систем линейных уравнений, изучаемый в этом курсе[10] . К его несомненным достоинствам можно отнести универсальность, а также вычислительную простоту. Так что в дальнейшем при столкновении с необходимостью решить систему линейных уравнений, авторы, безусловно, рекомендуют использовать метод Гаусса (если, конечно, явно не оговорена необходимость использовать другой метод).

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1+2x_2+3x_3+4x_4 &=& 30; \\ -x_1+2x_2-3x_3+4x_4 &=& 10; \\ x_2-x_3+x_4 &=& 3; \\ x_1+x_2+x_3+x_4 &=& 10. \end{array}\right.$$

Решение. Составим расширенную матрицу и приведем ее к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 30 \\ -1 & 2 & -3 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 30 \\ 0 & 4 & 0 & 8 & 40 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -2 & 5 & 20 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 30 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -2 & 5 & 20 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 10 \end{array}\right) \sim \underset{\begin{array}{c}\uparrow \\ \boxed{\text{ступенчатый вид}}\end{array}}{\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4 \end{array}\right)} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right); \left\{\begin{array}{l} x_1=1 \\ x_2=2 \\ x_3=3 \\ x_4=4 \end{array}\right. \quad \blacksquare$$

[10]**На самом деле этот метод, как и многие другие, имеет ограниченную область применения. При решении очень больших систем (когда количество переменных исчисляется сотнями) с помощью компьютера применение метода Гаусса может дать существенную ошибку, возникающую из-за приближенных вычислений с использованием чисел с плавающей запятой. Но этот факт следует, скорее, отнести к недостатку компьютера, а не метода Гаусса.**

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 4; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 8; \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 10x_4 &= 20; \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 - 6x_4 &= 4. \end{cases}$$

Решение

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 8 \\ 2 & 4 & 5 & 10 & 20 \\ 2 & -4 & 1 & -6 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 6 & 3 & 12 & 12 \\ 0 & -8 & -4 & -16 & -16 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Два последних уравнения можно отбросить, поскольку они являются линейными комбинациями первых двух:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3/2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1/2 & 2 & 2 \end{array}\right).$$

Последней матрице соответствует система:

$$\begin{cases} x_1 + \dfrac{3}{2}x_3 + x_4 &= 6; \\ x_2 + \dfrac{1}{2}x_3 + 2x_4 &= 2; \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{базисные неизвестные } x_1, x_2, \\ \text{свободные неизвестные } x_3, x_4. \end{array}$$

В этой системе легко выразить базисные переменные через свободные и записать общее решение

Ответ. $\begin{cases} x_1 &= 6 - \dfrac{3}{2}x_3 - x_4; \\ x_2 &= 2 - \dfrac{1}{2}x_3 - 2x_4; \end{cases}$ x_3, x_4 — произвольные числа. ■

Ответ можно также записать в параметрическом виде. Для этого каждую свободную переменную заменим своим параметром[11] :

$$\begin{cases} x_1 &= 6 - 3/2c_1 - c_2; \\ x_2 &= 2 - 1/2c_1 - 2c_2; \\ x_3 &= c_1; \\ x_4 &= c_2, \end{cases}$$ где c_1, c_2 — произвольные числа. ■

6.1. Задачи

1. Решите системы линейных уравнений:

а) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 &= 4; \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 11; \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 11; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 &= -1; \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= -4; \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 &= -2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} -3x_1 - 4x_2 + x_3 &= 5; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1; \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 11; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 31; \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 &= 29; \\ 3x_1 - x_2 + x_3 &= 10. \end{cases}$

2. Исследуйте системы уравнений на совместность и определенность. Найдите решения, если системы совместны:

а) $\begin{cases} 5x - 6y + z &= 4; \\ 3x - 5y - 2z &= 3; \\ 2x - y + 3z &= 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x - 3y + z &= 2; \\ 3x - 5y + 5z &= 3; \\ 5x - 8y + 6z &= 5; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 &= 4; \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 7; \\ 5x_1 - 4x_2 &= 2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 - 10x_3 &= -1; \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 1; \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 &= 2; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 6x_1 - 23x_2 + 29x_3 &= 4; \\ 7x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 7; \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 5. \end{cases}$

3. При каком значении λ система уравнений

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 &= 1; \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 &= 1; \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 &= 1 : \end{cases}$$

а) имеет единственное решение;

б) имеет бесконечное множество решений;

в) несовместна?

---

[11] **На самом деле каждой свободной переменной *ставится в соответствие* некий параметр, т. е. свободная переменная x_i заменяется на $\lambda_i c_i$, $\lambda_i \neq 0$. Мы взяли $\lambda_i = 1$, но можно взять и другие значения, чтобы избавиться от дробей в записи общего решения. Например, в данном случае удобно взять $x_3 = 2c_1$.**

4. Исследуйте и решите системы уравнений методом Гаусса:

а) $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 & = & 2; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 & = & 7; \\ x_1 + x_2 + 5x_3 & = & -7; \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 & = & 14; \end{cases}$$

б) $$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 & = & -1; \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 & = & 1; \\ x_1 + x_2 + x_3 & = & 3; \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 & = & 1; \end{cases}$$

в) $$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 & = & 4; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 & = & -2; \\ x_1 + 5x_2 - 3x_3 & = & -10; \end{cases}$$

г) $$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 & = & 8; \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 & = & 9; \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 & = & 7; \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 & = & 12; \end{cases}$$

д) $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 & = & 1; \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 & = & 2; \\ 11x_1 - 12x_2 + 17x_3 & = & 3; \end{cases}$$

е) $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 7x_4 & = & 5; \\ 6x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 & = & 7; \\ 4x_1 - 2x_2 + 14x_3 - 31x_4 & = & 18; \end{cases}$$

ж) $$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 & = & 6; \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 & = & 4; \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 & = & 2; \end{cases}$$

з) $$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 & = & 1; \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 & = & 2; \\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 & = & 1; \end{cases}$$

и) $$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 & = & 2; \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 & = & 5; \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 & = & 3; \end{cases}$$

к) $$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 & = & 5; \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 - 2x_4 & = & -7; \\ x_1 - 2x_3 + 3x_3 + x_4 & = & 9; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 & = & 0. \end{cases}$$

6.2. Однородные системы линейных уравнений

Система $AX = \mathbb{0}$ (здесь, конечно, $\mathbb{0}$ — нулевая матрица, являющаяся вектор-столбцом), или

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases} \tag{6.2}$$

называется *однородной*. Такая система всегда совместна, поскольку имеет *тривиальное* решение $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$[12]. Для существования *нетривиального* решения необходимо и достаточно, чтобы система была неопределенной, т. е. $r_A < n$, где r_A — ранг матрицы системы. В частном случае, когда $m = n$, критерием *нетривиальной совместности* системы (6.2) служит условие $\det A = 0$.

Заметим, что множество решений однородной системы линейных уравнений является линейным подпространством пространства $\mathbb{R}^n$ (см. с. 102).

Пусть $r = r_A < n$. Система (6.2) имеет r базисных и $(n-r)$ свободных переменных.

Фундаментальной системой решений (ФСР) однородной системы называется набор из $(n - r)$ линейно независимых решений этой системы. ФСР составляет **базис пространства решений системы** (6.2).

Обозначим ФСР системы (6.2) через $E = (E_1, \ldots, E_{n-r})$. Ее удобно находить следующим образом. Пусть базисные переменные $x_1, \ldots, x_r$, а $x_{r+1}, \ldots, x_n$ — свободные. Присвоив свободным переменным значения $x_{r+1} = 1, x_{r+2} = \ldots = x_n = 0$, найдем соответствующие значения базисных переменных и таким образом получим

$$E_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

[12] **Вывод о совместности системы можно сделать также, опираясь на теорему Кронекера—Капелли. Действительно, добавление к матрице системы нулевого столбца свободных членов не может изменить ранг матрицы.**

Подставив вместо свободных переменных значения
$x_{r+1} = 0$, $x_{r+2} = 1$, $x_{r+3} = \ldots = x_n = 0$, получим

$$E_2 = \begin{pmatrix} x_{12} \\ \vdots \\ x_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

и так далее,

$$E_{n-r} = \begin{pmatrix} x_{1,n-r} \\ \vdots \\ x_{r,n-r} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Система E линейно независима и, следовательно, является ФСР. Общее решение системы (6.2) представляется в виде линейной комбинации ФСР:

$$X = c_1E_1 + c_2E_2 + \cdots + c_{n-r}E_{n-r}.$$

Такая форма записи общего решения называется *векторной*.

Пример 3. Найти общее решение системы $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = 0 \\ x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$ в виде линейной комбинации ФСР.

Решение. Воспользуемся методом Гаусса. Преобразуем матрицу системы[13]:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Данной матрице соответствует система

$$\begin{cases} x_1 - 6x_3 + 9x_4 = 0; \\ x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0; \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = 6x_3 - 9x_4; \\ x_2 = 3x_3 - 4x_4. \end{cases}$$

[13]В данном случае не имеет смысла преобразовывать расширенную матрицу системы, поскольку столбец свободных членов состоит из одних нулей и не меняется при элементарных преобразованиях строк.

Здесь x_1, x_2 — базисные переменные, x_3, x_4 — свободные неизвестные. Найдем ФСР:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \; E_2 = \begin{pmatrix} -9 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Общее решение однородной системы

$$X = c_1 E_1 + c_2 E_2 = c_1 \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -9 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \; \blacksquare$$

Структура общего решения неоднородной системы линейных уравнений

Вернемся теперь к рассмотрению неоднородной системы линейных уравнений $AX = B$, $B \neq \mathbb{0}$. Как связано множество ее решений с общим решением *соответствующей однородной системы* $AX = \mathbb{0}$? Обозначим общее решение однородной системы через $X_{\text{ОО}}$, тогда $X_{\text{ОО}} = c_1 E_1 + c_2 E_2 + \ldots + c_k E_k$, где $E_1, \ldots, E_k$ — ФСР однородной системы. Тогда общее решение неоднородной системы запишется следующим образом:

$$X_{\text{ОН}} = X_{\text{ОО}} + X_{\text{ЧН}}, \tag{6.3}$$

где $X_{\text{ЧН}}$ — произвольное частное решение неоднородной системы. Соотношение (6.3) и называется *структурой общего решения* неоднородной системы линейных уравнений.

Для того чтобы подчеркнуть эту структуру, общее решение следует записывать в следующем *векторном* виде:

$$X_{\text{ОН}} = c_1 E_1 + c_2 E_2 + \ldots + c_k E_k + X_{\text{ЧН}}.$$

Векторную запись решения легко получить из параметрической: пусть решение в параметрическом виде выглядит так:

$$\begin{cases} x_1 & = & \alpha_{11} c_1 + \ldots + \alpha_{1k} c_k + \beta_1; \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ x_r & = & \alpha_{r1} c_1 + \ldots + \alpha_{rk} c_k + \beta_r; \\ x_{r+1} & = & \lambda_1 c_1; \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n & = & \lambda_k c_k, \end{cases}$$

тогда векторная запись общего решения будет такова:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \vdots \\ \alpha_{r1} \\ \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + c_k \begin{pmatrix} \alpha_{1k} \\ \vdots \\ \alpha_{rk} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_r \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Пример 4. Решить систему линейных уравнений и записать ее решение в векторном виде:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 7x_3 + x_4 & = & 0; \\ 2x_1 + x_3 + x_4 & = & 1; \\ x_1 - 2x_2 + 8x_3 - x_4 & = & 2. \end{cases}$$

Решение. Приведем расширенную матрицу системы к ступенчатому виду

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -7 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 8 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -7 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 15 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 15 & -2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -7 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 15 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Выберем в качестве базисных переменных x_1, x_2 и x_4 и проведем обратный ход метода Гаусса

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -7 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 15 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -7 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -15/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right),$$

откуда $\begin{cases} x_1 & = & -1/2x_3 + 1; \\ x_2 & = & 15/4x_3; \\ x_4 & = & -1, \end{cases}$ т. е. $\begin{cases} x_1 & = & -2c + 1; \\ x_2 & = & 15c; \\ x_3 & = & 4c; \\ x_4 & = & -1. \end{cases}$

В векторном виде эти соотношения запишутся так:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} -2 \\ 15 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \blacksquare$$

6.2. Задачи

1. Постройте фундаментальную систему решений, напишите общее решение системы уравнений:

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 & = & 0; \\ 2x_1 + 9x_2 - 3x_3 & = & 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 & = & 0; \\ -2x_1 + 4x_2 + 6x_3 & = & 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 0; \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 & = & 0; \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 & = & 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 & = & 0; \\ x_1 + x_2 + x_3 & = & 0; \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 & = & 0; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 & = & 0; \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 & = & 0; \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 & = & 0; \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 & = & 0; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 & = & 0; \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 & = & 0; \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 & = & 0; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} x_1 + x_3 + x_5 & = & 0; \\ x_2 - x_4 + x_6 & = & 0; \\ x_1 - x_2 + x_5 - x_6 & = & 0; \\ x_2 + x_3 + x_6 & = & 0; \\ x_1 - x_4 + x_5 & = & 0. \end{cases}$

2. Найдите общее решение неоднородных систем линейных уравнений в векторном виде:

а) $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 & = & 3; \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 & = & 1; \\ 8x_1 - 6x_2 - x_3 - 5x_4 & = & 9; \\ 7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 17x_4 & = & 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 & = & 3; \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 & = & 2; \\ 2x_1 + 9x_2 + 8x_3 + 3x_4 & = & 7; \\ 3x_1 + 7x_2 + 7x_3 + 2x_4 & = & 12, \\ 5x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 2x_4 & = & 20; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 & = & 2; \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 & = & 3; \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 & = & 9; \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 & = & 1. \end{cases}$

3.* Исследуйте систему и найдите общее решение в зависимости от значения параметра λ:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 & = & 3; \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 8x_4 & = & 5; \\ x_1 - 6x_2 - 9x_3 - 20x_4 & = & -11; \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 + \lambda x_4 & = & 2. \end{cases}$$

Глава 7

Линейные пространства и линейные операторы

7.1. Линейные пространства

Пусть L — некоторое множество, элементы которого мы будем называть "векторами", $\mathbb{P}$ — некоторое (числовое) поле. Пусть также выполнены следующие условия.

1. В L определена операция "сложения" элементов, т. е. $\forall\, x, y \in L$ ставится в соответствие элемент $z \in L$. Обозначается $z = x \oplus y$. Эта операция обладает следующими свойствами:

1а) $\forall x, y \in L\ \big(x \oplus y = y \oplus x\big)$ (коммутативность сложения);

1б) $\forall x, y, z \in L\ \big((x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)\big)$ (ассоциативность сложения);

1в) $\exists \overline{0} \in L\,|\,\forall x \in L\big(x \oplus \overline{0} = x\big)$ (существование нуля. Элемент $\overline{0}$ называется нулем или нулевым элементом);

1г) $\forall x \in L\, \exists(-x) \in L\big(x \oplus (-x) = \overline{0}\big)$ (существование противоположного элемента. Элемент $-x$ называется *противоположным* элементу x).

2. В L определена операция "умножения" элемента на число из $\mathbb{P}$, т.е. $\forall\, \lambda \in \mathbb{P}, \forall\, x \in L$ ставится в соответствие элемент $y \in L$. Обозначается $y = \lambda \odot x$. Эта операция обладает свойствами:

2а) $\forall x \in L\, \big(1 \odot x = x\big)$;

2б) $\forall x \in L\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{P}\big(\lambda \odot (\mu \odot x) = (\lambda\mu) \odot x\big)$ (ассоциативность умножения[1]).

3. Эти операции удовлетворяют законам дистрибутивности:

3а) $\forall x, y \in L\ \forall \lambda \in \mathbb{P}\big(\lambda \odot (x \oplus y) = \lambda \odot x \oplus \lambda \odot y\big)$ (дистрибутивность слева);

3б) $\forall x \in L\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{P}\big((\lambda + \mu) \odot x = \lambda \odot x \oplus \mu \odot x\big)$ (дистрибутивность справа).

Тогда говорим, L образует *линейное пространство над полем* $\mathbb{P}$ относительно операций $\oplus$ и $\lambda\odot$. Эту ситуацию можно обозначить следую-

---

[1]Это название свойства не совсем корректно, поскольку слева и справа в скобках имеются в виду разные операции умножения.

щим образом: $\mathcal{L} = \langle L, \mathbb{P}, \oplus, \lambda\odot \rangle$ — линейное пространство[2] . Множество L называется *носителем* линейного пространства $\mathcal{L}$, но мы часто в дальнейшем будем обозначать само пространство и его носитель одной и той же буквой.

Свойства 1а) – 3б) называются *аксиомами линейного пространства.*

Пространство L называется *действительным*, если $\mathbb{P} = \mathbb{R}$ и операция умножения вектора на число определена только для действительных чисел, и *комплексным*, если $\mathbb{P} = \mathbb{C}$ и эта операция определена для комплексных чисел.

Подмножество V линейного пространства L называется (линейным) *подпространством* пространства L, если V само является пространством относительно операций, определенных на L.

Критерий подпространства:

$V \subset L$ является подпространством L тогда и только тогда, когда выполняются условия:

1) $\forall x, y \in V\, (x \oplus y \in V)$ (замкнутость относительно сложения);

2) $\forall x \in V, \alpha \in \mathbb{P}\, (\alpha \odot x \in V)$ (замкнутость относительно умножения на число).

(В этом случае говорят, что V замкнуто относительно операций сложения и умножения на элементы поля $\mathbb{P}$.)

Пример 1. Проверить, являются ли подпространствами следующие подмножества соответствующих линейных пространств:

а) все векторы из $\mathbb{R}^n$, координаты которых удовлетворяют уравнению $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$;

б) все векторы из $\mathbb{R}^n$, координаты которых удовлетворяют уравнению $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$;

в) все векторы из V_3, удовлетворяющие условию $\overline{x}\overline{a} = 0$, где $\overline{a}$ — фиксированный вектор;

г) все векторы из V_3, проекция которых на ось Ox равна 1.

Решение. Будем пользоваться критерием подпространства, т.е. проверять замкнутость подмножеств относительно операций сложения и умножения на число.

---

[2]В определение линейного пространства входят известные нам слова, которые в данном случае могут иметь смысл, не совпадающий с тем, к которому мы привыкли. Так элементы линейного пространства мы называем векторами исключительно для удобства — объектам со знакомыми свойствами даем привычное название. На самом деле элементами линейного пространства могут служить произвольные объекты и даже, более того: нам не важно, какова природа этих объектов, важно, что для них выполняются перечисленные выше свойства. То же можно сказать и про операции — их мы не случайно обозначаем $\oplus$ и $\odot$, а не $+$ и $\cdot$, чтобы также подчеркнуть их произвольную природу.

а) 1) Если $x = \langle x_1, \dots, x_n\rangle$, $y = \langle y_1, \dots, y_n\rangle \in L$, то $x_1 + \dots + x_n = 0$ и $y_1 + \dots + y_n = 0$. Так как $x \oplus y = \langle x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n\rangle$, то $x_1 + y_1 + \dots + x_n + y_n = x_1 + \dots + x_n + y_1 + \dots + y_n = 0 + 0 = 0$, т. е. $x \oplus y \in L$;

2) $\alpha x = \langle \alpha x_1 \dots, \alpha x_n\rangle$, при этом $\alpha x_1 + \dots + \alpha x_n = \alpha(x_1 + \dots + x_n) = \alpha \cdot 0 = 0$, т. е. $\alpha x \in L$.

Следовательно, L является линейным подпространством.

б) Если $x, y \in L$, то $x_1 + \dots + x_n = y_1 + \dots + y_n = 1$, тогда $x_1 + y_1 + \dots + x_n + y_n = x_1 + \dots + x_n + y_1 + \dots + y_n = 1 + 1 = 2$, т. е. $x \oplus y \notin L$.

Поскольку не выполняется замкнутость относительно сложения, L не является линейным подпространством.

в) 1) Если $\overline{x}$, $\overline{y} \in L$, то $\overline{x}\overline{a} = 0$, $\overline{y}\overline{a} = 0$, тогда $(\overline{x} + \overline{y})\overline{a} = \overline{x}\overline{a} + \overline{y}\overline{a} = 0 + 0 = 0$, т. е. $\overline{x} + \overline{y} \in L$.

2) $(\alpha\overline{x})\overline{a} = \alpha(\overline{x}\overline{a}) = \alpha \cdot 0 = 0$, т. е. $\alpha\overline{x} \in L$.

Следовательно, L является подпространством.

г) Если $\overline{x}$, $\overline{y} \in L$, то $\text{пр}_{\overline{i}}\overline{x} = \text{пр}_{\overline{i}}\overline{y} = 1$, тогда $\text{пр}_{\overline{i}}(\overline{x} + \overline{y}) = \text{пр}_{\overline{i}}\overline{x} + \text{пр}_{\overline{i}}\overline{y} = 1 + 1 = 2$, т.е. $\overline{x} + \overline{y} \notin L$.

Поскольку не выполняется замкнутость относительно сложения, L не является подпространством. ■

Так же как и в пространстве геометрических векторов, в линейном пространстве мы тоже вводим понятия линейной комбинации, линейной зависимости, базиса и координат.

Линейной комбинацией векторов $a_1, \dots, a_k$ называется выражение $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_k a_k$, где $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{P}$ — *коэффициенты линейной комбинации*. Таким образом, линейная комбинация — это тоже некоторый вектор.

Важным примером подпространства является так называемая *линейная оболочка*, натянутая на векторы $a_1, \dots, a_k \in L$, т. е. множество всех линейных комбинаций этих векторов. Обозначение: $L\langle a_1, \dots, a_k\rangle$. Заметим также, что $L\langle a_1, \dots, a_k\rangle$ — это минимальное по включению подпространство L, содержащее все векторы $a_1, \dots, a_k$.

Пусть $\langle L, \mathbb{P}, \oplus, \lambda\odot\rangle$ — линейное пространство.

Система векторов $\{x_1, \dots, x_n\} \in L$ называется *линейно зависимой*, если найдется нулевая нетривиальная линейная комбинация векторов этой системы, т. е. найдутся числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{P}$, не равные одновременно нулю и такие что

$$\lambda_1 \odot x_1 \oplus \dots \oplus \lambda_n \odot x_n = \overline{0}. \qquad (7.1)$$

Если равенство (7.1) возможно только при условии $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$, то система называется *линейно независимой.*

Базисом линейного пространства L называется любая максимальная по включению[3] линейно независимая система векторов из L. Таким образом, если $e_1, \ldots, e_n$ — базис пространства L, то:

1) векторы $\{e_1, \ldots, e_n\}$ образуют линейно независимую систему;

2) $\forall x \in L$ система $\{e_1, \ldots, e_n, x\}$ линейно зависима.

