ЧАСТЬ 2. ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

1. Основные понятия

1. *Функцией - оригиналом* (или просто *оригиналом*) называют любую комплексную функцию $f(t)$ действительной переменной t, удовлетворяющую следующим условиям:
1) при $t<0$ $f(t)\equiv 0$;
2) при $t\geq 0$ функция $f(t)$ на любом конечном промежутке оси t имеет не более конечного числа точек разрыва первого рода;
3) при $t\to\infty$ функция $f(t)$ имеет ограниченную степень роста, т.е. существуют такие положительные постоянные M и s_0, что при всех $t>0$ $|f(t)|\leq Me^{s_0 t}$. Наименьшее значение s_0, для которых имеет место это неравенство, называется *показателем степени роста* функции $f(t)$.

2. Простейшей функцией - оригиналом является *единичная функция* или *функция Хевисайда* (рис.1):

$$\eta(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ 1, & t\geq 0.\end{cases} \tag{1}$$

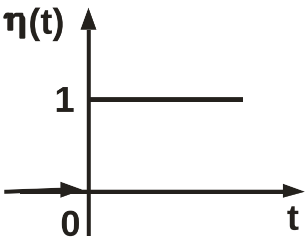

Рис. 1.

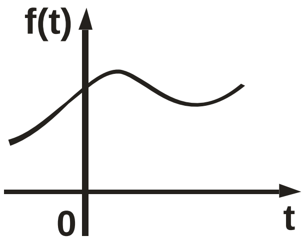

Рис. 2.

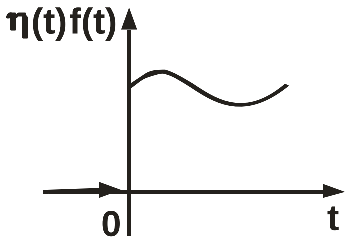

Рис. 3.

Если функция $f(t)$ удовлетворяет условиям 2), 3), но не удовлетворяет условию 1) (рис.2), (т.е. она не является функцией - оригиналом), то для функции $\eta(t)f(t)$ выполнимы все три условия функции - оригинала (рис.3). Поэтому в дальнейшем для простоты записи будем, как правило, опускать множитель $\eta(t)$.

3. *Преобразованием Лапласа* заданной функции - оригинала $f(t)$ называется преобразование, ставящее в соответствие функции $f(t)$ функцию $F(p)$ комплексной переменной $p=s+i\sigma$, определённую интегралом

$$F(p)=\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt. \tag{2}$$

Функция $F(p)$ называется *изображением* функции $f(t)$, а само преобразование Лапласа обозначается $Lf(t)$.Таким образом, $Lf(t)=F(p)$. Соответствие между функциями оригиналом и её изображением записывают символом $f(t)\,\dot{=}\,F(p)$ или $F(p)\,\dot{=}\,f(t)$.

Т е о р е м а 1. **Изображение (2) функции $f(t)$ является аналитической функцией комплексной переменной p в области $Re\,p>s_0$, где s_0 - показатель степени роста функции $f(t)$.**

П р и м е р 1. Найти изображения функций Хевисайда и $f(t)=e^{at}$.

Р е ш е н и е. Из (1) и (2) получаем

$$F(p)=\int_0^\infty \eta(t)e^{-pt}dt=\int_0^\infty e^{-pt}dt=-\left.\frac{e^{-pt}}{p}\right|_0^\infty=\frac{1}{p},$$

причём функция $F(p)$ определена в области $Re\,p>0$. Аналогично, для функции $f(t)=e^{at}$ имеем $F(p)=\int_0^\infty e^{at}e^{-pt}dt=\int_0^\infty e^{-(p-a)t}dt=-\left.\frac{e^{-(p-a)t}}{p-a}\right|_0^\infty=\frac{1}{p-a}$, $Re\,p>Re\,a$.