Базис пространства L определяется неоднозначно[4], но для всех базисов L есть общее свойство: они все состоят из одного и того же числа векторов, называемого *размерностью*[5] пространства L.

Любой вектор $x \in L$ может быть *разложен по базису*, т. е. представлен в виде линейной комбинации базисных векторов $e_1, \ldots, e_n$ и притом единственным образом: $x = x_1 \odot e_1 \oplus \cdots \oplus x_n \odot e_n$. Коэффициенты этого разложения $x_1, \ldots, x_n$ называются *координатами* вектора x в базисе $e_1, \ldots, e_n$.

Линейные операции над векторами в координатной форме

Введение базиса и координат позволяет перейти от рассмотрения абстрактных объектов — элементов линейного пространства — к их координатам. Набор координат вектора — это уже конкретный объект, с которым можно работать конкретными методами. Конечно, этот набор зависит от введенного базиса. Договоримся обозначать базис, состоящий из векторов $e_1, \ldots, e_n$, через $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$, а вектор-столбец, состоящий из координат вектора x в базисе $\mathcal{E}$, через $[x]_{\mathcal{E}}$:

$$[x]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

где $x = x_1 \odot e_1 \oplus \cdots \oplus x_n \odot e_n$.

Пусть векторы x, $y \in L$, и $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ — базис L.

Тогда координаты их суммы будут равны сумме их координат: $[x \oplus y]_{\mathcal{E}} = [x]_{\mathcal{E}} + [y]_{\mathcal{E}}$, а также $[\lambda \odot x]_{\mathcal{E}} = \lambda [x]_{\mathcal{E}}$.

---

[3] Напоминаем, что слова “максимальная по включению” в данном случае означают, что при добавлении к такой системе любого вектора из L теряется свойство линейной независимости.

[4] **Более того, существует теорема, утверждающая, что любую систему линейно независимых векторов L можно дополнить до базиса L, следовательно, в L существует бесконечно много различных базисов.**

[5] **Размерность линейного пространства не обязательно является конечным числом.**

Пусть $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ и $\mathcal{E}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ — два различных базиса в пространстве L. Разложение векторов базиса $\mathcal{E}$ по базису $\mathcal{E}'$ имеет вид

$$\begin{cases} e_1 = s_{11} \odot e'_1 \oplus s_{21} \odot e'_2 \oplus \dots \oplus s_{n1} \odot e'_n; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ e_n = s_{1n} \odot e'_1 \oplus s_{2n} \odot e'_2 \oplus \dots \oplus s_{nn} \odot e'_n. \end{cases}$$

Матрица $S = \begin{pmatrix} s_{11} & \dots & s_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{n1} & \dots & s_{nn} \end{pmatrix}$ называется *матрицей перехода* от базиса $\mathcal{E}$ к базису $\mathcal{E}'$. Обозначение: $S = T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}$. Заметим, что S^{-1} — матрица перехода[6] от $\mathcal{E}'$ к $\mathcal{E}$: $S^{-1} = T_{\mathcal{E}'\to\mathcal{E}}$.

Формула преобразования координат при преобразовании базиса выглядит следующим образом:

$$[x]_{\mathcal{E}'} = S[x]_{\mathcal{E}} \text{ и } [x]_{\mathcal{E}} = S^{-1}[x]_{\mathcal{E}'}, \text{ или } [x]_{\mathcal{E}'} = T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}[x]_{\mathcal{E}}.$$

Пример 2. В пространстве V_3 заданы векторы $\overline{e}_1 = \overline{i} + \overline{j} + \overline{k}$, $\overline{e}_2 = \overline{i}+$ $+\overline{j}$, $\overline{e}_3 = \overline{i}$. Доказать, что $(\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3)$ образуют базис в V_3, и найти матрицу перехода S от базиса $(\overline{i}, \overline{j}, \overline{k})$ к базису $\mathcal{E} = (\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3)$. Найти координаты вектора $\overline{x} = 2\overline{i} - 3\overline{j} + \overline{k}$ в базисе $\mathcal{E}$.

Решение

$\overline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\overline{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overline{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ — координаты векторов $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ в базисе $(\overline{i}, \overline{j}, \overline{k})$. Матрица перехода от базиса $(\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3)$ к базису $(\overline{i}, \overline{j}, \overline{k})$ имеет вид

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица S^{-1} невырожденная: $|S^{-1}| = -1$. Координаты вектора $\overline{x}$ в базисе $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$ найдем по формуле $[x]_{\mathcal{E}'} = S[x]_{\mathcal{E}}$. Поскольку

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

[6]Заметим, что разные авторы иногда по-разному определяют матрицы перехода. Иногда как раз S^{-1} называют матрицей перехода от $\mathcal{E}$ к $\mathcal{E}'$. Настоящее пособие написано применительно к данному определению, но будьте внимательны при чтении другой литературы.

имеем

$$[x]_{\mathcal{E}'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}, \text{ т. е. } \overline{x} = \overline{e}_1 - 4\overline{e}_2 + 5\overline{e}_3. \blacksquare$$

7.1. Задачи

1. Проверьте, являются ли следующие множества с естественными для них операциями сложения и умножения на число линейными пространствами:

а) V_3, V_2, V_1 — множества геометрических векторов в пространстве, на плоскости, на прямой;

б) $P_n(x)$ — множество всех многочленов степени не выше n;

в) множество всех многочленов степени n;

г) $\mathbb{R}^n = \{\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle | x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$ — множество упорядоченных наборов из n действительных чисел. Операции сложения и умножения на число определены по следующим правилам:

$$\langle a_1, \ldots, a_n\rangle \oplus \langle b_1, \ldots, b_n\rangle = \langle a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n\rangle,$$

$$\lambda \odot \langle a_1, \ldots, a_n\rangle = \langle \lambda a_1, \ldots, \lambda a_n\rangle;$$

д) $(\mathbb{R}^+)^n$ — множество упорядоченных наборов неотрицательных действительных чисел. Операции определены в задаче 1г);

е) $\mathbb{R}_2$ — множество квадратных матриц второго порядка над $\mathbb{R}$;

ж) $C_{[a,b]}$ — множество всех функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$;

з) множество векторов плоскости, начало которых совпадает с началом координат, а концы лежат:

1) на прямой, проходящей через начало координат;
2) на прямой, не проходящей через начало координат;
3) в 1 и 2 четвертях;
4) в 1 и 4 четвертях.

2. Образует ли множество L линейное пространство над полем $\mathbb{R}$ относительно операций $\oplus$ и $\lambda\odot$:

а) $L = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \right\}$, $A \oplus B \doteq AB$, $\lambda \odot A \doteq A$;

б) $L = \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$, $a \oplus b \doteq ab$, $\lambda \odot a \doteq a^\lambda$;

в) $L = V_2$, $\overline{x} \oplus \overline{y} \doteq 2(\overline{x} + \overline{y})$, $\lambda \odot \overline{x} \doteq -\lambda\overline{x}$?

3. Докажите следствия из аксиом линейного пространства:

а) в линейном пространстве L существует единственный нулевой элемент;

б) $\forall x \in L\left(0 \odot x = \overline{0}\right)$; в) $\forall x \in L\ \exists!(-x) \in L$;

г) $\forall x \in L\ ((-1) \odot x = -x)$; д) $\forall \lambda \in \mathbb{P}\ (\lambda \odot \overline{0} = \overline{0})$.

4. Докажите:

а) множество V_1 — подпространство пространства V_2;

б) множество V_2 — подпространство пространства V_3;

в) для любого натурального n $\{P_n(x) | \mathrm{deg} P_n(x) \le n\}$ — подпространство пространства $C_{(-\infty,\infty)}$.

5. Докажите, что линейная оболочка $L\langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle$ образует линейное пространство.

6. Найдите размерность и базис линейной оболочки, натянутой на векторы:

а) $x_1 = (2,1,3,1)$, $x_2 = (1,2,0,1)$, $x_3 = (-1,1,-3,0)$;

б) $x_1 = (2,1,3,-1)$, $x_2 = (-1,1,-3,1)$, $x_3 = (4,5,3,-1)$, $x_4 = (1,5,-3,1)$.

7. Покажите, что всякая система векторов, содержащая нулевой вектор, линейно зависима.

8. Проверьте, являются ли функции линейно зависимыми:

а) $2, x, 3x+1$; б) $\sin^2 x, \cos^2 x, -5$; в) e^x, e^{2x}, e^{3x}.

9. Докажите, что система элементов $\{1, t, t^2, \ldots, t^n\}$ образует базис в пространстве P_n многочленов степени не выше n:

$$P_n = \{a_n t^n + \cdots + a_0 | a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}.$$

Найдите координаты многочлена $t^3 - 2t$ в этом базисе.

10. В пространстве $\mathbb{R}^4$ заданы векторы:

$$a = (1,2,-1,2),\ b = (2,3,0,-1),\ c = (1,2,1,4),\ d = (1,3,-1,0).$$

Докажите, что система $\{w\} = \{a,b,c,d\}$ является базисом пространства $\mathbb{R}^4$. Найдите координаты вектора $x = (7,14,-1,2)$ в базисе $\{w\}$.

11. Докажите, что если ненулевые векторы a_1, a_2, a_3 линейно зависимы и a_3 не выражается линейно через a_1 и a_2, то $a_1 = \alpha \odot a_2$.

12. В пространстве многочленов $\{ax^2 + bx + c | a,b,c \in \mathbb{R}\}$ перешли от базиса $\{x^2, x, 1\}$ к новому базису с помощью матрицы перехода $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Укажите новый базис.

13. В линейном пространстве трехчленов $\{ax^2 + bx + c | a,b,c \in \mathbb{R}\}$ от базиса $(x^2, x, 1)$ перешли к новому базису:

$$а)\ 1, x+1, \frac{(x+1)^2}{2}; \quad б)\ 1, x, x^2+2.$$

Найдите матрицы перехода к новому базису.

7.2. Линейные операторы. Ядро и образ линейного оператора

Оператором над линейным пространством L (или *преобразованием* L) называется однозначное отображение $\boldsymbol{\varphi} : L \to L$, при котором каждому вектору $x \in L$ ставится в соответствие единственный вектор $y \in L$. Обозначение: $y = \boldsymbol{\varphi}x$, или $y = \boldsymbol{\varphi}(x)$. Вектор x называется *прообразом* y, а y — *образом* x.

В ближайших двух разделах мы будем рассматривать только вещественные линейные пространства.

Оператор $\boldsymbol{\varphi}$ называется *линейным*, если выполняются условия:

1) *аддитивности* — $\forall\, x, y \in L\ (\boldsymbol{\varphi}(x \oplus y) = \boldsymbol{\varphi}x \oplus \boldsymbol{\varphi}y)$ и

2) *однородности* — $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in L\ (\boldsymbol{\varphi}(\lambda \odot x) = \lambda \odot \boldsymbol{\varphi}x)$.

Пусть L_n — n-мерное линейное пространство, $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ — базис в нем и $\boldsymbol{\varphi}$ — линейный оператор над L_n. Пусть $x = x_1 \odot e_1 \oplus \cdots \oplus x_n \odot e_n \in L_n$. Тогда $\boldsymbol{\varphi}x = x_1 \odot \boldsymbol{\varphi}e_1 \oplus \cdots \oplus x_n \odot \boldsymbol{\varphi}e_n$, т. е., зная образы базисных векторов, мы можем восстановить образ любого вектора из L_n. Найдем образы базисных векторов:

$$\begin{cases} e'_1 = \boldsymbol{\varphi}e_1 = a_{11} \odot e_1 \oplus \cdots \oplus a_{n1} \odot e_n; \\ e'_2 = \boldsymbol{\varphi}e_2 = a_{12} \odot e_1 \oplus \cdots \oplus a_{n2} \odot e_n; \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ e'_n = \boldsymbol{\varphi}e_n = a_{1n} \odot e_1 \oplus \cdots \oplus a_{nn} \odot e_n. \end{cases}$$

Матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$ называется *матрицей линейного оператора $\boldsymbol{\varphi}$ в базисе $\mathcal{E}$* и обозначается $[\boldsymbol{\varphi}]_{\mathcal{E}} = A$. Иногда индекс $\mathcal{E}$ опускается, если и так ясно, о каком базисе идет речь. Итак, матрицей линейного оператора $[\boldsymbol{\varphi}]_{\mathcal{E}}$ называется матрица, столбцы которой состоят из координат (в базисе $\mathcal{E}$) образов (под действием $\boldsymbol{\varphi}$) базисных векторов.

Если $[x]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ — координаты вектора $x \in L_n$ в базисе $\mathcal{E}$, то

$$[\boldsymbol{\varphi}(x)]_{\mathcal{E}} = [\boldsymbol{\varphi}x]_{\mathcal{E}} = [\boldsymbol{\varphi}]_{\mathcal{E}}[x]_{\mathcal{E}}.$$

Пусть в пространстве L_n имеем два базиса: $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ и $\mathcal{E}' = (e'_1, \dots, e'_n)$, $S = T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}$ — матрица перехода от базиса $\mathcal{E}$ к базису $\mathcal{E}'$. Тогда имеет место формула преобразования матрицы оператора при смене базиса

$$[\boldsymbol{\varphi}]_{\mathcal{E}'} = S[\boldsymbol{\varphi}]_{\mathcal{E}} S^{-1} = T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}[\boldsymbol{\varphi}]_{\mathcal{E}} T_{\mathcal{E}'\to\mathcal{E}}. \tag{7.2}$$

Операции над операторами

1) $(\boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{\psi})x = \boldsymbol{\varphi}x + \boldsymbol{\psi}x$;
2) $(\lambda\boldsymbol{\varphi})x = \lambda(\boldsymbol{\varphi}x)$;
3) $(\boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\psi})x = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\psi}x)$.

Оператор $\boldsymbol{\varphi}^{-1}$ называется *обратным* к оператору $\boldsymbol{\varphi}$, если

$$\forall x \in L_n \Big(\boldsymbol{\varphi}^{-1}(\boldsymbol{\varphi}(x)) = x\Big).$$

Оператор $\boldsymbol{\varphi}$ называется *невырожденным*, если для него существует обратный оператор $\boldsymbol{\varphi}^{-1}$. Понятно, что $\boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\varphi}^{-1} = \boldsymbol{\varepsilon}$, где $\boldsymbol{\varepsilon}$ — *тождественный* оператор: $\forall x \in L_n \Big(\boldsymbol{\varepsilon}x = x\Big)$. Матрица невырожденного оператора в любом базисе также не вырождена[7] .

Пусть $\boldsymbol{\varphi}$ — оператор над линейным пространством L_n. Множество $\operatorname{Im}\boldsymbol{\varphi} = \{\boldsymbol{\varphi}x\}$ называется *образом оператора* $\boldsymbol{\varphi}$. Множество $\operatorname{Ker}\boldsymbol{\varphi} = \{x | \boldsymbol{\varphi}x = 0\}$ называется *ядром оператора* $\boldsymbol{\varphi}$. Образ и ядро линейного оператора являются подпространствами L_n. *Рангом оператора* $\boldsymbol{\varphi}$ называется размерность образа $\boldsymbol{\varphi}$: $r_{\boldsymbol{\varphi}} = \dim \operatorname{Im}\boldsymbol{\varphi}$. *Дефектом оператора* $\boldsymbol{\varphi}$ называется размерность ядра: $d_{\boldsymbol{\varphi}} = \dim \operatorname{Ker}\boldsymbol{\varphi}$. Для любого линейного оператора над L_n имеет место равенство: $r_{\boldsymbol{\varphi}} + d_{\boldsymbol{\varphi}} = n$.

Пример 3. В базисе $(\overline{i}, \overline{j}, \overline{k})$ написать матрицу оператора P_{Ox} проектирования на ось Ox.

Решение. Пусть $\overline{a} = (x, y, z)$. $P_{Ox}\overline{a} = (x, 0, 0)$. Легко проверить, что свойства аддитивности и однородности выполняются, т. е. P_{Ox} является линейным оператором. Найдем образы базисных векторов:

$$P_{Ox}\overline{i} = (1, 0, 0);\ P_{Ox}\overline{j} = (0, 0, 0);\ P_{Ox}\overline{k} = (0, 0, 0).$$

Следовательно,

$$[P_{Ox}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \ \blacksquare$$

[7] **На самом деле если $[\varphi]$ не вырождена хотя бы в одном базисе, то из (7.2) вытекает ее невырожденность в любом базисе.**

Пример 4. Найти базисы ядра и образа линейного оператора $\boldsymbol{\varphi}$, заданного в $\mathbb{R}^3$ следующим образом:

$$\boldsymbol{\varphi}x = (3x_1 + x_2 - x_3,\ 2x_1 - x_3,\ x_1 + 3x_2 + x_3).$$

Решение. Для нахождения базисов ядра и образа линейного оператора $\boldsymbol{\varphi}$ достаточно проделать следующую процедуру:

1) построить матрицу $(E|A^{\mathrm{T}})$, где $A = [\boldsymbol{\varphi}]$ в *стандартном* базисе, т.е. в базисе, состоящем из столбцов единичной матрицы;

2) элементарными преобразованиями **строк** привести ее к правоступенчатому виду.

Тогда базисом образа будут ненулевые строки в правой половине полученной правоступенчатой матрицы, а базисом ядра — строки левой части матрицы, соответствующие нулевым в правой половине[8] .

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix},\ (E|A^T) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 0 & -8 & -6 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -4 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ \boxed{-1 \quad 1 \quad -2} \end{array}}_{\mathrm{Ker}\boldsymbol{\varphi}} \middle| \overbrace{\begin{array}{ccc} \boxed{\begin{array}{ccc} 3 & 2 & 1 \\ -4 & -3 & 0 \end{array}} \\ 0 \quad 0 \quad 0 \end{array}}^{\mathrm{Im}\boldsymbol{\varphi}} \right).$$

Ответ. Базис ядра $\{(-1, 1, -2)\}$; базис образа $\{(3, 2, 1), (-4, -3, 0)\}$. ■

7.2. Задачи

1. Являются ли следующие преобразования линейными:

а) $x \to a$ (a — фиксированный вектор из L_n);

б) $x \to x + a$; в) $x \to \alpha x$ (α — фиксированный скаляр);

г) $\overline{x} \to (\overline{x}\overline{a})\overline{b}$ ($\overline{a}$, $\overline{b}$ — фиксированные векторы из $\mathbb{R}^3$);

д) $\overline{x} \to (\overline{a}\overline{x})\overline{x}$; е) $(x_1, x_2, x_3) \to (x_1 + 2, x_2 + 5, x_3)$;

ж) $(x_1, x_2, x_3) \to (x_1 + 3x_3, x_2^2, x_1 + x_3)$;

з) $(x_1, x_2, x_3) \to (x_1, x_2, x_1 + x_2 + x_3)$?

---

[8]Строки A^{T} суть векторы, на которые натянут образ φ, строки E — стандартный базис пространства. Элементарные преобразования строк эквивалентны умножению матрицы A^{T} слева на некоторую невырожденную матрицу U. Если $(UE|UA^{\mathrm{T}})$ — правоступенчатый вид $(E|A)$, то в силу невырожденности U ненулевые строки в правой половине матрицы — базис $\mathrm{Im}\varphi$, а при действии оператора φ на строки, соответствующие нулевым в правой половине, имеем $UEA^{\mathrm{T}} = UA^{\mathrm{T}}$. В силу невырожденности U строки U — базис всего пространства, поэтому строки U, переходящие в $\mathbf{0}$ при действии A^{T}, образуют базис $\mathrm{Ker}\varphi$.

2. Составьте матрицы линейных преобразований пространства V_3 в базисе $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$:

а) симметрия относительно начала координат;

б) проектирование на плоскость yOz;

в) симметрия относительно плоскости $y = x$;

г) симметрия относительно плоскости xOz;

д) симметрия относительно оси Oz;

е) $(x_1, x_2, x_3) \to (x_1, x_1 + 2x_2, x_2 + 3x_3)$;

ж) поворот плоскости xOy вокруг оси Oz на угол α против часовой стрелки;

з) $\bar{x} \to (\bar{x} \cdot \bar{a})\bar{a}$, где $\bar{a} = \bar{i} - 2\bar{k}$.

3. а) Составьте матрицу линейного преобразования плоскости: растяжение вдоль оси Ox в два раза, сжатие вдоль оси Oy в два раза.

б) Найдите зависимость между координатами образа $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ и прообраза $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ при этом преобразовании.

в) Найдите уравнение образа окружности $x^2 + y^2 = 1$.

4. Как изменится матрица линейного преобразования, если в базисе $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ поменять местами два вектора e_i и e_j?

5. Линейный оператор $\boldsymbol{\varphi}$ имеет в базисе $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ матрицу

$$[\boldsymbol{\varphi}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найдите матрицу этого преобразования в базисе:

а) (e_1, e_3, e_2, e_4); б) $(e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3, e_1 + e_2 + e_3 + e_4)$.

6. Линейное преобразование $\boldsymbol{\varphi}$ в базисе $(e_1,\ e_2,\ e_3)$ имеет матрицу $[\boldsymbol{\varphi}]$. Найдите его матрицу в базисе $(e'_1,\ e'_2,\ e'_3)$:

а)$e_1 = (8, -6, 7)$, $e_2 = (-16, 7, -13)$, $e_3 = (9, -3, 7)$,

$[\boldsymbol{\varphi}] = \begin{pmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 20 \\ 1 & -25 & 22 \end{pmatrix}$, $e'_1 = (1, -2, 1)$, $e'_2 = (3, -1, 2)$, $e'_3 = (2, 1, 2)$;

б)$e_1 = (3, -5, 2)$, $e_2 = (1, -1, 3)$, $e_3 = (2, 1, -2)$,

$[\boldsymbol{\varphi}] = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $e'_1 = (1, -6, 4)$, $e'_2 = (3, 5, 0)$, $e'_3 = (5, -12, 9)$.

7. Верно ли утверждение: всякий линейный оператор линейно зависимую систему векторов переводит снова в линейно зависимую систему векторов?

8. Верно ли утверждение: линейно независимая система векторов переводится линейным оператором снова в линейно независимую систему?

9. Покажите, что ядро и образ произвольного линейного оператора, действующего в линейном пространстве L, являются линейными подпространствами L.

10. Для указанных ниже линейных преобразований пространства $\mathbb{R}^3$ найдите дефект и ранг, а также постройте базисы ядра и образа:

а) $\boldsymbol{\varphi} x = (-x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_2 + x_3, x_1 + x_2 - x_3)$;

б) $\boldsymbol{\varphi} x = (2x_1 - x_2 - x_3, x_1 - 2x_2 + x_3, x_1 + x_2 - 2x_3)$.

11.* Приведите, если возможно, пример преобразования:

а) аддитивного, но не однородного;

б) однородного, но не аддитивного.

7.3. Собственные числа и собственные векторы

Пусть $\boldsymbol{\varphi}$ — линейный оператор на линейном пространстве L_n. Вещественное число λ называется *собственным числом* или *собственным значением* оператора $\boldsymbol{\varphi}$, если найдется такой ненулевой вектор $x \in L_n$, что

$$\boldsymbol{\varphi} x = \lambda \odot x. \tag{7.3}$$

Ненулевой вектор x, удовлетворяющий (7.3), называется *собственным вектором* оператора $\boldsymbol{\varphi}$, соответствующим собственному значению λ. Равенство (7.3) в матричном виде имеет вид $A[x] = \lambda[x]$, или

$$(A - \lambda E)[x] = \mathbb{0}, \tag{7.4}$$

где $A = [\boldsymbol{\varphi}]$. Для существования ненулевых решений $[x]$ системы линейных уравнений (7.4) необходимо и достаточно[9] , чтобы выполнялось равенство $\det(A - \lambda E) = 0$, или

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{7.5}$$

[9]Вообще говоря, матрица A зависит от выбора базиса, и еще требуется доказать справедливость того, что дальнейшие рассуждения (а главное — вывод) от выбора базиса не зависят.

В левой части (7.5) стоит определитель, раскрыв который мы получим многочлен относительно λ, называемый *характеристическим многочленом* оператора $\boldsymbol{\varphi}$. Само же уравнение (7.5) называется *характеристическим уравнением* этого оператора. Вещественные корни характеристического многочлена (и только они) являются собственными числами оператора $\boldsymbol{\varphi}$. Для всех корней характеристического многочлена, не только вещественных, тоже есть свое название: они называются *характеристическими числами* оператора $\boldsymbol{\varphi}$. Набор всех различных характеристических чисел линейного оператора называется его *спектром*. Собственные векторы, соответствующие известному собственному числу λ, находятся как ненулевые решения однородной системы уравнений

$$(A - \lambda E)[x] = \mathbb{0}.$$

Приведем удобную формулу для нахождения характеристического многочлена матрицы третьего порядка:

$$|A - \lambda E| = -\lambda^3 + (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2 -$$
$$-\left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \right) \lambda + |A|.$$

Аналогичная формула для второго порядка еще проще:

$$|A - \lambda E| = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + |A|.$$

Пример 5. Найти собственные числа и собственные векторы линейного оператора, заданного матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$.

Решение. Составим и решим характеристическое уравнение

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ -2 & -6-\lambda & 13 \\ -1 & -4 & 8-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \lambda^2(1 - 6 + 8) -$$
$$-\lambda \left(\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -6 & 13 \\ -4 & 8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 8 \end{vmatrix} \right) + \begin{vmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{vmatrix} =$$
$$= -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 1 = (1 - \lambda)^3 = 0.$$

Собственное число оператора $\lambda = 1$ имеет кратность 3, других собственных чисел этот оператор не имеет. Найдем собственные векторы, соответствующие найденному λ:

$$\begin{cases} (1-1)x_1 - 3x_2 + 3x_3 &= 0; \\ -2x_1 - (6+1)x_2 + 13x_3 &= 0; \\ -x_1 - 4x_2 + (8-1)x_3 &= 0; \end{cases} \begin{cases} -x_2 + x_3 &= 0; \\ -2x_1 - 7x_2 + 13x_3 &= 0; \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 &= 0. \end{cases}$$

Общее решение этой системы

$$\begin{cases} x_1 &= 3x_3; \\ x_2 &= x_3, \end{cases}$$

или

$$X = c\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Векторы $c\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ при ненулевом c являются собственными для собственного числа $\lambda = 1$.

Ответ. $\lambda_{1,2,3} = 1$; $X = c\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c \neq 0$. ■

Приведем также одну очень простую, но тем не менее важную теорему.

Теорема. *Матрица линейного оператора в базисе из собственных векторов имеет диагональный вид, причем на ее диагонали стоят собственные числа оператора.*

7.3. Задачи

1. Найдите собственные векторы и собственные числа линейных операторов, заданных матрицами:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \text{ б) } \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}; \text{ в) } \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix};$$

$$\text{г) } \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}; \text{ д) } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \text{ е) } \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix};$$

$$\text{ж) } \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \text{ з) } \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}; \text{ и) } \begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

2. Найдите собственные числа и собственные векторы линейных операторов в пространстве V_3:

а) $\boldsymbol{\varphi}\overline{x} = a\overline{x}$, $a \in \mathbb{R}$;

б) $\boldsymbol{\varphi}\overline{x} = (\overline{x} \cdot \overline{i})\overline{i}$;

в) $\boldsymbol{\varphi}\overline{x} = \overline{i} \times \overline{x}$.

3. Составьте матрицу оператора поворота в пространстве V_2 на угол α вокруг начала координат. Покажите, что в V_2 этот оператор не имеет собственных векторов.

4. Какие преобразования задают операторы, имеющие в базисе $(\overline{i}, \overline{j}, \overline{k})$ следующие матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; ж) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

з) $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$; и) $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$?

7.4. Жорданова форма линейного оператора

Наиболее наглядный и простой вид квадратной матрицы — диагональный. Когда матрица линейного оператора имеет диагональную форму, сразу видно, чему равны ее собственные значения (они стоят на диагонали), кроме того, понятно, что базис состоит из собственных векторов. К сожалению, не для любого линейного оператора существует такой базис. Однако вопрос о приведении матрицы линейного оператора к некоторому наиболее простому виду остается актуальным и в тех случаях, когда такого базиса нет.

Такая наиболее простая (т.е. в некотором роде наиболее близкая к диагональной) форма, к которой приводится матрица линейного оператора над полем, содержащим все характеристические числа оператора, называется *жордановой формой*.

В этом раздел будем полагать, что мы находимся над полем комплексных чисел.

Жордановой клеткой называется матрица следующего вида:

$$J = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 1 & \alpha \end{pmatrix} \text{ или } J = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

т. е. либо нижнетреугольная, либо верхнетреугольная. Жорданова форма матрицы имеет клеточно-диагональный вид, все клетки которого жордановы, разумеется, либо все нижнетреугольные, либо все верхнетреугольные.

Вид матрицы линейного оператора зависит от базиса. Поэтому нахождение жордановой формы можно связать с нахождением соответствующего базиса. Эта задача разбивается на две. Первая состоит в том, чтобы разложить пространство в прямую сумму инвариантных подпространств, а вторая — в том, чтобы в каждом таком подпространстве найти подходящий базис. Строгие теоретические обоснования и объяснения можно найти в [14] и [15]. Мы же дадим только необходимые определения и опишем алгоритмы.

Разберем сначала более простой случай нахождения жордановой формы для так называемого *нильпотентного* линейного оператора.

Линейный оператор $\boldsymbol{\varphi}$ называется *нильпотентным*, если существует такое натуральное число k, что $\boldsymbol{\varphi}^k(x) = \bar{0}$ для любого вектора $x \in V$.

Заметим, что в частности это означает, что $[\boldsymbol{\varphi}]^k = \mathbb{0}$. Кроме того, нильпотентный оператор $\boldsymbol{\varphi}$ не может иметь ненулевых собственных чисел. Действительно, если $\boldsymbol{\varphi}x = \lambda x$ для некоторого собственного (т. е. ненулевого) вектора x, то $\boldsymbol{\varphi}^k(x) = \lambda^k x$, а последний вектор может быть нулевым только в случае, если $\lambda = 0$

Теорема 1. *Для любого нильпотентного оператора в пространстве V существует так называемый жорданов базис, в котором матрица этого оператора имеет клеточно-диагональный вид с жордановыми клетками, имеющими нулевые диагонали.*

Посмотрим, какими свойствами обладает жорданов базис нильпотентного оператора. Допустим, жорданова форма матрицы нильпотентного оператора $\boldsymbol{\varphi}$ состоит из s нижнетреугольных жордановых клеток размерностей $k_1, \dots, k_s$, $k_1 + \dots + k_s = n$. Тогда, по определению матрицы линейного оператора, базис обладает следующим свойством:

$$\boldsymbol{\varphi}e_1 = e_2, \dots, \boldsymbol{\varphi}e_{k_1-1} = e_{k_1}, \boldsymbol{\varphi}e_{k_1} = \bar{0}, \dots,$$

$$\boldsymbol{\varphi}e_{n-k_s+1} = e_{n-k_s+2}, \dots, \boldsymbol{\varphi}e_{n-1} = e_n, \boldsymbol{\varphi}e_n = \bar{0}.$$

Т.е. векторы жорданова базиса разбиваются на “цепочки” переходящих друг в друга векторов, последний вектор цепочки принадлежит $\mathrm{Ker}\boldsymbol{\varphi}$. Такие цепочки называются *ниль-слоями.* Определим это понятие более точно.

Пусть $\boldsymbol{\varphi}$ — нильпотентный оператор и $v \in V$ — некоторый ненулевой вектор. Тогда последовательность векторов v, $\boldsymbol{\varphi}(v), \ldots, \boldsymbol{\varphi}^p(v)$, где $\boldsymbol{\varphi}^p(v) \neq 0$, называется *ниль-слоем.*

Поскольку $\boldsymbol{\varphi}$ — нильпотентный оператор, любой ниль-слой имеет конечную длину. Более того, длина цепочки p не превосходит $k-1$, где k — наименьшее натуральное число такое, что $\boldsymbol{\varphi}^k(V) = \{\overline{0}\}$. Несложно доказать, что векторы любого ниль-слоя линейно независимы.

В случае, когда ниль-слой содержит n векторов, то они образуют базис пространства, а матрица $\boldsymbol{\varphi}$ в этом базисе представляет из себя одну жорданову клетку. Таким образом, этот базис является жордановым. Но такой базис (из единственного ниль-слоя) существует для нильпотентного оператора далеко не всегда. В общем случае требуется найти несколько ниль-слоев, векторы которых линейно независимы и их суммарное количество совпадает с размерностью пространства.

Поиск и исследование ниль-слоев удобно проводить с помощью специальной таблицы, в строки которой записаны векторы ниль-слоев, причем строки имеют общую правую вертикальную границу. Такая таблица называется *жордановой таблицей*

Заметим, что поскольку ниль-слои могут иметь разную длину, то в жордановой таблице могут быть пустые “клетки” в начале некоторых строк.

Если векторы в правом столбце жордановой таблице линейно независимы, то все векторы таблицы будут также линейно независимы. Если же к тому же векторы таблицы образуют базис пространства, то такой базис называется *жордановым.* При этом длины ниль-слоев (строк жордановой таблицы) соответствуют размерам жордановых клеток в жордановой форме матрицы линейного оператора.

К жордановой таблице можно применять следующие элементарные преобразования:

1. перестановка слоев;

2. умножение слоя на любое ненулевое число;

3. прибавление к слою длины l соответствующего отрезка длины l из другого слоя, умноженного на любое число (т.е. к более короткой строке можно прибавлять часть более длинной, но не наоборот);

4. удаление нулевых векторов в правом столбце сдвигом строк вправо.

После таких преобразований снова получается жорданова таблица. С помощью таких преобразований можно добиться того, что в правом столбце таблицы получатся линейно-независимые векторы. При этом если исходная таблица содержала какой-нибудь базис пространства, то в результате преобразований получится как раз требуемый жорданов базис.

Получить такую исходную таблицу несложно: достаточно взять векторы любого базиса и построить ниль-слои, начинающиеся с этих векторов.

Пусть k — наименьшее натуральное число такое, что $\boldsymbol{\varphi}^k(V) = \{\bar{0}\}$, $A = [\boldsymbol{\varphi}]$. Тогда $A^k = \mathbb{0}$. Рассмотрим следующую таблицу[10] :

$$\left(E|A^{\mathrm{T}}|\left(A^{\mathrm{T}}\right)^2|\ldots|\left(A^{\mathrm{T}}\right)^{k-1}\right).$$

Пример 6. Найти жорданову форму и жорданов базис для нильпотентного линейного оператора, заданного матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 8 & -12 \\ 3 & 6 & -9 \end{pmatrix}.$$

Решение. Заметим, что $A^2 = \mathbb{0}$. Тем самым соответствующий линейный оператор действительно нильпотентный и начальная жорданова таблица имеет вид $\left(E|A^{\mathrm{T}}\right)$. Будем производить преобразования этой таблицы с целью занулить как можно больше элементов в последнем ее столбце:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -6 & -9 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ -2\mathrm{I} \\ +3\mathrm{I} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \\ & & & -2 & 1 & 0 \\ & & & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ +2\mathrm{I} \\ -3\mathrm{I} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \\ & & & 0 & 9 & 6 \\ & & & 0 & -12 & -8 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \\ & & & 0 & 9 & 6 \\ & & & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \\ & & & 0 & 3 & 2 \end{array}\right).$$

Векторы в последнем столбце таблицы линейно независимы, поэтому все векторы таблицы образуют жорданов базис. Заметим, что первый

[10]Здесь мы транспонируем матрицу линейного оператора, чтобы образы базисных векторов были записаны в строки.

слой состоит из двух векторов, а второй из одного, значит жордановы клетки будут иметь размеры 2 и 1 соответственно: $A_J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, а жорданов базис состоит из векторов $e_1^J = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2^J = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ и $e_3^J = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Заметим, что иногда удается построить жорданов базис несколько меньшими усилиями. Идея заключается в том, что нужно строить таблицу по слоям, начинающимся с векторов стандартного базиса. Если первого ниль-слоя недостаточно (в нем меньше чем n векторов), то добавляем ниль-слой, посторенный от второго базисного вектора и проделываем преобразования, чтобы векторы построенной таблицы стали линейно независимыми. Если их опять недостаточно, добавляем третий слой и так далее.

Пример 7. Для нильпотентного оператора, задаваемого матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, найти жорданов базис.

Решение. В качестве базиса пространства $\mathbb{R}^5$ возьмем стандартный базис. Составим первый ниль-слой, начинающийся с вектора $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Когда мы составляем ниль-слой, то записываем векторы в строки. Для нахождения образов векторов пользуемся привычной записью в столбцы. Нетрудно посчитать, что

$$Ae_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ A^2e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ A^3e_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ A^4e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

т.е. первый ниль-слой содержит четыре вектора $e_1, Ae_1, A^2e_1, A^3e_1$. Значит, он не образует базиса пространства. Составляем второй ниль-слой, который начинается с вектора $e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$. Этот слой также содержит четыре вектора: $e_2, Ae_2, A^2e_2, A^3e_2$.

Составим из этих двух слоев жорданову таблицу и получим из нее жорданов базис.

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc|ccccc|ccccc} 1&0&0&0&0&1&2&-1&1&0&0&0&4&1&1&4&-1&-5&-1&0\\ 0&1&0&0&0&1&2&3&2&1&4&-1&-1&0&1&4&-1&-5&-1&0\end{array}\right) \begin{matrix}\\ -\mathrm{I}\end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc|ccccc|ccccc} 1&0&0&0&0&1&2&-1&1&0&0&0&4&1&1&4&-1&-5&-1&0\\ -1&1&0&0&0&0&0&4&1&1&4&-1&-5&-1&0&0&0&0&0&0\end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc|ccccc|ccccc} 1&0&0&0&0&1&2&-1&1&0&0&0&4&1&1&4&-1&-5&-1&0\\ &&&&&-1&1&0&0&0&0&0&4&1&1&4&-1&-5&-1&0\end{array}\right) \begin{matrix}\\ -\mathrm{I}\end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc|ccccc|ccccc} 1&0&0&0&0&1&2&-1&1&0&0&0&4&1&1&4&-1&-5&-1&0\\ &&&&&-2&-1&1&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc|ccccc|ccccc} 1&0&0&0&0&1&2&-1&1&0&0&0&4&1&1&4&-1&-5&-1&0\\ &&&&&&&&&&&&&&&-2&-1&1&-1&0\end{array}\right) \begin{matrix}\\ -\mathrm{I}\end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc|ccccc|ccccc} 1&0&0&0&0&1&2&-1&1&0&0&0&4&1&1&4&-1&-5&-1&0\\ &&&&&&&&&&&&&&&-6&0&6&0&0\end{array}\right) \begin{matrix}\\ :(-6)\end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc|ccccc|ccccc} 1&0&0&0&0&1&2&-1&1&0&0&0&4&1&1&4&-1&-5&-1&0\\ &&&&&&&&&&&&&&&1&0&-1&0&0\end{array}\right).$$

Так как векторы последнего столбца линейно независимы, то и вся таблица линейно независима. Если учесть, что число векторов в ней 5, т. е. равно размерности пространства, то мы получили жорданов базис. Матрица линейного оператора в этом базисе имеет вид

$$A_J = \left(\begin{array}{cccc|c} 0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ \hline 0&0&0&0&0\end{array}\right).$$

Как видим, она состоит из двух жордановых клеток размерности 4 и 1 с нулями на главной диагонали. ■

Аналогичный подход можно применять для построения жордановых форм линейных операторов, имеющих единственное собственное число λ. Дело в том, что в этом случае оператор $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\varphi} - \lambda\boldsymbol{\varepsilon}$ (где $\boldsymbol{\varepsilon}$

—тождественный оператор) является нильпотентным. Жорданов базис для оператора $\boldsymbol{\psi}$ совпадает с таковым для исходного оператора $\boldsymbol{\varphi}$, а жорданова форма выглядит почти точно также, только по диагонали у нее идут не нули, а числа λ.

Но чаще нам встречается ситуация, когда линейный оператор имеет несколько различных собственных чисел.

Пусть теперь α — характеристическое число оператора $\boldsymbol{\varphi}$, ε — тождественный оператор. Тогда оператор $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\varphi} - \alpha\varepsilon$ имеет ненулевое ядро и, следовательно, $\mathrm{Im}\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\psi}(V) \subset V$ — собственное подпространство, т. е. имеем цепочку убывающих подпространств $V \supset \boldsymbol{\psi}(V) \supset \boldsymbol{\psi}^2(V) \supset \ldots$, которая стабилизируется на каком-то шаге. Пусть k — наименьшее натуральное число с условием $\boldsymbol{\psi}^k(V) = \boldsymbol{\psi}^{k+1}(V)$. *Корневым подпространством*, относящимся к характеристическому числу α, назовем подпространство

$$V_\alpha = \mathrm{Ker}\,\boldsymbol{\psi}^k = \{x \in V | \boldsymbol{\psi}^k(x) = \overline{0}\}.$$

Понятно, что оператор $\boldsymbol{\psi}$ на V_α является нильпотентным, поэтому по теореме 1 в V_α существует жорданов базис, в котором матрица $[\boldsymbol{\psi}]$ имеет клеточно-диагональный вид, состоящий из жордановых клеток с нулевой диагональю. Таким образом, в этом базисе

$$[\boldsymbol{\psi}] = [\boldsymbol{\varphi} - \alpha\varepsilon] = [\boldsymbol{\varphi}] - \alpha E = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 1 & 0 \end{matrix}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 1 & 0 \end{matrix}} \end{pmatrix},$$

тогда

$$[\boldsymbol{\varphi}] = [\boldsymbol{\psi}] + \alpha E = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \alpha & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 1 & \alpha \end{matrix}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{\begin{matrix} \alpha & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 1 & \alpha \end{matrix}} \end{pmatrix},$$

следовательно, матрица оператора $\boldsymbol{\varphi}$ в жордановом базисе корневого подпространства имеет жорданову форму с характеристическим числом α на диагонали. Легко понять, что корневое подпространство является инвариантным относительно оператора $\boldsymbol{\varphi}$. Пусть теперь $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ — все различные характеристические числа оператора $\boldsymbol{\varphi}$ с кратностями $m_1, \ldots, m_s$, т. е. характеристический многочлен имеет вид:

$$f[\lambda] = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{m_s}.$$

Справедлива

Теорема 2. *Пространство V разлагается в прямую сумму корневых подпространств*:

$$V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_s};$$

при этом размерности корневых подпространств равны кратностям соответствующих характеристических чисел в характеристическом многочлене оператора $\boldsymbol{\varphi}$.

Вот, наконец, и стало понятно, как нужно искать базис, в котором матрица линейного оператора имеет жорданову форму. Этот базис нужно “собрать” из жордановых базисов корневых подпространств.

На предыдущих примерах мы видим, что, зная базис подпространства, мы можем найти его жорданов базис. Значит, надо научиться находить базисы корневых подпространств.

Пусть, как и выше, α — характеристическое число оператора $\boldsymbol{\varphi}$, $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\varphi} - \alpha\varepsilon$, $[\boldsymbol{\psi}] = [\boldsymbol{\varphi} - \alpha\varepsilon] = [\boldsymbol{\varphi}] - \alpha E = N$. Нам нужно найти базис подпространства $V_\alpha = \operatorname{Ker} \boldsymbol{\psi}^k$. Это удобно делать по следующему алгоритму.

1. Составляем матрицу $(E|N^{\mathrm{T}})$ и приводим ее к правоступенчатому виду

$$(E|N^{\mathrm{T}}) \sim (B_1|C_1), \text{ где } C_1 \text{ — правоступенчатая матрица.}$$

Тогда строки матрицы B_1, продолжением которых служат нулевые строки матрицы C_1, дают нам базис $\operatorname{Ker} \boldsymbol{\psi}$.

2. Составляем матрицу $(B_1|C_1|C_1N^{\mathrm{T}})$ и приводим ее к правоступенчатому виду $(B_2|C_1'|C_2)$. Тогда строки матрицы B_2, окончанием которых служат нулевые строки матрицы C_2, являются базисом подпространства $\operatorname{Ker} \boldsymbol{\psi}^2$.

Процесс продолжаем до тех пор, пока в матрице C_k не получится нулевых строк столько, какова кратность корня α в характеристическом многочлене оператора $\boldsymbol{\varphi}$. При этом те строки матрицы B_k, окончанием которых служат нулевые строки матрицы C_k, образуют базис корневого подпространства V_α, а ненулевые строки матрицы C_k образуют базис прямой суммы оставшихся корневых подпространств.

После этого начинаем аналогичный процесс, только на первом шаге вместо матрицы E слева берем марицу C_k, а вместо $N^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} - \alpha E$ берем матрицу $N_1^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} - \beta E$, где β — следующее характеристическое число матрицы A. Перебрав все характеристические числа, получим базисы всех корневых подпространств. Заметим, что продолжением строк, образующих базисы корневых подпространств в матрице B_k, служат в точности ниль-слои, начинающиеся с этих базисных векторов и образованные матрицей $N^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} - \alpha E$. Из этих ниль-слоев получаем готовую жорданову таблицу для нахождения жорданова базиса V_α.

Пример 8. Найти жордановы базисы корневых подпространств оператора $\boldsymbol{\varphi}$, определяемого матрицей A, и жорданову форму матрицы A в базисе, “собранном” из этих базисов.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Решение. Прежде всего найдем характеристический многочлен и характеристические корни матрицы A. Сделаем это так, как показано в разделе 7.3 или в [1, 8.3.5]:

$$f[\lambda] = -\lambda^5 + 7\lambda^4 - 19\lambda^3 + 25\lambda^2 - 16\lambda + 4 = -(\lambda-2)^2(\lambda-1)^3,$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 1.\ N = A^{\mathrm{T}} - 2E.$$

$$(E|N) = \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & -2 & 3 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 3 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & -3 & 4 & -3 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & -2 & 3 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & -2 & 3 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Так как получились 2 нулевые строки, т.е. ровно столько, какова кратность корня $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, то процесс закончен. Поскольку размерность подпространства $V_2 = \mathrm{Ker}(A^{\mathrm{T}} - 2E)$ равна кратности корня, на этом подпространстве матрица A имеет диагональный вид и найденный базис $(0, -1, 1, 0, 2)$, $(-1, -1, 0, 1, 1)$ является жордановым.

Найдем жорданов базис корневого подпространства V_1 для матрицы $(A-E)$. Составим ниль-слой с первым вектором базиса V_1 $e_1 = (0, -1, 1, 0, 1)$:

$$(A - E)e_1 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Получилось, что этот ниль-слой состоит только из одного вектора e_1. Составим ниль-слой с вектором $e_2 = (-2, 3, -2, -2, 0)$:

$$(A - E)e_2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix},$$

$$(A-E)^2e_2=\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 & -3 & 0\\ -1 & 1 & 2 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & -2 & -2 & -1 & 0\\ 2 & 3 & 1 & 4 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4\\ 1\\ -1\\ 0\\ -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Составляем жордаднову таблицу из полученных двух ниль-слоев:

$$\left(\begin{array}{c|c} & e_1\\ e_2 & (A-E)e_2\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} & & & & & 0 & -1 & 1 & 0 & 1\\ -2 & 3 & -2 & -2 & 0 & 4 & 1 & -1 & 0 & -5\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} -2 & 3 & -2 & -2 & 0 & 4 & 1 & -1 & 0 & -5\\ & & & & & 1 & -1 & 1 & 0 & 0\end{array}\right).$$

Так как правый столбец таблицы линейно независим и число векторов в таблице равно размерности корневого подпространства V_1, эта таблица образует жорданов базис подпространства V_1. Жорданова форма матрицы A в "собранном" базисе имеет вид

$$A_J=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}. \blacksquare$$

Пример 9. Найти жорданову форму линейного оператора, заданного матрицей $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3\\ -2 & -6 & 13\\ -1 & -4 & 8\end{pmatrix}$ из примера 5 раздела 7.3.

Решение. Здесь характеристический корень $\lambda=1$ имеет кратность 3, а собственный вектор, соответствующий этому корню, — только один (с точностью до скалярного множителя). Значит, матрица не приводится к диагональному виду. Найдем жорданову форму матрицы. Составим матрицу $(E|A^{\mathrm{T}}-E)$ и приведем ее к правоступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1\\ 0 & 1 & 0 & -3 & -7 & -4\\ 0 & 0 & 1 & 3 & 13 & 7\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1\\ -4 & 1 & 0 & -3 & 1 & 0\\ 7 & 0 & 1 & 3 & -1 & 0\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1\\ -4 & 1 & 0 & -3 & 1 & 0\\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\sim(B_1|C_1).$$

Так как нулевая строка только одна, а кратность корня равна 3, мы должны сделать следующий шаг. Находим $C_1N=C_1(A^{\mathrm{T}}-E)=$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -3 & -7 & -4 \\ 3 & 13 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$ составляем матрицу $(B_1|C_1|C_1N)$ и приводим ее к правоступенчатому виду $(B_2|C_1'|C_2)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 3 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 0 & -3 & 1 & 0 & -3 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 3 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 & -3 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Наконец, находим $C_2N = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -3 & -7 & -4 \\ 3 & 13 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Значит, жорданова таблица имеет вид

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 3 & 1 & 1 \\ & & & -3 & 1 & 0 & -3 & -1 & -1 \\ & & & & & & 3 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 3 & 1 & 1 \\ & & & -3 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 3 & 1 & 1 \\ & & & & & & -3 & -1 & -1 \\ & & & & & & & & \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Это и есть жорданов базис, в котором матрица A имеет вид

$$A_J = \left(\boxed{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix}} \right). \blacksquare$$

Функции от матриц

Жорданова форма может применяться для нахождения аналитических функций от матриц.

Определение. *Если функция $f(\lambda)$ определена на спектре матрицы A, то $f(A) = g[A]$, где $g[\lambda]$ — любой многочлен, принимающий на спектре матрицы A те же значения, что и $f(\lambda)$.*

Для клетки Жордана $J = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 1 & \alpha \end{pmatrix}$ порядка n при условии, что $f(\lambda)$ имеет все производные до $(n-1)$-го порядка, $f(J)$ имеет вид:

$$f(J) = \begin{pmatrix} f(\alpha) & 0 & \dots & 0 \\ \dfrac{f'(\alpha)}{1!} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \dfrac{f^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1)!} & \dots & \dfrac{f'(\alpha)}{1!} & f(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Аналогично выглядит функция от верхнетреугольных жордановых клеток. Понятно, что

$$\text{если } A_J = \begin{pmatrix} \boxed{J_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{J_k} \end{pmatrix}, \text{ то } f(A_J) = \begin{pmatrix} \boxed{f(J_1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{f(J_k)} \end{pmatrix}.$$

Также можно показать, что если $A_J = SAS^{-1}$ — жорданова форма матрицы A, то $f(A) = S^{-1}f(A_J)S$. Отсюда следует, что для того чтобы найти $f(A)$, нужно привести A к жордановой форме, найти $f(A_J)$, применяя к каждой жордановой клетке формулу, приведенную для $f(J)$, и потом найти $f(A)$ с помощью матрицы перехода S от канонического базиса к жорданову базису матрицы A.

Пример 10. Найти e^A, где A — матрица из примера 7 на стр. 119.

Решение. Найдем e^{A_J}, а потом сопряжем ее матрицей перехода S от канонического базиса к жорданову базису. Итак, $f(x) = e^x$, для матрицы A $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$, значит, $f(\lambda_i) = f'(\lambda_i) = f''(\lambda_i) = f'''(\lambda_i) = 1$. Тогда по формуле для $f(A_J)$ имеем:

$$e^{A_J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Чтобы найти e^A, нужно найти матрицу перехода от канонического базиса к жорданову базису, найденному в примере 7.

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ тогда } S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & -6 & -1 & 11 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\text{и } e^A = Se^{A_J}S^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{13}{6} & \frac{19}{6} & -8 & \frac{44}{3} & \frac{19}{6} \\ \frac{5}{6} & \frac{11}{6} & -4 & \frac{53}{6} & \frac{11}{6} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -8 & \frac{44}{3} & \frac{8}{3} \\ -\frac{14}{3} & -\frac{20}{3} & 44 & -\frac{469}{6} & -\frac{44}{3} \end{pmatrix}.$$

Пример 11. Найти $\ln A$, где $A = \begin{pmatrix} 4 & -15 & 6 \\ 1 & -4 & 2 \\ 1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение. Найдем A_J описанным выше алгоритмом. Прежде всего составим характеристический многочлен и найдем характеристические числа

$$-\lambda^3 + (4-4+3)\lambda^2 - (-1-2+6)\lambda + 1 = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 1 = -(\lambda-1)^3.$$

Отсюда $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Теперь разлагаем пространство в сумму корневых подпространств:

$$(E|N^{\mathrm{T}}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -15 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = (B_1|C_1).$$

Находим

$$C_1N = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -15 & -5 & -5 \\ 6 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Выписываем жорданову таблицу

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ & & & 5 & 1 & 0 \\ & & & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ & & & 5 & 1 & 0 \\ & & & -5 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ & & & 5 & 1 & 0 \end{array}\right) \text{ —}$$

жорданов базис. Находим $A_J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Находим матрицу перехода к жорданову базису $S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда $S = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Находим

$\ln A_J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ и, наконец,

$$\ln A = S^{-1} \ln A_J S = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -15 & 6 \\ 1 & -5 & 2 \\ 1 & -5 & 2 \end{pmatrix}. \ \blacksquare$$

Пример 12. Найти e^A, где $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. Найдем характеристические числа

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0, \ \ \lambda_1 = \lambda_2 = 2.$$

Найдем жорданов базис

$$(E|N^{\mathrm{T}}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ & & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ & & & \end{array}\right) \ -$$

жорданов базис. В этом базисе $A_J = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Матрица перехода к жорданову базису $S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, тогда $S = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Находим $e^{A_J} = \begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ e^2 & e^2 \end{pmatrix}$ и, наконец,

$$e^A = S^{-1} A_J S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ e^2 & e^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^2 & -e^2 \\ e^2 & 0 \end{pmatrix}. \ \blacksquare$$

7.4. Задачи

1. Докажите, что оператор нильпотентен тогда и только тогда, когда все его характеристические числа равны нулю.

2. Найдите жорданов базис и вид оператора в этом базисе для следующих нильпотентных операторов:

а) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -2 & -7 & 13 \\ -1 & -4 & 7 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 7 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Докажите, что жорданова форма матрицы $A + \alpha E$ равна $A_J + \alpha E$, где A_J — жорданова форма матрицы A.

4. Докажите, что для обратимой матрицы A жорданова форма матрицы A^{-1} получается из жордановой формы матрицы A заменой характеристических чисел матрицы A обратными величинами.

5. Найдите жорданову форму следующих матриц. Для матриц четвертого и больших порядков выписаны характеристические многочлены.

а) $\begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, $f[\lambda] = (\lambda - 1)^4$;

д) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $f[\lambda] = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)^2$;

е) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 1 & -2 & 3 \\ -2 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $f[\lambda] = -(\lambda - 1)^3(\lambda - 2)^2$;

ж) $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ $f[\lambda] = \lambda^3(\lambda + 1)^2(\lambda + 2)$.

6. Найдите функции от матриц:

а) e^A, где $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$; б) A^{50}, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$;

в) $\sqrt{A}$, где $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$; г) $\sin A$, где $A = \begin{pmatrix} \pi - 1 & 1 \\ -1 & \pi + 1 \end{pmatrix}$;

д) e^A, где $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & -9 \\ 5 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

7. Докажите, что $|e^A| = e^{\operatorname{tr} A}$, где $\operatorname{tr} A = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$ — след матрицы A.

Глава 8

Евклидовы пространства

Вспомним, что в трехмерном пространстве самым “удобным” базисом, в котором определена координатная форма записи вектора, является базис $(\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$. Это происходит потому, что векторы $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ попарно ортогональны и имеют единичную длину. Получается, что для устройства такого базиса в произвольном линейном пространстве нужно ввести в нем метрику, т. е. определить “длину” элементов и “угол” между ними. В пространстве геометрических векторов мы имеем для этого линейку и транспортир, чего, конечно, нет в произвольном линейном пространстве. На помощь приходит скалярное произведение. Ведь в пространстве геометрических векторов $|\bar{a}| = \sqrt{\bar{a}^2}$, $\cos(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) = \dfrac{\bar{a}\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|}$. Значит, если в линейном пространстве определить скалярное произведение, то через него можно определить и метрику. Так вот, линейное пространство с определенным в нем скалярным произведением и называется *евклидовым*. А теперь перейдем к точным определениям.

8.1. Определение евклидова пространства

Вещественное линейное пространство называется *евклидовым*, если в нем каждой паре векторов[1] x, y поставлено в соответствие число (x, y), называемое *скалярным произведением* векторов x и y, для которого выполняются следующие условия:

1) $(x, y) = (y, x)$;
2) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$;
3) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$;
4) $(x, x) \geq 0$, причем $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \bar{0}$.

Таким образом, можно говорить об *аксиомах евклидова пространства*: они включают в себя 8 аксиом линейного пространства и 4 свойства скалярного произведения.

Нормой в линейном пространстве L называется функция, ставящая в соответствие каждому вектору $x \in L$ вещественное число $\|x\|$, для которого выполняются следующие условия:

[1]В этой главе под словом “вектор” следует понимать “элемент линейного пространства”.

1) $\|x\| > 0$, если $x \neq \overline{0}$, и $\|\overline{0}\| = 0$;

2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, $\lambda \in \mathbb{R}$;

3) $\forall x, y \in L \left(\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \right)$ — неравенство треугольника.

В евклидовом пространстве E норму можно задать следующим образом:

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}.$$

Корректность этого определения вытекает из соответствующих свойств скалярного произведения и из следующего *неравенства Коши–Буняковского*:

$$\forall x, y \in E \left(|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\| \right).$$

Такая норма носит название *евклидовой*.

Углом между векторами x и y называется угол $\varphi \in [0, \pi]$, косинус которого вычисляется по формуле

$$\cos \varphi = \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|}.$$

Корректность этой формулы также вытекает из неравенства Коши–Буняковского.

Векторы x и y называются *ортогональными*, если $(x, y) = 0$. Система векторов $x_1, \ldots, x_n$ называется *ортогональной*, если векторы этой системы попарно ортогональны друг другу.

Пример 1. $C_{[0,1]}$ — евклидово пространство функций, непрерывных на $[0, 1]$, в котором скалярное произведение определяется равенством:

$$(f, g) = \int_0^1 f(t) g(t) dt.$$

Найти нормы функций $f(t) = \sin \pi t$ и $g(t) = 2t$ и угол между ними.

Решение

$$\|\sin \pi t\| = \sqrt{(\sin \pi t, \sin \pi t)} = \sqrt{\int_0^1 \sin^2 \pi t dt} = \sqrt{\frac{1}{2} \int_0^1 (1 - \cos 2\pi t) dt} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}(t - \frac{1}{2\pi} \sin 2\pi t)\Big|_0^1} = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\|2t\| = \sqrt{\int_0^1 4t^2 dt} = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}};$$

$$(\sin \pi t, 2t) = 2\int\limits_0^1 t \sin \pi t dt = 2\left(-\frac{t\cos \pi t}{\pi} + \frac{\sin \pi t}{\pi^2}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{2}{\pi};$$

$$\cos(\widehat{\sin \pi t, 2t}) = \frac{\frac{2}{\pi}}{\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{2}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{6}}{\pi}. \blacksquare$$

8.1. Задачи

1. Можно ли в n-мерном векторном пространстве $\mathbb{R}^n = \{\langle x_1, \ldots \ldots, x_n\rangle | x_i \in \mathbb{R}\}$ определить скалярное произведение следующим образом:

$$\text{а) } (x, y) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k; \quad \text{б) } (x, y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j;$$

$$\text{в) } (x, y) = \sum_{k=1}^{n} k x_k y_k; \quad \text{г) } (x, y) = \max x_i \max y_j?$$

Почему?

2. Можно ли в линейном пространстве $C_{[a,b]}$ (множество всех непрерывных на $[a, b]$ функций) определить скалярное произведение следующим образом:

а) $\Big(f(x), g(x)\Big) = f(a)g(a) + f(b)g(b)$;

б) $\Big(f(x), g(x)\Big) = \max\limits_{a \le x \le b} f(x) \max\limits_{a \le x \le b} g(x)$;

в) $\Big(f(x), g(x)\Big) = \int\limits_a^b f(x)g(x)dx$;

г) $\Big(f(x), g(x)\Big) = \int\limits_a^b f(x)dx \int\limits_a^b g(x)dx$?

Ответ объясните.

3. Можно ли в линейном пространстве $C_{[a,b]}$ определить норму функции следующим образом:

$$\text{а) } \|f(x)\| = \max |f(x)|; \quad \text{б) } \|f(x)\| = \min_{a \le x \le b} f(x); \quad \text{в) } \|f(x)\| = |f(a)|;$$

$$\text{г) } \|f(x)\| = \sqrt{\int\limits_a^b f^2(x)dx}; \quad \text{д) } \|f(x)\| = |f(b)|?$$

4. Являются ли ортогональными в пространстве $\mathbb{R}^3$ системы векторов:

а) $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$, $(0, 0, 3)$;

б) $(1, 1, 2)$, $(-1, 1, 0)$, $(2, 2, -2)$?

5. Даны векторы $a = (3, -1, -4, 0, 1)$ и $b = (5, 10, -3, 10, 7)$ в ортонормированном базисе евклидова пространства. Найдите их нормы и угол между ними.

6. Пусть E — евклидово пространство матриц второго порядка, в котором скалярное произведение матриц $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$ определено равенством $(A, B) = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2$. Найдите угол между матрицами $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$.

7. Скалярное произведение многочленов $P_n(t)$, $Q_m(t)$ определено равенством: $(P, Q) = \int\limits_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$. Найдите скалярное произведение многочленов $P(t) = t^2$, $Q(t) = 2t + 1$ и угол между ними.

8. Напишите неравенство Коши–Буняковского для евклидова пространства:

а) $\mathbb{R}^n$;

б) $C_{[a,b]}$ со скалярным произведением $(f, g) = \int\limits_a^b f(t)g(t)dt$.

9. Пусть $C_{[0,1]}$ — евклидово пространство функций, непрерывных на отрезке $[0, 1]$, в котором скалярное произведение определяется равенством $(f, g) = \int\limits_0^1 f(t)g(t)dt$. Найдите нормы векторов $f(t) = \sin \pi t$ и $g(t) = t - 1$ и угол между ними.

10. Докажите, что в пространстве $\mathbb{R}^2$ скалярное произведение может быть задано формулой $(a, b) = 2a_1b_1 + 5a_2b_2$, где $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$. Найдите такое скалярное произведение для векторов $a = (1, 1)$ и $b = = (-3, 2)$.

8.2. Ортогональность векторов. Ортонормированный базис. Ортогонализация базиса

Процесс ортогонализации

Пусть дана произвольная система векторов $a_1, \ldots, a_n$. Наша задача — построить эквивалентную[2] ей систему попарно ортогональных ненулевых векторов $b_1, \ldots, b_m$. Это можно проделать с помощью следующих рекуррентных соотношений:

$$b_1 \doteq a_1;$$

$$b_i \doteq a_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{(a_i, b_k)}{(b_k, b_k)} b_k.$$

Некоторые из полученных векторов могут оказаться нулевыми; для завершения процесса нужно от них избавиться[3]. Применение этих формул

[2] Т. е. систему векторов с той же линейной оболочкой (см. стр. 103).

[3] Потому-то и может получиться m векторов вместо n первоначальных.

для получения ортогональной системы векторов $b_1, \ldots, b_m$ носит название *процесса ортогонализации Грама—Шмидта.*

Если векторы $a_1, \ldots, a_n$ представляют собой базис пространства E_n, то $m = n$ и $b_1, \ldots, b_n$ — *ортогональный базис* E_n.

Вычислить координаты $x_1, \ldots, x_n$ вектора x евклидова пространства в некотором ортогональном базисе $b_1, \ldots, b_n$ позволяют следующие *формулы Фурье*:

$$x_i = \frac{(x, e_i)}{(e_i, e_i)}.$$

Ортогональный базис евклидова пространства, векторы которого нормированы, т.е. имеют единичную норму, называется *ортонормированным.* Таким образом, базис $(e_1, \ldots, e_n)$ ортонормирован, если

$$(e_i, e_j) = \delta_{ij} \doteq \begin{cases} 1 & \text{при} \quad i = j; \\ 0 & \text{при} \quad i \neq j. \end{cases}$$

Числа δ_{ij} называются *символами Кронекера.*

Если $(e_1, \ldots, e_n)$ — ортонормированный базис, то скалярное произведение векторов $a = (x_1, \ldots, x_n)$ и $b = (y_1, \ldots, y_n)$, заданных координатами в этом базисе, вычисляется по формуле

$$(a, b) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n.$$

Пример 2. Перейти от базиса $\overline{a}_1 = \overline{i} + \overline{j}$, $\overline{a}_2 = 2\overline{i} - \overline{k}$, $\overline{a}_3 = \overline{i} - \overline{j} + \overline{k}$ пространства V_3 к ортонормированному базису.

Решение. Перейдем сначала к ортогональному базису, используя процесс ортогонализации:

$$\overline{b}_1 = \overline{a}_1 = \overline{i} + \overline{j} = (1, 1, 0);$$

$$\overline{b}_2 = \overline{a}_2 - \frac{(\overline{a}_2, \overline{b}_1)}{(\overline{b}_1, \overline{b}_1)} \overline{b}_1 = (2, 0, -1) - \frac{2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0}{1^2 + 1^2 + 0^2}(1, 1, 0) = (1, -1, -1);$$

$$\overline{b}_3 = \overline{a}_3 - \frac{(\overline{a}_3, \overline{b}_1)}{(\overline{b}_1, \overline{b}_1)} \overline{b}_1 - \frac{(\overline{a}_3, \overline{b}_2)}{(\overline{b}_2, \overline{b}_2)} \overline{b}_2 = (1, -1, 1) - \frac{0}{2}(1, 1, 0) - \frac{1}{3}(1, -1, -1) =$$

$$= (1, -1, 1) - \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right).$$

Непосредственной проверкой легко убедиться, что полученные векторы ортогональны. Перейдем теперь к ортонормированному базису $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$:

$$\overline{e}_1 = \frac{\overline{b}_1}{\|\overline{b}_1\|} = \frac{(1, 1, 0)}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{j};$$

$$\bar{e}_2 = \frac{\bar{b}_2}{\|\bar{b}_2\|} = \frac{(1, -1, -1)}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\bar{i} - \frac{1}{\sqrt{3}}\bar{j} - \frac{1}{\sqrt{3}}\bar{k};$$

$$\bar{e}_3 = \frac{\bar{b}_3}{\|\bar{b}_3\|} = \frac{\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)}{\sqrt{\frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{16}{9}}} =$$

$$= \frac{\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)}{\sqrt{\frac{8}{3}}} = \frac{1}{\sqrt{6}}\bar{i} - \frac{1}{\sqrt{6}}\bar{j} + \frac{2}{\sqrt{6}}\bar{k}.$$

Полученный базис $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ — ортонормированный. ■

8.2. Задачи

1. Докажите, что любая система попарно ортогональных векторов линейно независима.

2. Докажите, что множество векторов, ортогональных данной системе векторов, образует линейное подпространство.

3. Докажите, не пользуясь формулами Фурье, что координаты вектора $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ в ортонормированном базисе $e_1, \ldots, e_n$ вычисляются по формулам: $a_i = (a, e_i)$, $i = 1, \ldots, n$.

4. В пространстве многочленов степени $\leqslant n$ скалярное произведение многочленов $f(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$, $g(t) = b_0 + b_1 t + \cdots + b_n t^n$ определено следующим образом: $(f, g) = a_0 b_0 + a_1 b_1 + (2!)^2 a_2 b_2 + \cdots \cdots + (n!)^2 a_n b_n$. Докажите, что базис $1, t, \frac{t^2}{2!}, \ldots, \frac{t^n}{n!}$ ортонормированный.

5. Докажите, что на отрезке $[-\pi, \pi]$ система функций 1, $\sin x$, $\cos x$, $\sin 2x$, $\cos 2x, \ldots, \sin nx$, $\cos nx, \ldots$ ортогональна, если скалярное произведение функций определено следующим образом:

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) dx.$$

6. Применяя процесс ортогонализации, постройте ортогональный базис пространства исходя из базиса:

а) $x_1 = (1, -2, 2)$, $x_2 = (-1, 0, -1)$, $x_3 = (5, -3, -7)$;

б) $x_1 = (1, 1, 1)$, $x_2 = (3, 3, -1)$, $x_3 = (-2, 0, 6)$.

7. Проверьте ортогональность следующих векторов и дополните их до ортогонального базиса:

а) $e_1 = (1, -2, 1, 3)$, $e_2 = (2, 1, -3, 1)$;

б) $e_1 = (1, -1, 1, 3)$, $e_2 = (-4, 1, 5, 0)$.

8. Дополните следующие системы векторов до ортонормированных базисов:

а) $x_1 = \left(-\dfrac{11}{15}, -\dfrac{2}{15}, \dfrac{2}{3}\right)$, $x_2 = \left(-\dfrac{2}{15}, -\dfrac{14}{15}, -\dfrac{1}{3}\right)$;

б) $x_1 = \left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$, $x_2 = \left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$.

9. В пространстве многочленов степени $n \leq 2$ на отрезке $[0, 1]$ перейдите от базиса $1, t, t^2$ к ортонормированному. (Скалярное произведение определено в задаче **9** раздела 8.1.)

10. Докажите, что если в некотором базисе $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ евклидова пространства скалярное произведение векторов $a = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ и $b = \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i e_i$ выражается формулой $(a, b) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i$, то базис $\mathcal{E}$ — ортонормированный.

11. Докажите, что если система векторов арифметического пространства R^n: $x_1 = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n})$, $x_2 = (0, a_{22}, \ldots, a_{2n}), \ldots$, $x_n = (0, \ldots, 0, a_{nn})$ образует ортогональный базис, то $a_{ij} \neq 0$ при $i = j$ и $a_{ij} = 0$ при $i < j$.

8.3. Ортогональные и самосопряженные операторы

Пусть $\boldsymbol{\varphi}$ — линейный оператор над евклидовым пространством E_n.

Линейный оператор $\boldsymbol{\varphi}^*$ называется *сопряженным* оператору $\boldsymbol{\varphi}$, если

$$\forall\, x, y \in E_n \Big((\boldsymbol{\varphi} x, y) = (x, \boldsymbol{\varphi}^* y) \Big).$$

Для всякого оператора $\boldsymbol{\varphi}$ существует и притом единственный сопряженный оператор $\boldsymbol{\varphi}^*$. Если в ортонормированном базисе оператор $\boldsymbol{\varphi}$ имеет матрицу A, то оператор $\boldsymbol{\varphi}^*$ имеет матрицу A^{T}.

Оператор $\boldsymbol{\varphi}$ называется *самосопряженным*, если $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}^*$. Понятно, что если A — матрица самосопряженного оператора в ортонормированном базисе, то $A = A^{\mathrm{T}}$. Матрица с таким свойством называется *симметрической* или *симметричной*.

Свойства самосопряженного оператора

1. Матрица самосопряженного оператора в любом ортонормированном базисе симметрична.

2. Все характеристические числа самосопряженного оператора вещественны.

3. Различным собственным числам самосопряженного оператора соответствуют ортогональные собственные векторы.

4. Если $\boldsymbol{\varphi}$ — самосопряженный оператор над E_n, то в E_n существует ортонормированный базис из собственных векторов $\boldsymbol{\varphi}$ и матрица оператора в этом базисе имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — собственные числа оператора $\boldsymbol{\varphi}$.

Пример 3. Доказать, что произведение $\boldsymbol{\varphi\psi}$ двух самосопряженных операторов $\boldsymbol{\varphi}$ и $\boldsymbol{\psi}$ тогда и только тогда будет самосопряженным, когда $\boldsymbol{\varphi}$ и $\boldsymbol{\psi}$ перестановочны.

Решение

$\Rightarrow$) Пусть $\boldsymbol{\varphi\psi}$ — самосопряженный оператор. Тогда для любых $x, y \in E$ справедливо $(\boldsymbol{\varphi\psi}x, y) = (x, \boldsymbol{\varphi\psi}y)$. Но, поскольку операторы $\boldsymbol{\varphi}$ и $\boldsymbol{\psi}$ также самосопряженные, имеем $(x, \boldsymbol{\varphi\psi}y) = (\boldsymbol{\varphi}x, \boldsymbol{\psi}y) = (\boldsymbol{\psi\varphi}x, y)$. Таким образом, $(\boldsymbol{\varphi\psi}x, y) = (\boldsymbol{\psi\varphi}x, y)$ или $((\boldsymbol{\varphi\psi} - \boldsymbol{\psi\varphi})x, y) = 0$. Так как y — произвольный вектор, отсюда следует, что $(\boldsymbol{\varphi\psi} - \boldsymbol{\psi\varphi})x = \overline{0}$. Но x — также произвольный вектор, значит, $\boldsymbol{\varphi\psi} - \boldsymbol{\psi\varphi} = 0$ и $\boldsymbol{\varphi\psi} = \boldsymbol{\psi\varphi}$.

$\Leftarrow$) Пусть $\boldsymbol{\varphi\psi} = \boldsymbol{\psi\varphi}$. Тогда $(\boldsymbol{\varphi\psi}x, y) = (\boldsymbol{\psi\varphi}x, y) = (\boldsymbol{\varphi}x, \boldsymbol{\psi}y) = (x, \boldsymbol{\varphi\psi}y)$ для любых векторов x, y. Сравнивая начало и конец, видим, что оператор $\boldsymbol{\varphi\psi}$ — самосопряженный. ■

Понятие ортогонального оператора

Линейный оператор $\boldsymbol{\varphi}$ над евклидовым пространством E называется *ортогональным*, если он сохраняет скалярное произведение, т. е.

$$\forall x, y \in E\Big((x, y) = (\boldsymbol{\varphi}x, \boldsymbol{\varphi}y)\Big).$$

Матрица A ортогонального оператора в некотором ортонормированном базисе называется также *ортогональной* и обладает тем характеристическим[4] свойством, что ее обратная матрица совпадает с ее транспонированной

$$A^{\mathrm{T}} = A^{-1}.$$

Пример 4. Доказать, что в евклидовом пространстве E матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому является ортогональной.

[4]Т.е. определяющим.

Решение. Пусть $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ и $\mathcal{E}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ — ортонормированные базисы в E, $S = T_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}$. Тогда по определению матрицы перехода столбцы матрицы S (и строки S^{T}) состоят из координат векторов из $\mathcal{E}$ в базисе $\mathcal{E}'$. Докажем, что S — ортогональна, т.е. $S^{\mathrm{T}}S = E$. Так как $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}'$ — ортонормированны, то

$$S^{\mathrm{T}}S \overset{5}{=} \begin{pmatrix} (e'_1, e'_1) & \cdots & (e'_1, e'_n) \\ \vdots & & \vdots \\ (e'_n, e'1) & \cdots & (e'_n, e'_n) \end{pmatrix} \overset{6}{=} \begin{pmatrix} \delta_{11} & \cdots & \delta_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \delta_{n1} & \cdots & \delta_{nn} \end{pmatrix} = E,$$

т. е. $S^{\mathrm{T}} = S^{-1}$. ■

8.3. Задачи

1. Найдите сопряженный оператор для поворота евклидовой плоскости на угол α против часовой стрелки.

2. Найдите ортонормированный базис из собственных векторов и матрицу линейного оператора в этом базисе, если оператор задан в некотором ортонормированном базисе матрицей:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 17 & -8 & 4 \\ -8 & 17 & -4 \\ 4 & -4 & 11 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{в) } A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Выясните, можно ли матрицу линейного оператора привести к диагональному виду путем перехода к новому базису. Найдите этот базис и матрицу оператора в этом базисе:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \text{ б) } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}; \text{ в) } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

4. В пространстве многочленов степени $n \le 2$ задано скалярное произведение: $(f, g) = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2$, где $f(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2$ и $g(t) = b_0 + b_1t + b_2t^2$. Найдите матрицы оператора дифференцирования и сопряженного ему оператора в базисе:

а) $1,\ t,\ t^2$; б) $1,\ t,\ \dfrac{3}{2}t^2 - \dfrac{1}{2}$.

5. Докажите, что ортогональный оператор переводит ортонормированный базис в ортонормированный.

6. Является ли оператор поворота евклидовой плоскости на угол α против часовой стрелки ортогональным?

[5]Равенство верно, поскольку $\mathcal{E}$ ортонормирован.

[6]Равенство верно, поскольку $\mathcal{E}'$ ортонормирован.

7. Докажите, что характеристические числа ортогонального оператора по модулю равны 1.

8. Докажите, что линейная комбинация самосопряженных операторов есть самосопряженный оператор.

9. Докажите, что если $\boldsymbol{\varphi}$ и $\boldsymbol{\psi}$ — самосопряженные операторы, то оператор $\boldsymbol{\varphi\psi} + \boldsymbol{\psi\varphi}$ тоже будет самосопряженным.

10. Даны матрицы линейных операторов в ортонормированном базисе. Определите, какие из них являются матрицами самосопряженных операторов:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A+B,\ A+C,\ B+C,\ AB,\ AC,\ BC.$$

Глава 9

Кривые и поверхности второго порядка. Квадратичные формы

Уравнение кривой второго порядка в общем виде выглядит следующим образом:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0.$$

Для каждой кривой второго порядка существует такая система координат, называемая *канонической*, в которой это уравнение принимает один из следующих *канонических* видов:

1) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ — *эллипс*;

2) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ — *гипербола*;

3) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1$ — *мнимый эллипс*;

4) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ — *точка*;

5) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ — *пара пересекающихся прямых*;

6) $y^2 = 2\rho x$ — *парабола*;

7) $x^2 = a^2$ — *пара параллельных прямых*;

8) $x^2 = 0$ — прямая (точнее, *пара совпадающих прямых*);

9) $x^2 = -a^2$ — *пара мнимых параллельных прямых.*

Случаи 3) и 9) задают на действительной плоскости пустые множества[1], случаи 4), 5), 7) и 8) также являются вырожденными. Интерес представляют *эллипс, гипербола* и *парабола.*

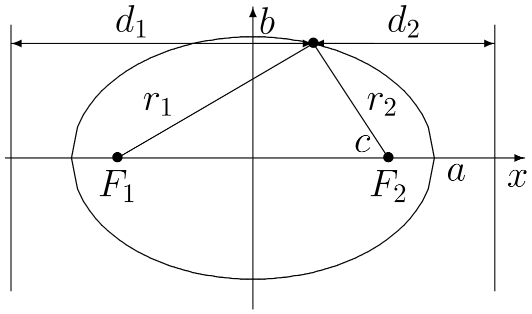
9.1. Окружность и эллипс

Эллипс — множество точек плоскости, сумма расстояний от которых

[1]Такие кривые (и в дальнейшем поверхности) второго порядка мы будем называть *мнимыми.*

до двух данных точек (*фокусов*) есть величина постоянная:

$$|\overline{MF_1}| + |\overline{MF_2}| = 2a.$$

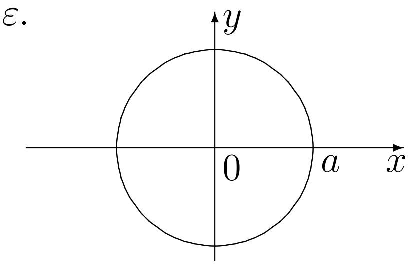


Если в системе координат Oxy точки $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$ — фокусы эллипса, то уравнение эллипса принимает следующий *канонический* вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

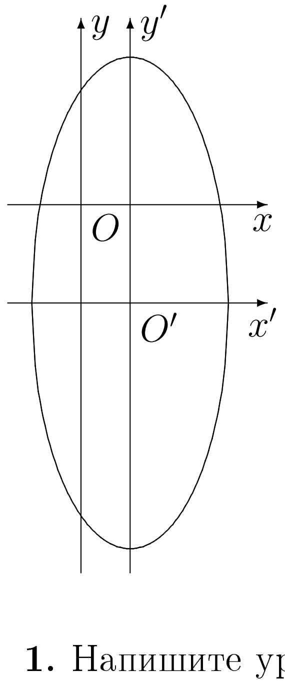
Числа a и b — *полуоси эллипса*, $a^2 = b^2 + c^2$, где $|F_1F_2| = 2c$; $\varepsilon = \dfrac{c}{a} < 1$ — *эксцентриситет эллипса*, $r_1 = |\overline{F_1M}|$, $r_2 = |\overline{F_2M}|$ —*фокальные радиусы эллипса*, прямые $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon}$ называются *директрисами эллипса* и обладают следующим свойством: $\dfrac{r_1}{d_1} = \dfrac{r_2}{d_2} = \varepsilon$.

Окружностью называется частный случай эллипса, при котором $a = b$. $x^2 + y^2 = a^2$ — уравнение окружности радиуса a с центром в начале координат.



Пример 1. Привести уравнение $25x^2 - 50x + 4y^2 + 16y - 59 = 0$ к каноническому виду; построить кривую.

Решение. Выделим в уравнении полные квадраты:



$$25(x^2 - 2x + 1) - 25 + 4(y^2 + 4y + 4) - 16 - 59 = 0;$$

$$25(x-1)^2 + 4(y+2)^2 = 100; \ \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{25} = 1.$$

Обозначим: $\begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y + 2 \end{cases}$.

В новой системе координат $O'x'y'$ получаем каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{(x')^2}{2^2} + \frac{(y')^2}{5^2} = 1. \ \blacksquare$$

9.1. Задачи

1. Напишите уравнение окружности, для которой отрезок AB является диаметром, $A(3, -7)$, $B(5, 1)$.

2. Найдите центр и радиус окружности, заданной уравнением

$$x^2 + y^2 + 2x - 10y + 1 = 0.$$

3. Постройте эллипс, заданный уравнением $9x^2+25y^2 = 225$. Найдите:

а) эксцентриситет;

б) расстояния от точки M, лежащей на эллипсе и имеющей абсциссу $x_0 = \dfrac{5}{2}$ до фокусов.

4. Составьте уравнения:

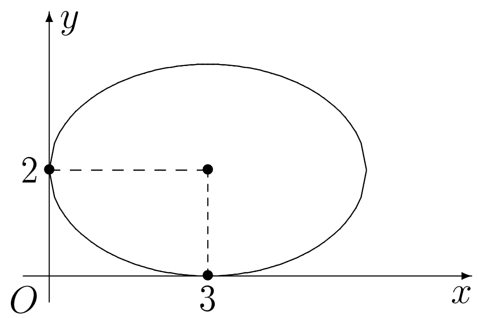
а) эллипса;

б) верхней его половины;

в) нижней половины;

г) правой половины;

д) левой половины.



5. Приведите уравнения эллипса к каноническому виду. Постройте эллипс, найдите его эксцентриситет:

а) $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$;

б) $16x^2 + 25y^2 + 32x - 100y - 284 = 0$.

6. Постройте кривую: $x = 3 - \sqrt{8 - y^2 - 2y}$.

7. Напишите уравнение кривой, сумма расстояний от каждой точки которой до точек $F_1(-1, 0)$ и $F_2(1, 0)$ остается постоянной и равной $2\sqrt{3}$.

8. Составьте каноническое уравнение эллипса, зная, что:

а) малая ось равна 24, фокусное расстояние равно 10;

б) большая ось равна 20, эксцентриситет $\varepsilon = \dfrac{3}{5}$;

в) расстояние между директрисами равно 5, между фокусами — 4;

г) большая ось равна 8, расстояние между директрисами — 16;

д) расстояние между директрисами равно 32 и $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$.

9. Найдите каноническое уравнение эллипса, если площадь ромба, вершины которого находятся в фокусах и вершинах эллипса, равна 6, а его периметр равен 20.

10. Найдите площадь равнобедренного треугольника, вершина которого лежит в фокусе эллипса, а основание проходит через другой фокус.

11. Эксцентриситет эллипса $\varepsilon = \dfrac{2}{5}$, расстояние от точки M эллипса до директрисы равно 20. Вычислите расстояние от точки M до фокуса, одностороннего с этой директрисой.

12. Определите эксцентриситет эллипса, если:

а) расстояние между директрисами в три раза больше расстояния между фокусами;

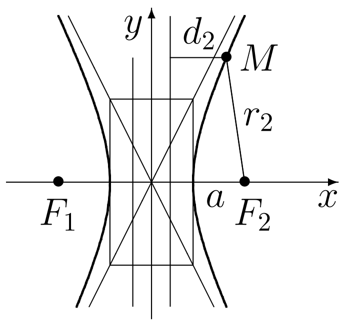
б) отрезок перпендикуляра, опущенного из центра эллипса на его директрису, делится вершиной эллипса пополам.

13. Найдите каноническое уравнение эллипса, если его параметры образуют арифметическую прогрессию, а уравнения директрис имеют вид $x = \pm\dfrac{50}{3}$.

14. Составьте уравнение эллипса, если известны его экстцентриситет $\varepsilon = \dfrac{2}{3}$, фокус $F(2,1)$ и уравнение соответствующей директрисы $x = 5$.

9.2. Гипербола, парабола

Гиперболой называется множество точек плоскости, разность расстояний от которых до двух данных точек (*фокусов*) есть величина постоянная.



Если в системе координат Oxy фокусы имеют координаты $F_{1,2}(\pm c, 0)$, то уравнение гиперболы выглядит следующим каноническим образом:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Параметр a называется *вещественной полуосью*, а b — *мнимой полуосью* гиперболы.

Если в системе координат Oxy фокусы имеют координаты $F_{1,2}(0, \pm c)$, то каноническое уравнение гиперболы имеет вид $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = -1$[2], при этом a — мнимая и b — вещественная полуоси, прямые $y = \pm\dfrac{b}{a}x$ — *асимптоты гиперболы*, $\varepsilon = \dfrac{c}{a} > 1$ — *эксцентриситет гиперболы*, $r_1 = |\overline{F_1M}|$, $r_2 = |\overline{F_2M}|$ —*фокальные радиусы гиперболы*, вычисляемые по формулам

левая ветвь	правая ветвь
$r_1 = -a - \varepsilon x, r_2 = a - \varepsilon x$	$r_1 = a + \varepsilon x,\ r_2 = -a + \varepsilon x$

Прямые $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon}$ — *директрисы гиперболы*, обладающие тем же свойством, что и директрисы эллипса.

Параметры a, b, c связаны соотношением $a^2 + b^2 = c^2$.

[2]Это уравнение иногда называют *каноническим уравнением сопряженной гиперболы.*

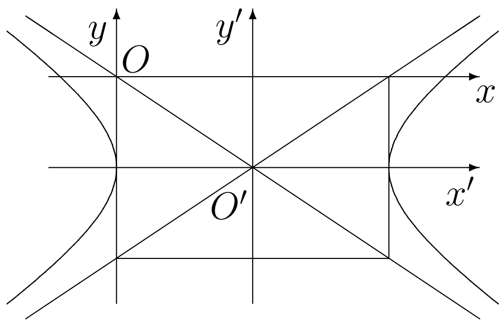
Пример 2. Привести уравнение кривой к каноническому виду, построить кривую: $4x^2 - 9y^2 - 24x - 36y - 36 = 0$.

Решение. В уравнении кривой выделим полные квадраты:

$$4(x^2 - 6x + 9) - 36 - 9(y^2 + 4y + 4) + 36 - 36 = 0;$$

$$4(x-3)^2 - 9(y+2)^2 = 36;\ \frac{(x-3)^2}{9} - \frac{(y+2)^2}{4} = 1.$$

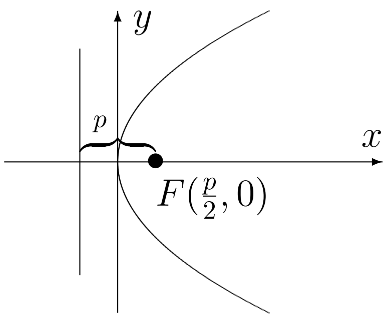
$$\begin{cases} x' = x - 3, \\ y' = y + 2; \end{cases} \quad O'(3; -2).$$



В новой системе координат $O'x'y'$ получаем каноническое уравнение гиперболы:

$$\frac{(x')^2}{3^2} - \frac{(y')^2}{2^2} = 1. \blacksquare$$

Параболой называется множество точек плоскости, равноудаленных от заданной точки (*фокуса*) и заданной прямой (*директрисы*). Параметр параболы p — расстояние от фокуса до директрисы.

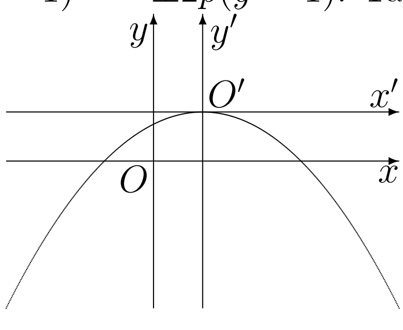


Если в системе координат Oxy уравнение директрисы имеет вид $x = -\dfrac{p}{2}$ и фокус $F\left(\dfrac{p}{2}, 0\right)$, то уравнение параболы принимает следующий канонический вид:

$$y^2 = 2px.$$

Пример 3. Составить уравнение параболы и построить ее, если ось ее симметрии параллельна оси Oy, точка $M(3,0)$ принадлежит параболе и ее вершина находится в точке $A(1,1)$.

Решение. Если A — вершина параболы, ось симметрии параллельна оси Oy, то ее уравнение имеет вид $(x-1)^2 = \pm 2p(y-1)$. Так как парабола проходит через точку M, то координаты ее удовлетворяют уравнению параболы: $(3-1)^2 = \pm 2p(0-1)$; $4 = \mp 2p$; $p = 2$. Итак, искомое уравнение параболы[3] имеет вид $(x-1)^2 = -4(y-1)$. $\blacksquare$

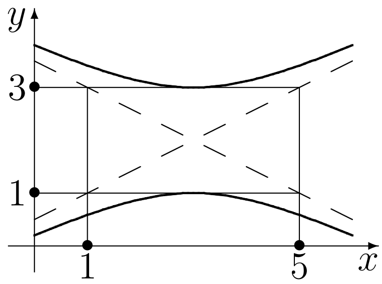


[3]Параметр параболы p равен расстоянию от фокуса до директрисы и не может быть отрицательным. То, что в уравнении появился минус, означает лишь "неканоническую" ориентацию параболы.

9.2. Задачи

1. Постройте гиперболу, заданную уравнением $9x^2 - 64y^2 = 576$. Найдите координаты фокусов, уравнения асимптот, эксцентриситет.

2. Составьте уравнение кривой, отношение расстояний от каждой точки которой до точки $F(5,0)$ и прямой $x = 3$ равно $\varepsilon = \sqrt{\dfrac{5}{3}}$.



3. Составьте уравнение гиперболы, ее верхней, нижней, правой и левой половины.

4. Составьте уравнение параболы, фокус которой находится в точке $F(-5,-3)$, уравнение директрисы $y = 1$. Постройте параболу.

5. Определите тип кривой по данному уравнению. Приведите уравнение к каноническому виду. Постройте кривую:

а) $25x^2 - 50x - 4y^2 - 16y - 66 = 0$;

б) $4x^2 - 8x - y + 7 = 0$.

6. Составьте каноническое уравнение гиперболы, зная, что:

а) уравнения асимптот $y = \pm\dfrac{4}{3}x$ и расстояние между фокусами равно 20;

б) расстояние между директрисами равно $\dfrac{8}{3}$ и эксцентриситет $\varepsilon = \dfrac{3}{2}$;

в) уравнения асимптот $y = \pm\dfrac{3}{4}x$ и расстояние между директрисами равно $12\dfrac{4}{5}$;

г) уравнения асимптот $y = \pm\dfrac{5}{12}x$ и расстояние между вершинами равно 48;

д) уравнения асимптот $y = \pm\dfrac{3}{4}x$ и уравнения директрис $x = \pm\dfrac{16}{5}$.

7. Найдите площадь треугольника, образованного асимптотами и директрисой гиперболы $4x^2 - y^2 - 16 = 0$.

8. Через правый фокус гиперболы $\dfrac{x^2}{80} - \dfrac{y^2}{20} = 1$ проведен перпендикуляр к фокальной оси. Найдите фокальные радиусы точек пересечения этого перпендикуляра с гиперболой.

9. Составьте уравнение гиперболы, фокусы которой лежат в вершинах эллипса $\dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{64} = 1$, а директрисы проходят через фокусы этого эллипса.

10. На гиперболе $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$ найдите точки, для которых отношение фокальных радиусов равно $\dfrac{41}{9}$.

11. Докажите, что расстояние от фокуса гиперболы $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ до ее асимптоты равно b.

12. Определите, при каких значениях m прямая $y=\dfrac{5}{2}x+m$:

а) пересекает гиперболу $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{36}=1$;

б) касается ее;

в) проходит вне этой гиперболы.

13. Составьте уравнение параболы, зная ее фокус и уравнение директрисы:

а) $F(-5,-3)$, $y=1$;

б) $F(7,2)$, $x-5=0$;

в) $F(4,3)$, $y+1=0$.

Постройте параболу.

14. Дана вершина параболы $A(6,-3)$ и уравнение ее директрисы $3x-$ $-5y+1=0$. Найдите параметр параболы и ее фокус.

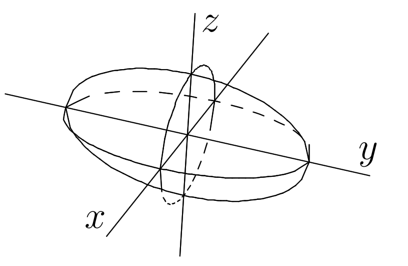
15. Найдите параметр, фокус и уравнение директрисы для параболы $y=\dfrac{1}{8}x^2-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$.

9.3. Поверхности второго порядка

Уравнение поверхности второго порядка в общем виде выглядит следующим образом:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}y^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2b_1x+2b_2y+2b_3z+c=0.$$

Существует система координат, в которой это уравнение принимает один из 17 канонических видов. Нас интересуют следующие невырожденные и не мнимые канонические уравнения:

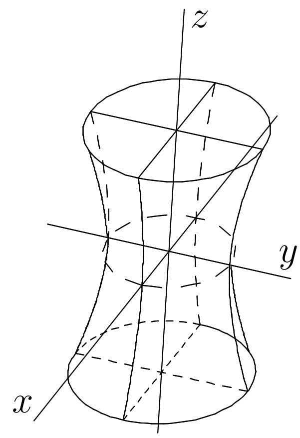


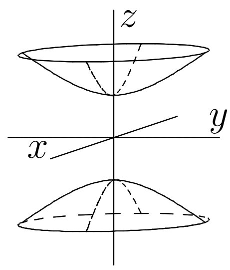
1. *Эллипсоид*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

2. *Однополостный гиперболоид*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$



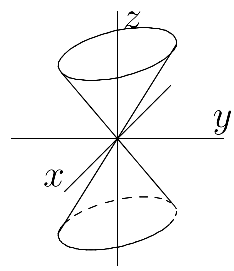


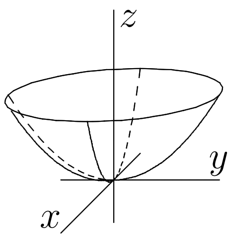
3. *Двуполостный гиперболоид*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

4. *Конус*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$



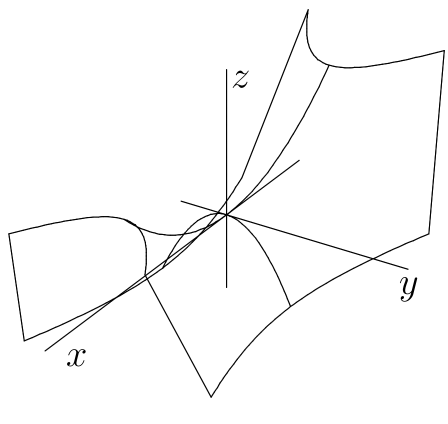


5. *Эллиптический параболоид*

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

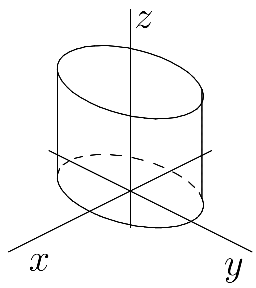
6. *Гиперболический параболоид*

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}.$$

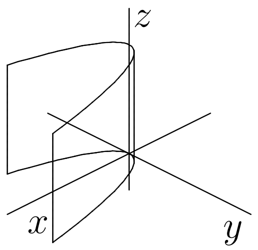


7. *Эллиптический цилиндр*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$



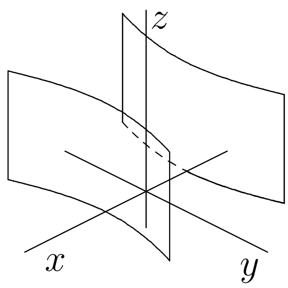
8. *Параболический цилиндр*



$$y^2 = 2px, p > 0.$$

9. *Гиперболический цилиндр*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$



9.3. Задачи

1. Установите тип заданных поверхностей и постройте их:

а) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{16} = 1$; б) $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} - \dfrac{z^2}{4} = 1$; в) $x^2 + y^2 - z^2 = -1$;

г) $x^2 - y^2 = z^2$; д) $x^2 + y^2 = 6z$; е) $x^2 - y^2 = 6z$; ж) $z = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9}$;

з) $x^2 = 6z$; и) $z = 2 + x^2 + y^2$; к) $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 6z$.

2. Переворачиваем зонтик ручкой вверх, укладываем внутреннюю поверхность зеркальными осколками, ставим над этим сооружением кастрюлю с водой и ждем, пока вода закипит. Солнце, конечно, в зените, а поверхность — приближенно параболоид вращения. Вопрос: на какой высоте нужно поставить кастрюлю, если диаметр зонтика 1 м, а глубина — 20 см?

9.4. Квадратичные формы. Приведение их к каноническому виду

Квадратичной формой n переменных $x_1, \ldots, x_n$ называется однородный многочлен второй степени относительно этих переменных:

$$\Phi(x_1,\ldots,x_n)=a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+\cdots+a_{1n}x_1x_n+a_{21}x_2x_1+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{nn}x_n^2, \tag{9.1}$$

или, в матричном виде $\Phi(x_1,\ldots,x_n)=X^{\mathrm{T}}AX$,
где

$$X=\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},\ A=(a_{ij})_{n\times n}.$$

На самом деле, квадратичную форму следует рассматривать как функцию, ставящую в соответствие каждому элементу x евклидова пространства E_n некоторое вещественное число $\Phi(x)$[4] . Тогда Φ в (9.1) есть не что иное, как функция от координат вектора x.

Заметим, что матрица A, называемая *матрицей квадратичной формы* Φ, всегда симметрична, поскольку мы всегда можем потребовать, чтобы $a_{ij}=a_{ji}$, так как это коэффициенты при равных произведениях x_ix_j и x_jx_i.

Но поскольку в записи (9.1) используются координаты вектора, эта запись зависит от выбранного базиса, и, следовательно, от базиса зависит также и матрица квадратичной формы. Пусть $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}'$ — два базиса E_n, A — матрица квадратичной формы Φ в базисе $\mathcal{E}$, а A' — в базисе $\mathcal{E}'$. Тогда

$$A'=T^{\mathrm{T}}_{\mathcal{E}'\to\mathcal{E}}AT_{\mathcal{E}'\to\mathcal{E}}. \tag{9.2}$$

Две квадратичные формы называются *эквивалентными*, если одна из них переводится в другую посредством невырожденного линейного преобразования координат. Поскольку при невырожденном линейном преобразовании базис переходит в базис, матрицы двух эквивалентных квадратичных форм будут связаны соотношением вида (9.2).

Каноническим видом квадратичной формы называется эквивалентная ей квадратичная форма, содержащая только квадраты переменных:

$$\Phi'(x_1,\ldots,x_n)=\lambda_1x_1^2+\cdots+\lambda_nx_n^2=X^{\mathrm{T}}BX,\ B=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&\ldots&0\\0&\lambda_2&\ldots&0\\\vdots&\cdots&\ddots&\vdots\\0&0&\ldots&\lambda_n\end{pmatrix}.$$

Таким образом, матрица квадратичной формы в каноническом виде диагональна. Базис, в котором квадратичная форма принимает канонический вид, называется *каноническим*.

[4]С этой точкм зрения квадратичная форма определяется через билинейную форму A: $\Phi(x)=A(x,x)$ (см., например, [2]).

Пусть A — матрица квадратичной формы в "старом" **ортонормированном** базисе $\mathcal{E}$. Нам необходимо подобрать такую смену базиса, чтобы в новом (тоже обязательно ортонормированном) базисе $\mathcal{E}'$ матрица квадратичной формы стала диагональной, т. е. надо подобрать такую невырожденную матрицу $S = T_{\mathcal{E}' \to \mathcal{E}}$, чтобы

$$S^{\mathrm{T}} A S = D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}. \tag{9.3}$$

Рассмотрим в пространстве E_n линейный оператор $\boldsymbol{\varphi}$ такой, что $[\boldsymbol{\varphi}]_{\mathcal{E}} = A$. Поскольку матрица A симметрична (как матрица квадратичной формы), оператор $\boldsymbol{\varphi}$ является самосопряженным. Следовательно, для этого оператора существует ортонормированный базис из собственных векторов $\boldsymbol{\varphi}$, который мы обозначим $\mathcal{E}'$. Как нам известно, в базисе из собственных векторов матрица линейного оператора принимает диагональный вид, причем по диагонали стоят собственные значения оператора, т. е. для $S = T_{\mathcal{E}' \to \mathcal{E}}$

$$S^{-1} A S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

(Заметим, что в качестве S мы взяли матрицу обратного перехода от $\mathcal{E}'$ к $\mathcal{E}$, поэтому формула преобразования матрицы выглядит таким образом[5].) Эта формула очень похожа на ту, которую мы хотели бы получить. Единственная разница в том, что в нашей формуле стоит S^{-1}, а в (9.3) — S^{T}. Но заметим, что S — матрица перехода от ортонормированного базиса к ортонормированному, и, следовательно (см. пример 4 на стр. 138), является ортогональной. Поскольку для ортогональной матрицы $S^{\mathrm{T}} = S^{-1}$, мы получили то, что хотели.

Таким образом, для приведения квадратичной формы к каноническому виду и нахождения канонического базиса имеем следующий алгоритм.

1. Записать матрицу A данной квадратичной формы Φ.

2. Найти собственные числа соответствующего самосопряженного оператора $\boldsymbol{\varphi}$, т. е. решить характеристическое уравнение $|A - \lambda E| = 0$. Пусть

[5] Сравните с формулой (7.2).

$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — собственные числа. Тогда канонический вид квадратичной формы Φ будет следующий:

$$\Phi(x'_1, \ldots, x'_n) = \lambda_1 (x'_1)^2 + \cdots + \lambda_n (x'_n)^2.$$

3. Найти собственные векторы оператора $\boldsymbol{\varphi}$. Пусть это векторы $a_1, \ldots,$ a_n. Если все корни характеристического уравнения простые, то эти векторы образуют ортогональный базис в силу свойств самосопряженного оператора. Если есть кратные корни, то для собственных векторов, соответствующих одному собственному значению, потребуется провести процесс ортогонализации.

4. Из полученного ортогонального базиса сделать ортонормированный: $e_i \doteq \dfrac{a_i}{\|a_i\|}$. Это и будет искомый канонический базис.

Пример 4. Найти канонический вид и канонический базис для квадратичной формы

$$\Phi(x, y) = 5x^2 + 4xy + 8y^2.$$

Решение

$$\Phi(x, y) = 5x^2 + 2xy + 2yx + 8y^2,\ A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$$

— матрица квадратичной формы Φ.

Найдем ее собственные числа.

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 8-\lambda \end{vmatrix} = 0;\ \lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = 9.$$

Канонический вид $\Phi(x', y') = 4x'^2 + 9y'^2$.

Найдем теперь канонический базис, в котором Φ принимает канонический вид. Для этого ищем собственные векторы:

$$\lambda_1 = 4 : \left\{ \begin{array}{rcl} (5-4)x + 2y & = & 0, \\ 2x + (8-4)y & = & 0; \end{array} \right. \quad x = -2y;$$

$$\overline{a}_1 = (2, -1) \text{ — собственный вектор для } \lambda_1;$$

$$\lambda_2 = 9 : \left\{ \begin{array}{rcl} (5-9)x + 2y & = & 0, \\ 2x + (8-9)y & = & 0; \end{array} \right. \quad 2x = y;$$

$$\overline{a}_2 = (1, 2) \text{ — собственный вектор для } \lambda_2.$$

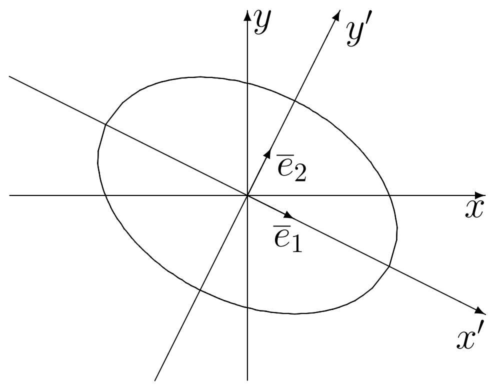
Нормируем собственные векторы, чтобы получить ортонормированный базис

$$\overline{e}_1 = \frac{\overline{a_1}}{|\overline{a_1}|} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right); \overline{e}_2 = \frac{\overline{a_2}}{|\overline{a_2}|} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right).$$

В этом базисе квадратичная форма принимает канонический вид. ■

Пример 5. Построить линию $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 36 = 0$.

Решение. $\Phi(x, y) = 5x^2 + 4xy + 8y^2$ — квадратичная форма. Ее канонический вид (см. пример 4): $\Phi(x', y') = 4x'^2 + 9y'^2$. Ось Ox' имеет направление вектора $\overline{e}_1$; ось Oy' имеет направление вектора $\overline{e}_2$. В системе координат $x'y'$ уравнение кривой принимает канонический вид уравнения эллипса



$$\frac{x'^2}{3^2} + \frac{y'^2}{2^2} = 1. \blacksquare$$

Пример 6. Привести уравнение кривой к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования, указать канонический базис, построить кривую в первоначальной системе координат:

$$6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 29 = 0.$$

Решение

1. Составляем матрицу квадратичной формы: $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$.

2. Составляем характеристический многочлен и находим собственные числа:
$$\lambda^2 - 8\lambda - 9 = 0; \;\; \lambda_1 = 9, \, \lambda_2 = -1.$$

3. Находим собственные векторы:
$$\lambda_1 = 9. \; \left(\begin{array}{cc|c} -9 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right); \; x_2 = 3x_1, \;\; \overline{a}_1 = (1, 3).$$
$$\lambda_2 = -1. \; \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 9 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right); \; x_1 = -3x_2, \;\; \overline{a}_2 = (-3, 1).$$

4. Нормируем собственные векторы для нахождения ортонормированного базиса, в котором квадратичная форма имеет канонический вид
$$\overline{e}_1 = \frac{1}{|\overline{a}_1|}\overline{a}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right), \; \overline{e}_2 = \frac{1}{|\overline{a}_2|}\overline{a}_2 = \left(-\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right).$$

5. Составляем матрицу перехода от базиса $(\overline{e}_1, \overline{e}_2)$ к базису $(\overline{i}, \overline{j})$:

$$Q = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{10}} & -\dfrac{3}{\sqrt{10}} \\ \dfrac{3}{\sqrt{10}} & \dfrac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}.$$

Легко убедиться в том, что матрица Q ортогональна, так как

$$Q \cdot Q^T = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{10}} & -\dfrac{3}{\sqrt{10}} \\ \dfrac{3}{\sqrt{10}} & \dfrac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{10}} & \dfrac{3}{\sqrt{10}} \\ -\dfrac{3}{\sqrt{10}} & \dfrac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Делаем преобразование переменных с помощью матрицы Q:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{10}} & -\dfrac{3}{\sqrt{10}} \\ \dfrac{3}{\sqrt{10}} & \dfrac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},$$

откуда

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{10}} x' - \dfrac{3}{\sqrt{10}} y', \\ y = \dfrac{3}{\sqrt{10}} x' + \dfrac{1}{\sqrt{10}} y'. \end{cases}$$

Это и есть ортогональное преобразование переменных, приводящее квадратичную форму к каноническому виду.

7. Подставляем полученные выражения в исходное уравнение:

$$6\left(\frac{1}{\sqrt{10}}x' - \frac{3}{\sqrt{10}}y'\right)\left(\frac{3}{\sqrt{10}}x' + \frac{1}{\sqrt{10}}y'\right) + 8\left(\frac{3}{\sqrt{10}}x' + \frac{1}{\sqrt{10}}y'\right)^2 -$$

$$-12\left(\frac{1}{\sqrt{10}}x' - \frac{3}{\sqrt{10}}y'\right) - 26\left(\frac{3}{\sqrt{10}}x' + \frac{1}{\sqrt{10}}y'\right) + 29 =$$

$$= 9x'^2 - y'^2 - \frac{90}{\sqrt{10}}x' + \sqrt{10}y' + 29 =$$

$$= 9\left(x'^2 - \sqrt{10}x' + \frac{5}{2} - \frac{5}{2}\right) - \left(y'^2 - \sqrt{10}y' + \frac{5}{2} - \frac{5}{2}\right) + 29 =$$

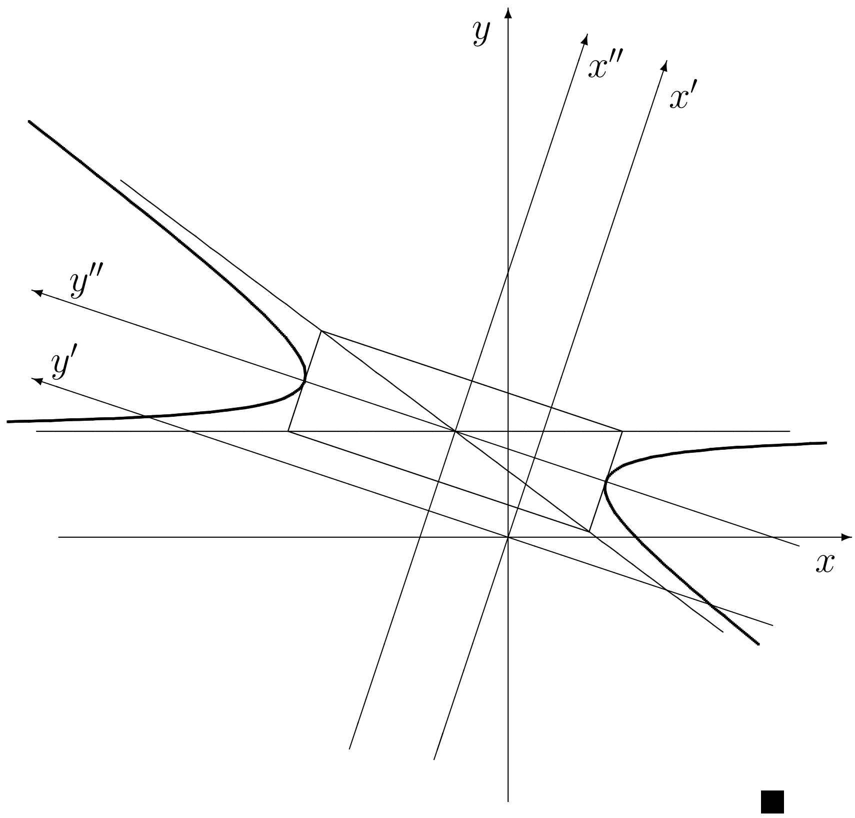
$$= 9\left(x' - \frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 - \left(y' - \frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 + 9 = 0.$$

Приводим к каноническому виду:

$$-\frac{\left(x' - \frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2}{1} + \frac{\left(y' - \frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2}{9} = 1.$$

Получилась гипербола, пересекающая ось Oy'.

8. Строим кривую в первоначальной системе координат. Новые оси Ox' и Oy' определяются векторами $\overline{e}_1$ и $\overline{e}_2$. В этих осях происходит сдвиг на $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ в положительном направлении по оси Ox' и в положительном направлении по оси Oy'. Канонические оси обозначены буквами x'' и y''.



■

9.4. Задачи

1. Найдите канонический вид и канонический базис квадратичной формы:

а) $3x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3$;

б) $3x_1^2 + 8x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 - 8x_1x_3 + 12x_2x_3$;

в) $x_1^2 + 7x_2^2 + x_3^2 + 8x_1x_2 - 16x_1x_3 + 8x_2x_3$.

2. Напишите канонические уравнения кривых второго порядка. Найдите канонические системы координат. Постройте кривые:

а) $9x^2 - 4xy + 6y^2 + 16x - 8y - 2 = 0$;

б) $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$;
в) $5x^2 + 12xy - 22x - 12y - 19 = 0$;
г) $4x^2 + 4xy + y^2 + 6x + 3y - 4 = 0$.

3. Приведите уравнения кривых к каноническому базису и постройте их в первоначальной системе координат:
а) $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0$;
б) $7x^2 + 16xy - 23y^2 - 14x - 16y - 218 = 0$;
в) $x^2 + 2xy + y^2 + 3x + y = 0$;
г) $25x^2 - 14xy + 25y^2 + 64x - 64y - 224 = 0$;
д) $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 40x + 30y = 0$;
е) $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0$.

4. Напишите канонические уравнения поверхностей второго порядка, определите их тип, найдите канонические системы координат:
а) $7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 6x - 24y + 18z + 30 = 0$;
б) $2x^2 - 7y^2 - 4z^2 + 4xy + 20yz - 16xz + 60x - 12y + 12z - 90 = 0$;
в) $2x^2 + 2y^2 - 5z^2 + 2xy - 2x - 4y - 4z + 2 = 0$.

5.* Опишите множество точек D пространства V_3 таких, что объем тетраэдра из задачи **10** на с. 68 равен 5 (без ограничения $D \in Oy$).

Ответы

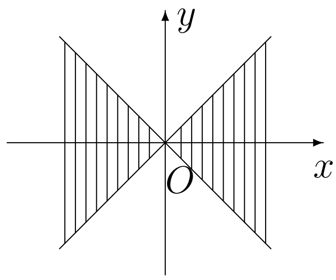
К главе 1

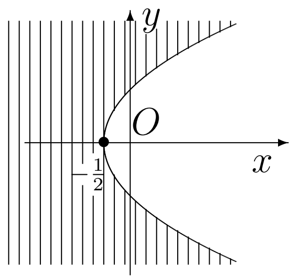
1.1

1. а) $A = \{1, 2, 3, 4\}$; б) $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$; в) $A \cup B = \{-2, \dots, 4\}$; г) $A \cap B = \{1, 2\}$; д) $A \setminus B = \{3, 4\}$; е) $B \setminus A = \{-2, -1, 0\}$.

2. а) $A \cup B = (-1, 4)$; б) $A \cap B = [1, 2]$; в) $A \setminus B = (-1, 1)$; г) $B \setminus A = (2, 4)$.

3.





4. $A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (4, a), (4, b)\}$.

5. $A = \{-3, -2, \dots, 5\}$, $A \cap B = \{-2, 0, 2, 4\}$, $A \cap C = \{-3, -1, 1, 3, 5\}$, $B \cup C = \mathbb{Z}, B \cap C = \emptyset$.

7. а) $\emptyset, \{1\}, \{\{3\}\}, \{\{1, 2\}\}, \{\{1, 2\}, \{3\}\}, \{\{1, 2\}, 1\}, \{\{3\}, 1\}, \{\{1, 2\}, \{3\}, 1\}$;
б) $\emptyset, \{\{1\}\}, \{\{2\}\}, \{1\}, \{2\}, \{\{1\}, \{2\}\}, \{\{1\}, 1\}, \{\{1\}, 2\}, \{1, 2\}, \{\{1\}, \{2\}, 1, 2\}$.

1.2

1. а) i; б) $-2 + \dfrac{3}{2}i$; в) $5 + i$; г) 85; д) $-21 - 220i$.

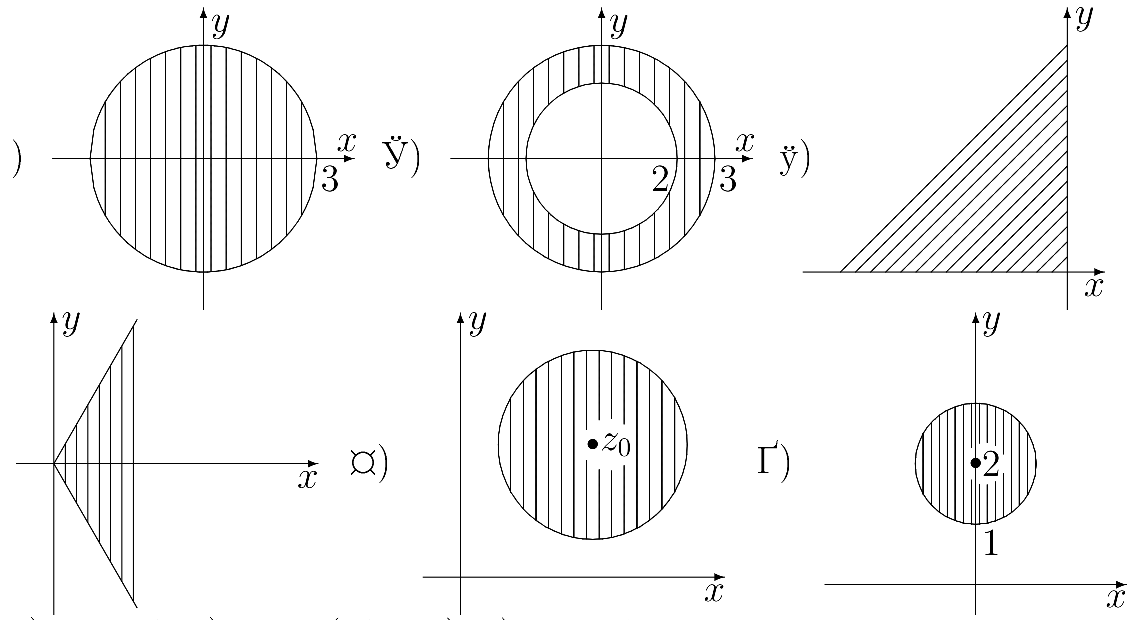
2. а) $-2 = 2e^{\pi i}$; б) $3i = 3e^{\frac{\pi}{2}i}$; в) $4 = 4e^{0i}$; г) $1 - i\sqrt{3} = 2e^{-\frac{\pi}{3}i}$;
д) $\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2} = e^{\frac{5}{6}\pi i}$; е) $-i = e^{-\frac{\pi}{2}i}$.

3. а) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$; б) $2\sqrt{3} + 2i$; в) $-\dfrac{1}{2}i - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

4. а) $-8192\sqrt{2} + 8192\sqrt{2}i$; б) 2^{60}; в) -1024; г) $2^8(-1 + 3i\sqrt{3})$.

5. а)$(2 + \sqrt{2})^{16}$; б) $-(8 + 4\sqrt{3})^6$; в) $\left(\sqrt{2 + \sqrt{3}}\right)^{27} \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)$. **6.** а) ± 1; б) $1, -\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$; в) $\pm 1, \pm i$; г) $4i, \pm 2\sqrt{3} - 2i$; д) $\sqrt[4]{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{8} - i\sin\dfrac{\pi}{8}\right)$,
$\sqrt[4]{2}\left(-\cos\dfrac{\pi}{8} + i\sin\dfrac{\pi}{8}\right)$; е) $1 \pm i$, $-1 \pm i$; ж) $\dfrac{\pm\sqrt{3} + 1}{2} + \dfrac{1}{2}i$, $-i$;
з) $\pm\sqrt{3} + i$, $-2i$; и) ± 1, $\pm\dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}$, $\pm\dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2}$.

7.



8. а) $n = 4k$; б) $n = 2(2k+1)$; в) $n = 2k+1$.

9. а) 23, 16; б) 24, -17.

10. а) $0, 1, -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $0, \pm 1, \pm i$.

12. а) нет; б) да; в) да; г) да; д) нет; е) нет; ж) нет.

1.3

1. а) $\{-1 \pm 2i\}$; б) $2+i; -3+i\}$; в) $\{1, -3, -1 \pm 2i\}$;
г) $\{\sqrt{2} - 1 \pm \sqrt{2}i, -\sqrt{2} - 1 \pm \sqrt{2}i\}$; д) $\{\pm 2i, \pm\sqrt{5}i\}$.

2. а) $(x^2+1)(x+1)(x-1) = (x+i)(x-i)(x+1)(x-1)$;
б) $(x^2+2x+2)(x^2+2x+5) = (x+1-i)(x+1+i)(x+1-2i)(x+1+2i)$;
в) $(x^2+x+1)^2(x-1) = \left(x + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \left(x + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 (x-1)$;
г) $(x^2-2x+5)(x^2+8x+20) = (x-1-2i)(x-1+2i)(x+4-2i)(x+4+2i)$;
д) $(x^2 - \sqrt{2}x + 2)(x^2 + \sqrt{2}x + 2) = \left(x - \frac{\sqrt{2}+i\sqrt{6}}{2}\right)\left(x - \frac{\sqrt{2}-i\sqrt{6}}{2}\right) \times$
$\times \left(x + \frac{\sqrt{2}-i\sqrt{6}}{2}\right)\left(x + \frac{\sqrt{2}+i\sqrt{6}}{2}\right)$;
е) $(x^2-3x+3)(x^2+3x+3) = \left(x - \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(x + \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(x - \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \times$
$\times \left(x + \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$;
ж) $(x-1)(x+3)(x^2-4x+13) = (x-1)(x+3)(x-2-3i)(x-2+3i)$;
з) $(x+2)(x+3)(x-5)(x+1-\sqrt{2})(x+1+\sqrt{2})$;
и) $(x-3)^2(x+3)(x-6)(2x^2+4x+17) = (x-3)^2(x+3)(x-6)\times$
$\times \left(x + 1 - \frac{\sqrt{30}}{2}i\right)\left(x + 1 + \frac{\sqrt{30}}{2}i\right)$.

3. а) $x^4 - (2+i)x^3 + (2i-1)x^2 + (2+i)x - 2i$;

б) $x^4-(6-i)x^3+(14-3i)x^2-(16-3i)x+7-i$.

4. а) $x^6-4x^5+3x^4+8x^3-9x^2-4x+5$;

б) $x^6-4x^5+7x^4-8x^3+11x^2-4x+5$.

5. а) $-\dfrac{1}{16}\left(\dfrac{1+i}{z-1-i}+\dfrac{1-i}{z-1+i}+\dfrac{-1+i}{z+1-i}+\dfrac{-1-i}{z+1+i}\right)$;

б) $\dfrac{1}{x+i}+\dfrac{1}{x-i}+\dfrac{1}{x+2i}+\dfrac{1}{x-2i}$.

6. а) $\dfrac{1}{8}\left(\dfrac{x+2}{x^2+2x+2}-\dfrac{x-2}{x^2-2x+2}\right)$; б) $-\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{x+1}{x^2+1}$

7. а) $P[x]=(x+3)(2x^4-6x^3+13x^2-39x+109)-327,\ P[x_0]=-327$;

б) $P[x]=(x+2)(x^3-5x^2+2)+1,\ P[x_0]=1$;

в) $P[x]=(x-1)(x^4+2x+6)+4,\ P[x_0]=4$;

г) $P[x]=(x-2)(x^5-3x^4-6x^3-11x^2-22x-42)-92,\ P[x_0[=-92$.

8. а) 3; б) 2; в) 3; г) 5.

К главе 2

2.1

2. а) 18; б) $(a-b)^2$; в) 64; г) 70; д) 45; е) $abcd$; ж) $b^4+c^4+d^4-2b^2c^2-$ $-2b^2d^2-2c^2d^2$; з) 65; и) 301. **3.** а) 1; б) $(-1)^{n+1}n$. **4.** а) $0,1,2$; б) $\pm1,\pm2$.

2.2

1. а) $(2,1)$; б) $(3,1,-1)$; в)$(1,3,5)$; г) $(1,2,-3)$; д) метод Крамера неприменим к данной системе; е) $(2,-3,-\frac{3}{2},\frac{1}{2})$; ж) $(1,1,1)$; з) $(1,1,-1,-1)$. **2.** а) x^2+3x+4; б) x^2-2x+5. **3.** а) $\lambda\neq0,\ \lambda\neq\pm\sqrt{2}$; б) $\lambda\neq0,\ \lambda\neq2$.

2.3

1. $(A\cdot C)_{1\times1}$; $(A\cdot D)_{1\times2}$; $(A\cdot E)_{1\times3}$; $(C\cdot A)_{3\times3}$; $(C\cdot B)_{3\times2}$; $(E\cdot C)_{3\times1}$; $(E\cdot D)_{3\times2}$; $(E\cdot E=E^2)_{3\times3}$.

2. а) $\begin{pmatrix}6&-3\\10&-7\end{pmatrix}$; б) (20); в) $\begin{pmatrix}-6&11&1\\-5&-8&2\end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix}-13&32&21\\-17&44&28\\19&-8&-21\end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix}11&85\\43&101\\42&50\\-30&10\end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\-1&0\end{pmatrix}$; ж) $\begin{pmatrix}6&14&-2\\10&-19&17\end{pmatrix}$; з) $\begin{pmatrix}275&792\\210&604\\-6&-12\end{pmatrix}$;

и) $\begin{pmatrix}9&0&0\\0&9&0\\0&0&9\end{pmatrix}$; к) $\begin{pmatrix}1&4&0\\0&1&0\\1&4&0\end{pmatrix}$.

4. $AB=BA$. **8.** а) 2; б) 2; в) 4; г) 2; д) 3; е) 3. **9.** а) 2; б) 3.

2.4

1. а) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$; в) $\frac{1}{38}\begin{pmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -6 & 17 & -13 \\ 6 & 2 & -6 \end{pmatrix}$;

г) $\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; д) $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -4 & 8 & -4 \\ 1 & -9 & 6 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

2. а) $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

3. а) $(-25, -19, -6)$; б) $(2, -3)$; в) $(1, -1, 2)$; г) $(1, -1, -1, 1)$.

7. $\begin{pmatrix} 3197 & -1266 \\ 7385 & -992 \end{pmatrix}$.

К главе 3

3.1

1. а) $\overline{c} = \overline{a} - \overline{b}$; б) $\overline{c} = -\overline{a} - \overline{b}$; в) $\overline{c} = \overline{b} - \overline{a}$.

2. а) $\overline{a} \perp \overline{b}$; б) $(\widehat{\overline{a}, \overline{b}}) < 90^\circ$; в) $(\widehat{\overline{a}, \overline{b}}) > 90^\circ$.

3. $\frac{1}{2}(\overline{a} + \overline{b})$, $\frac{1}{2}(\overline{a} - \overline{b})$, $\frac{1}{2}(-\overline{a} + \overline{b})$, $\frac{1}{2}(-\overline{a} - \overline{b})$. **4.** $|\overline{c}| = 6\sqrt{3}$.

6. а) $\overline{OA} = 2\overline{m}$, $\overline{OB} = 6\overline{n}$, $\overline{AB} = 6\overline{n} - 2\overline{m}$, $\overline{BA} = -6\overline{n} + 2\overline{m}$, $\overline{OM} = \overline{m} + 3\overline{n}$; б) $\overline{OA} = 6\overline{m}$, $\overline{OB} = 4\overline{n}$, $\overline{AB} = 4\overline{n} - 6\overline{m}$, $\overline{OM} = 3\overline{m} + 2\overline{n}$.

7. а) $\overline{u} = 2\overline{m} + \overline{n} + 3\overline{p}$; б) $\overline{u} = 3\overline{m} + \overline{n} - 2\overline{p}$.

3.2

1. $\lambda \neq 1$. **2.** а) $\lambda = 15$; б) λ — любое. **3.** $\{\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3\}$, $\{\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_4\}$, $\{\overline{a}_1, \overline{a}_3, \overline{a}_4\}$.

4. а) $(1, 1, 1)$; б) $(1, 2, 3)$; в) $(1, 1, 1)$; г) $(-27, 9, 4)$.

8. Когда все ненулевые векторы системы линейно независимы.

3.3

1. $\overline{n}_0 = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. **3.** $\overline{b} = (-48, 45, -36)$.

4. $|\overline{AB}| = 7$. **5.** $\overline{CD} = 11\overline{AB} - 8\overline{AC}$. **6.** $\overline{OM} = (2, 2, 2)$.

7. $B(6, -4, 5)$, $C(9, -6, 10)$, $\overline{CA} = (-7, 1, -7)$. **8.** $\overline{c} = 2\overline{p} - 3\overline{q} + \overline{r}$.

9. $\overline{OA} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 0, 0\right)$, $\overline{OB} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{6}, -\frac{1}{2}, 0\right)$, $\overline{OC} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{1}{2}, 0\right)$, $\overline{OS} = \left(0, 0, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.

10. $\sqrt{10}$. **11.** $M_1(6, 3)$, $M_2(7, 5)$.

К главе 4

4.1

1. $\overline{ab}_0 = \text{пр}_{\overline{b}}\overline{a}$, где $|\overline{b}_0| = 1$. **2.** Верные равенства б), в).
3. $\cos(\widehat{\overline{a},\overline{n}}) = -\dfrac{2}{\sqrt{7}}$, $\cos(\widehat{\overline{a},\overline{m}}) = -\dfrac{5}{2\sqrt{7}}$. **4.** $\alpha = -6$. **5.** $\cos\varphi = \dfrac{5}{6}$.
6. $\sqrt{3}$. **7.** 31. **8.** $(2, -3, 0)$. **9.** $\overline{p} = \pm\left(\dfrac{15}{\sqrt{17}}, \dfrac{25}{\sqrt{17}}\right)$. **10.** $\dfrac{\pi}{3}$. **11.** $-\dfrac{3}{2}$.
13. $|\overline{a}| = |\overline{b}|$. **14.** -6. **15.** а) $\sqrt{\dfrac{3}{7}}$, б) $\dfrac{5}{\sqrt{7}\sqrt{19}}$. **16.** а) $\dfrac{\pi}{3}$, б) 0 или π.

4.2

2. $\overline{a} \not\parallel \overline{b}$. **4.** YOZ, XOZ, XOY. **5.** $h = 5$.
6. 28; $\cos\alpha = -\dfrac{3}{7}$, $\cos\beta = -\dfrac{6}{7}$, $\cos\gamma = \dfrac{2}{7}$. **7.** $(7, 5, 1)$. **8.** а) 3,8; б) $\dfrac{19}{2}$.
9. $(-6, -24, 8)$. **10.** $-2\overline{i} + 3\overline{j}$. **12.** 16. **13.** $S = 50\sqrt{2}$. **14.** $6\overline{i} - 4\overline{j} + 6\overline{k}$.
16. а) $3\overline{a} \times \overline{b}$; б) $\overline{a} \times \overline{b} + \overline{a} \times \overline{c} + 5\overline{c} \times \overline{b}$. **17.** $4\sqrt{2}$.

4.3

3. 27. **6.** а) $V = 14$, $S = 6\sqrt{3}$, $H = \dfrac{7}{3}\sqrt{3}$; б) $V = 3$, $S = \dfrac{\sqrt{43}}{2}$, $H = \dfrac{18}{43}\sqrt{43}$. **7.** $\overline{c} = 5\overline{a} + \overline{b}$. **8.** $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. **10.** $D_1(0, -7, 0)$, $D_2(0, 8, 0)$.

К главе 5

5.1

1. $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$, $k = 7$. **2.** а) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$; б) $x - 2y + 5 = 0$; $2x + y = 0$.
3. а) 1) $3x - 2y - 7 = 0$, 2) $2x + 3y + 4 = 0$, 3) $h = \sqrt{13}$,
4) $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{17}}$, 5) $5x + y - 3 = 0$;
б) 1) $7x - y + 16 = 0$, 2) $x + 7y - 42 = 0$, 3) $h = 6\sqrt{2}$,
4) $\cos\varphi = \dfrac{3\sqrt{10}}{10}$, 5) $2x - y + 1 = 0$.
4. $m = \dfrac{7}{12}$. **5.** $k = \pm 2$. **6.** $x = -1$. **7.** $x + y - 4,8 = 0$; $x - y = 0$.
8. $2x + 3y - 13 = 0$. **10.** $\dfrac{7}{2}$. **11.** $2x + y + 4 = 0$, $2x - y + 4 = 0$, $2x + y - 4 = 0$.
12. $3x - 2y - 12 = 0$, $3x - 8y + 24 = 0$. **13.** $2x + y + 5 = 0$ или $y - 3 = 0$.
14. $y = 3x$, $y = -\dfrac{1}{3}x$. **15.** $C(4, 5)$. **16.** $h_1 = h_2 = \dfrac{6}{\sqrt{5}}$. **17.** $A(2, 1)$.
18. 49 кв. ед. **19.** а) $M_1(3, 2)$ (середина AB), $M_2(-\dfrac{13}{2}, \dfrac{7}{2})$ (середи-

на BC), $M_3(-\frac{5}{2},-\frac{5}{2})$ (середина AC), $M(-2,1)$; б) $M_1(-1,4)$ (середина AB), $M_2(1,2)$ (середина BC), $M_3(-2,0)$ (середина AC), $M(-\frac{2}{3},2)$. **20.** а) $5x+y-3=0$, б) $5x+y-12=0$. **21.** а) $D(6,-3)$, б) $D(8,-4)$. **22.** а) $C(2,-5)$, б) $C(17,9)$.

5.2

1. а) $2x+3y+4z-3=0$, б) $5x+11y+7z-22=0$. **2.** а) $10x-6y-z-2=0$, б) $x+6y+8z-19=0$. **3.** а) $3x-y=0$, $x+3y=0$, б) $x+y=0$, $x-y=0$. **4.** а) $\sqrt{6}$, б) $\dfrac{45}{\sqrt{347}}$. **5.** а) $2\sqrt{2}$, б) 1. **6.** 1) $2x-z=0$; 2) $z+y-1=0$; 3) $x-y=0$;
4) $x-1=0$. **7.** $4x-y-2z-4=0$. **8.** $\dfrac{x}{-3}=\dfrac{y-5/3}{4}=\dfrac{z-7/3}{5}$.

9. $\dfrac{x-a}{0}=\dfrac{y-b}{b}=\dfrac{z-c}{c}$. **10.** $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$. **12.** а) $x+2y+3z-11=0$; б) $x-2y+z+5=0$. **13.** $8x-5y+z-11=0$. **14.** $x+2y-2z-1=0$. **15.** $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$, $\sin\varphi=\dfrac{1}{\sqrt{11}}$. **16.** (5,5,5). **17.** (3,3,3).

18. $A(0,2,-3)$, $B(3,0,-2)$, $C(9,-4,0)$. **19.** $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-3}{-4}=\dfrac{z+5}{-5}$.

21. а) $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z}{1}$; б) $\dfrac{x-11}{-2}=\dfrac{y-20}{0}=\dfrac{z-19}{1}$. **25.** а) 1) $\alpha\neq 7$, 2) $\alpha=7$, $\beta=3$, 3) $\alpha=7$, $\beta\neq 3$, б) 1) $\alpha\neq 1$, 2) $\alpha=1$, $\beta=-9$, 3) $\alpha=1$, $\beta\neq -9$. **26.** а) $S_{xOy}=12$, $S_{yOz}=4$, $S_{xOz}=6$, $V=8$, $h=\dfrac{12}{7}$, $S_{\text{осн}}=14$, б) $S_{xOy}=240$, $S_{yOz}=400$, $S_{xOz}=48$, $V=3200$, $h=\dfrac{120}{\sqrt{70}}$, $S_{\text{осн}}=80\sqrt{70}$. **27.** а) $\overline{r}=(5,0,1)+t_1(-2,0,-1)+t_2(0,-3,2)$, б) $\overline{r}=(0,3,2)+t_1(3,-2,3)+t_2(-1,0,3)$. **28.** а) $\overline{r}=(3,-1,2)+t_1(-3,2,1)+t_2(-1,1,0)$, б) $\overline{r}=(0,1,-3)+t_1(3,-1,4)+t_2(1,0,2)$. **29.** а) $\overline{r}=(1,-2,1)+t_1(3,1,2)+t_2(-2,0,1)$, б) $\overline{r}=(2,3,0)+t_1(1,-2,3)+t_2(3,0,-1)$. **30.** а) $\overline{r}=(2,-1,2)+t_1(3,2,0)+t_2(-1,3,2)$, б) $\overline{r}=(-3,1,-1)+t_1(2,3,-1)+t_2(-2,1,3)$.

К главе 6

6.1

1. а) $(3,1,1)$; б) $(1,2,-2)$; в) $(2,-2,3)$; г) (3,4,5).

2. а), в), д) – система несовместна; б) $\begin{cases} x = 10z+1, \\ y = 7z; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x_1 = x_3, \\ x_2 = -1/3-2x_3. \end{cases}$

3. Система имеет единственное решение, если $\lambda \neq 1$ или $\lambda \neq -2$. Система имеет бесконечное множество решений, если $\lambda = 1$. Система несовместна, если $\lambda = -2$.

4. а) $(1, 2, -2)$; б) система несовместна; в) $\begin{cases} x_1 = -5x_2 + 3x_3 - 10, \\ x_4 = 7x_2 - 4x_3 + 14; \end{cases}$

г) (3,2,1); д) система несовместна; е) $\begin{cases} x_2 = -2 + 2x_1 - 5/8x_4, \\ x_3 = 1 + 17/8x_4; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} x_1 = -9x_2 - 4x_3 + 8, \\ x_4 = 11x_2 + 5x_3 - 10; \end{cases}$ з) $\begin{cases} x_1 = 3/2x_2 - 1/16x_4 + 1/2, \\ x_3 = -11/8x_4; \end{cases}$

и) система несовместна; к) $(1, -1, 2, 0)$.

6.2

1. а) $c\begin{pmatrix}3 & 1 & 5\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$; б) $c_1\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}} + c_2\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$; в) $x_1 = x_2 = x_3 = 0$; г) $c\begin{pmatrix}7 & -2 & -5\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$; д) $c_1\begin{pmatrix}8 & -6 & 1 & 0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}} + c_2\begin{pmatrix}-7 & 5 & 0 & 1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$;
е) $c_1\begin{pmatrix}2 & 0 & -5 & 7\end{pmatrix}^{\mathrm{T}} + c_2\begin{pmatrix}0 & 1 & 5 & -7\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$;
ж) $c_1\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}} + c_2\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}} + c_3\begin{pmatrix}0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$.

2. а) $X = \begin{pmatrix}-3/2 \\ -7/2 \\ 0 \\ 0\end{pmatrix} + \alpha_1\begin{pmatrix}-5/2 \\ -7/2 \\ 1 \\ 0\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}-13/2 \\ -19/2 \\ 0 \\ 1\end{pmatrix}$;

б) $X = \begin{pmatrix}31/6 \\ 2/3 \\ -7/6 \\ 0\end{pmatrix} + \alpha_1\begin{pmatrix}1/2 \\ 2/3 \\ -1/2 \\ 1\end{pmatrix}$; в) $X = \begin{pmatrix}0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1\end{pmatrix} + \alpha_1\begin{pmatrix}1 \\ 0 \\ -8 \\ 0 \\ 2\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}0 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \\ -1\end{pmatrix}$.

3. При $\lambda = 0$ система несовместна.

При $\lambda \neq 0$ $X = \begin{pmatrix}\dfrac{4-\lambda}{5\lambda} \\ \dfrac{9\lambda - 16}{5\lambda} \\ 0 \\ \frac{1}{\lambda}\end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix}-\dfrac{3}{5} \\ -\dfrac{8}{5} \\ 1 \\ 0\end{pmatrix}$.

К главе 7

7.1

1. а) да; б) да; в) при $n \geqslant 1$ — нет, иначе да; г) да; д) нет; е) да; ж) да; з) 1) да; 2) нет; 3) нет; 4) нет.

2. а) нет; б) да; в) нет. **6.** а) $r = 2$, базис x_1 и x_2; б) $r = 2$, базис x_1 и x_2.

8. а) да; б) да; в) нет. **9.** $(0, -2, 0, 1, 0, \ldots, 0)$. **10.** (0,2,1,2).

12. $x^2-2, 1, x-1$. **13.** а) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

7.2

1. а), б) если $a \neq 0$, то нет, иначе да; в) да; г) да; д) нет; е) нет; ж) нет; з) да.

2. а) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$;

ж) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; з) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

3. а) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; б) $\begin{cases} x' & = & 2x, \\ y' & = & \frac{1}{2}y; \end{cases}$ в) $\dfrac{(x')^2}{4} + \dfrac{(y')^2}{1/4} = 1$.

4. В матрице меняются местами i- и j-я строчки и i- и j-й столбцы.

5. а) $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; б) $A' = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & -8 & -7 \\ 1 & 4 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$.

6. а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -18 & 10 & -39 \\ -5 & 3 & -10 \\ 9 & -5 & 20 \end{pmatrix}$.

10. а) $r_\varphi = 3$; $d_\varphi = 0$; $\mathrm{Im}\varphi = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$;

б) $r_\varphi = 2$; $d_\varphi = 1$; $\mathrm{Ker}\varphi = \left\{ e = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, $\mathrm{Im}\varphi = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

7.3

1. а) $\lambda_1 = 7$, $e_1 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha \neq 0$, $\lambda_2 = -1$, $e_2 = \alpha \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\alpha \neq 0$;

б) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $e = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha \neq 0$;

в) собственных чисел и векторов нет;

г) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$, $e = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\alpha \neq 0$;

д) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$, $e = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$;

е) $\lambda_1 = 1$, $e_1 = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, $e_2 = C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $C_1 \neq 0$, $C_2 \neq 0$;

ж) $\lambda_1 = 1$, $e_1 = C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$, $e_2 = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$,
$C \neq 0$, $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$;

з) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $e_1 = \alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$, $\lambda_3 = -1$,
$e_2 = \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\alpha \neq 0$; и) $\lambda = 1$, $e = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha \neq 0$.

2. а) $\lambda = a$, e — любой ненулевой вектор;
б) $\lambda_1 = 1$, $e_1 = x\bar{i}$; $\lambda_2 = 0$, $e_2 = y\bar{j} + z\bar{k}$; в) $\lambda = 0$, $e = x\bar{i}$.

3. $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

4. а) поворот на 45° вокруг оси Oz и растяжение в $\sqrt{2}$ раз по всем осям; б) поворот вокруг прямой $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{1}$ на 120°; в) проектирование на прямую $\dfrac{x}{0} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{1}$; г) проектирование на плоскость $y = z$; д) поворот вокруг прямой $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{0}$ на 180°; е) симметрия относительно плоскости $y = x$; ж) поворот вокруг оси Oz на 90°, проектирование на плоскость zOy; з) проектирование на прямую $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{1}$; и) поворот на 30° по часовой стрелке вокруг оси Oy.

7.4

2. а) $\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \boxed{0} \end{array}\right)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 2, 1)$, $(1, 2, 0)$;

б) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $(1,0,0)$, $(0,-2,-1)$, $(3,1,1)$;

в) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $(1,0,0,0)$, $(0,-2,0,-1)$, $(3,1,3,1)$, $(3,1,0,1)$;

г) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $(0,0,1,0)$, $(1,-7,4,2)$, $(0,-1,0,0)$, $(1,3,0,0)$;

д) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $(1,0,0,0)$, $(-1,-1,-1,-1)$, $(0,0,1,0)$, $(-1,-1,0,0)$.

5. а) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;

ж) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

6. а) $\begin{pmatrix} 4e-3 & 2-2e \\ 6e-6 & 4-3e \end{pmatrix}$; б) $2^{50}\begin{pmatrix} -24 & 25 \\ -25 & 26 \end{pmatrix}$; в) $\pm\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 3e-1 & e & -3e+1 \\ 3e & e+3 & -3e-3 \\ 3e-1 & e+1 & -3e \end{pmatrix}$.

К главе 8

8.1

1. а) да; б) нет; в) да; г) нет. **2.** а) нет; б) нет; в) да; г) нет.
3. а) да; б) нет; в) нет; г) да; д) нет. **4.** а) да; б) да.
5. $||\overline{a}|| = \sqrt{27}$; $||\bar{b}|| = \sqrt{283}$; $\cos\varphi = \dfrac{24}{\sqrt{7641}}$.

6. $\cos\varphi = -\dfrac{4}{\sqrt{406}}$. **7.** $\dfrac{2}{3}$; $\cos\varphi = \sqrt{\dfrac{5}{21}}$.

8. а) $|x_1y_1 + \dots + x_ny_n| \le \sqrt{(x_1^2 + \dots + x_n^2)\,(y_1^2 + \dots + y_n^2)}$;
б) $\left(\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right)^2 \le \left(\int_a^b f^2(t)\,dt\right)\left(\int_a^b g^2(t)\,dt\right)$.

9. $||f(t)|| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $||g(t)|| = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$; $\varphi = \pi - \arccos\dfrac{\sqrt{6}}{\pi}$. **10.** $(a, b) = 4$.

8.2

6. а) $e_1' = (1, -2, 2)$, $e_2' = (-2/3, -2/3, -1/3)$, $e_3' = (6, -3, -6)$;
б) $e_1' = (1, 1, 1)$, $e_2' = (4/3, 4/3, -8/3)$, $e_3' = (-1, 1, 0)$.
7. а) $e_3 = (1, 1, 1, 0)$, $e_4 = (-1, 1, 0, 1)$; б) $e_3 = (2, 3, 1, 0)$, $e_4 = (1, -1, 1, -1)$.
9. $\left(1, 2\sqrt{3}(t - 1/2), 6\sqrt{55}(t^2 - t + 1/6)\right)$.

8.3

1. Поворот на угол α вокруг начала координат по часовой стрелке.
2. а) $f_1 = (1/\sqrt{2}, 1\sqrt{2}, 0)$, $f_2 = (1/\sqrt{18}, -1/\sqrt{18}, -4\sqrt{18})$,

$f_3 = (2/3, -2/3, 1/3)$, $A_1' = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix}$;

б) $f_1 = (1/\sqrt{2}, 0, -1\sqrt{2})$, $f_2 = (1/\sqrt{2}, 0, 1\sqrt{2})$,

$f_3 = (0, 1, 0)$, $A_2' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;

в) $f_1 = (1/\sqrt{2}, 0, -1\sqrt{2})$, $f_2 = (-1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}, -1\sqrt{6})$,

$f_3 = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$, $A_3' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

3. а) $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 4$, $e_1 = (1, -1, 0)$, $e_2 = (1, 0, -1)$,

$e_3 = (1, 1, 0)$, $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$;

б) $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -3$, $\lambda_3 = 3$, $e_1 = (-15, 8, 9)$, $e_2 = (1, 0, -1)$,

$e_3 = (5, 0, 1)$, $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$;

в) матрица не может быть диагональной.

4. а) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $A^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$;

б) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $A^* = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 0 \\ 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 4/3 & 0 \end{pmatrix}$.

10. A, C, $A + C$.

К главе 9

9.1

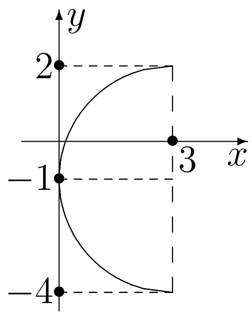
1. $(x-4)^2 + (y+3)^2 = 17$. **2.** $C(-1, 5)$; $r = 5$. **3.** а) $\varepsilon = 4/5$; б) 7, 3.

4. а) $4x^2 + 9y^2 - 24x - 36y + 36 = 0$; б) $y = 2 + \dfrac{2}{3}\sqrt{6x - x^2}$;

в) $y = 2 - \dfrac{2}{3}\sqrt{6x - x^2}$; г) $x = 3 + \dfrac{3}{2}\sqrt{4y - y^2}$; д) $x = 3 - \dfrac{3}{2}\sqrt{4y - y^2}$.

5. а) $\dfrac{(x')^2}{9} + \dfrac{(y')^2}{5} = 1$; $C(3, -1)$; $\varepsilon = \dfrac{2}{3}$;

б) $\dfrac{(x')^2}{25} + \dfrac{(y')^2}{16} = 1$; $C(-1, 2)$; $\varepsilon = \dfrac{3}{5}$.



6.

7. $\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y^2}{2} = 1$. **8.** а) $\dfrac{x^2}{169} + \dfrac{y^2}{144} = 1$; б) $\dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{64} = 1$; в) $\dfrac{x^2}{5} + \dfrac{y^2}{1} = 1$;

г) $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{12} = 1$; д) $\dfrac{x^2}{64} + \dfrac{y^2}{48} = 1$. **9.** $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$ или $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$. **10.** $S = 12$. **11.** $d = 8$. **12.** а) $\varepsilon = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$; б) $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$. **13.** $\dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{64} = 1$ или $\dfrac{x^2}{64} + \dfrac{y^2}{100} = 1$.

14. $5x^2 + 9y^2 + 4x - 18y - 55 = 0$.

9.2

1. $F_1(-\sqrt{73},0)$; $F_2(\sqrt{73},0)$; $y=\pm\frac{3}{8}x$; $\varepsilon=\frac{\sqrt{73}}{8}$. **2.** $\frac{x^2}{15}-\frac{y^2}{10}=1$. **3.** $\frac{(x-3)^2}{4}-\frac{(y-2)^2}{1}=-1$; $y=2\pm\frac{1}{2}\sqrt{x^2-6x+13}$; $x=3\pm2\sqrt{y^2-4y+3}$.
4. $x^2+10x+8y+33=0$ или $(x+5)^2=-8(y+1)$.
5. а) $\frac{(x')^2}{3}-\frac{(y')^2}{75/4}=1$; $C(1,-2)$; б) $(x')^2=\frac{1}{4}y'$; $C(1,3)$.
6. а) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$; б) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$; в) $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$; г) $\frac{x^2}{576}-\frac{y^2}{100}=1$; д) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$. **7.** $S=\frac{8}{5}$. **8.** $r_1=9\sqrt{5}$, $r_2=\sqrt{5}$. **9.** $\frac{x^2}{60}-\frac{y^2}{40}=1$.
10. $\left(\pm5,\pm\frac{9}{4}\right)$. **12.** а) $|m|>4.5$; б) $m=\pm4.5$; в) $|m|<4.5$.
13. а) $x^2+10x+8y+33=0$; б) $y^2-4x-4y+28=0$; в) $x^2-8x-8y+24=0$.
14. $p=2\sqrt{34}$, $F(9,-8)$. **15.** $p=4$, $F(2,3)$, $y=-1$.

9.3

1. а) эллипсоид; б) однополостный гиперболоид; в) двуполостный гиперболоид; г) конус; д) параболоид; е) гиперболический параболоид; ж) эллиптический параболоид; з) параболический цилиндр; и) параболоид с вершиной (0,0,2); к) гиперболический параболоид. **2.** 31.25 см.

9.4

1. а) $6(x_2')^2+3(x_3')^2$; $e_1(-2/3,1/3,-2/3)$, $e_2(-2/3,-2/3,1/3)$, $e_3(1/3,-2/3,-2/3)$;
б) $15(x_2')^2+3(x_3')^2$; $e_1(-2/3,1/3,-2/3)$, $e_2(1/3,-2/3,-2/3)$, $e_3(-2/3,-2/3,1/3)$;
в) $9(x_1')^2+9(x_2')^2-9(x_3')^2$; $e_1(1/\sqrt{5},2/\sqrt{5},0)$, $e_2(-4/\sqrt{45},2/\sqrt{45},5/\sqrt{45})$, $e_3(-2/3,1/3,-2/3)$.
2. а) $\frac{(x')^2}{2}+(y')^2=1$; $O'(-\frac{4}{5},\frac{2}{5})$; $\bar{e}_1=\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$, $\bar{e}_2=\left(\frac{-2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$;
б) $(y')^2=4\sqrt{2}x'$; $O'(2,1)$; $\bar{e}_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\bar{e}_2=\left(\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$;
в) $\frac{(x')^2}{4}-\frac{(y')^2}{9}=1$; $O'(1,1)$; $\bar{e}_1=\left(\frac{3}{\sqrt{13}},\frac{2}{\sqrt{13}}\right)$, $\bar{e}_2=\left(\frac{-2}{\sqrt{13}},\frac{3}{\sqrt{13}}\right)$;
г) $(x')^2=\frac{5}{4}$; $O'(-\frac{3}{5},\frac{3}{10})$; $\bar{e}_1=\left(\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, $\bar{e}_2=\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{-2}{\sqrt{5}}\right)$.
3. а) $\frac{(x')^2}{9}+\frac{(y')^2}{4=1}$; б) $\frac{(x')^2}{25}-\frac{(y')^2}{9}=1$; в) $(x')^2=\frac{\sqrt{2}}{2}y'$; г) $\frac{(x')^2}{16}+\frac{(y')^2}{9}=1$; д) $(x')^2=-2y'$; е) $\frac{(x')^2}{1}-\frac{(y')^2}{4}=1$.

4. а) $\dfrac{(x')^2}{2}+\dfrac{(y')^2}{1}+\dfrac{(z')^2}{2/3}=1$; $O'(1,2,-1)$; эллипсоид;
$\overline{e}_1=(1/3,2/3,2/3)$, $\overline{e}_2=(2/3,1/3,-2/3)$, $\overline{e}_3=(2/3,-2/3,1/3)$;
б) $\dfrac{(x')^2}{2}-\dfrac{(y')^2}{1}=-2z'$; $O'(1,2,3)$; гиперболический параболоид;
$\overline{e}_1=(-2/3,1/3,2/3)$, $\overline{e}_2=(1/3,-2/3,2/3)$, $\overline{e}_3=(2/3,2/3,1/3)$;
в) $\dfrac{(x')^2}{4/5}+\dfrac{(y')^2}{4/15}-\dfrac{(z')^2}{4/25}=-1$; $O'(0,1,-2/5)$; двуполостный гиперболоид;
$\overline{e}_1=(1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2},0)$, $\overline{e}_2=(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2},0)$, $\overline{e}_3=(0,0,1)$.
5. $4y^2+4yz+z^2-4y-2z-224=0$. Это пара параллельных плоскостей с каноническим уравнением $\left(y'-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)^2=45$.

Предметный указатель

Список рекомендуемой литературы

[1] *Ивлева А.М., Пинус А.Г., Чехонадских А.В.* **Основы алгебры и аналитической геометрии.** — Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2003.

[2] *Березин С.А., Ивлева А.М.* **Линейные операторы.** — Новосибирск: Изд-во НГТУ, 1997.

[3] *Пинус А.Г.,Чехонадских А.В.* **Основные понятия общей алгебры.** — Новосибирск: Изд-во НГТУ, 1996.

[4] *Пинус А.Г.* **Векторная алгебра и линейная геометрия объекта.** — Новосибирск: Изд-во НГТУ, 1997.

[5] *Чехонадских А.В.* **Системы линейных уравнений и метод Гаусса.** — Новосибирск: Изд-во НГТУ, 1996.

[6] *Курош А.Г.* **Курс высшей алгебры.** — М.: Наука, 1968.

[7] *Беклемишев Д.В.* **Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.** — М., 1971.

[8] *Мальцев А.И.* **Основы линейной алгебры.** — М., 1956.

[9] *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* **Аналитическая геометрия.** — М.:Наука, 1981.

[10] *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* **Линейная алгебра.** — М.:Наука, 1984.

[11] *Шилов Г.Е.* **Математический анализ. Конечномерные линейные пространства.** — М. 1969.

[12] *Лихолетов И.И., Мацкевич И.П.* **Руководство к решению задач по высшей математике, теории вероятностей и математической статистике.** — Минск, 1969.

[13] *Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я.* **Высшая математика в примерах и задачах.** — М.: Высшая школа, 1980, Ч.1.

[14] *Пономарев К.Н.* **Жорданова форма линейного преобразования** — Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2000.

[15] *Чуркин В.А.* **Жорданова классификация конечномерных линейных операторов** — Новосибирск: Изд-во НГУ, 1991.

Оглавление

Ивлева А.М., Прилуцкая П.И., Черных И.Д.

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие

Редактор *И.Л. Кескевич*
Выпускающий редактор *И.П. Брованова*
Дизайн обложки *А.В. Ладыжская*

Подписано в печать 12.03.2013. Формат 60 × 84 1/16. Бумага офсетная. Тираж 500 экз.
Уч.-изд. л. 10,46. Печ. л. 11,25. Изд. № 175/13. Заказ № 332. Цена договорная

Отпечатано в типографии
Новосибирского государственного технического университета
630073, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20