О т в е т. $\eta(t)\risingdotseq\frac{1}{p}$, $Re\,p>0$; $e^{at}\risingdotseq\frac{1}{p-a}$, $Re\,p>Re\,a$.

2. Свойства изображения

4. Свойства преобразований Лапласа обладают определённой симметрией: каждому свойству, сформулированному для оригиналов, соответствует аналогичное свойство для изображений.

I. <u>Свойство линейности</u>. Если $f_i(t)\risingdotseq F_i(p)$, $Re\,p>Re\,s_i$, $i=1,2,...,n$, **то**

$$\sum_{i=1}^{n}k_i f_i(t)\risingdotseq\sum_{i=1}^{n}k_iF_i(p),\ Re\,p>max\,s_i,$$

где k_i **- заданные постоянные числа,** s_i **- показатели степени роста функций** $f_i(t)$**.**

П р и м е р 2. Найти изображения функций $cos\,\omega t$, $sin\,\omega t$, $ch\lambda t$, $sh\lambda t$.

Р е ш е н и е. Представляя функции $cos\,\omega t$, $sin\,\omega t$, $ch\lambda t$, $sh\lambda t$ через показательные функции, используя результаты примера 1 и свойство линейности, получим:

$$cos\,\omega t=\frac{1}{2}\left(e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}\right)\risingdotseq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-i\omega t}+\frac{1}{p+i\omega t}\right)=\frac{p}{p^2+\omega^2},\ Re\,p>|\,Im\,\omega\,|;$$

$$sin\,\omega t=\frac{1}{2i}\left(e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}\right)\risingdotseq\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-i\omega t}-\frac{1}{p+i\omega t}\right)=\frac{\omega}{p^2+\omega^2},\ Re\,p>|\,Im\,\omega\,|;$$

$$ch\lambda t=\frac{1}{2}\left(e^{\lambda t}+e^{-\lambda t}\right)\risingdotseq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\lambda t}+\frac{1}{p+\lambda t}\right)=\frac{p}{p^2-\lambda^2},\ Re\,p>Re\,\lambda;$$

$$sh\lambda t=\frac{1}{2}\left(e^{\lambda t}-e^{-\lambda t}\right)\risingdotseq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\lambda t}-\frac{1}{p+\lambda t}\right)=\frac{\lambda}{p^2-\lambda^2},\ Re\,p>Re\,\lambda.$$

II. <u>Свойство подобия</u>. Если $f(t)\risingdotseq F(p)$, $Re\,p>Re\,s_0$, **то** $f(at)\risingdotseq\frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right)$, $a=const,\ a>0$.

III. <u>Свойство запаздывания</u>. Пусть задана функция

$$f_\tau(t)=\begin{cases}0, & t<\tau,\\ f(t-\tau), & t\ge\tau,\end{cases}=\eta(t-\tau)f(t-\tau)$$

где $\tau > 0$. Если $\eta(t)f(t) \risingdotseq F(p),\ Re\,p > Re\,s_0$, то $\eta(t-\tau)f(t-\tau) \risingdotseq e^{-p\tau}F\big(p\big)$.
Различие между функциями $\eta(t)f(t)$, $\eta(t-\tau)f(t-\tau)$ и $\eta(t-\tau)f(t)$ иллюстрируют рисунки 4, 5. и 6

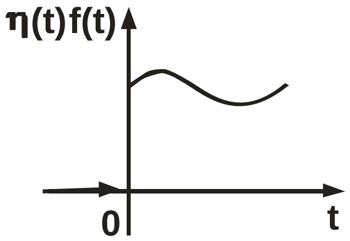

Рис. 4.

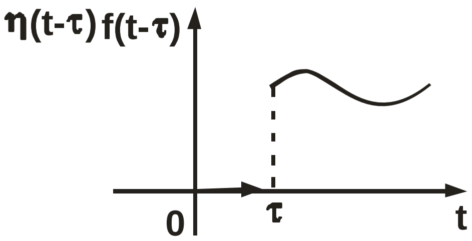

Рис. 5.

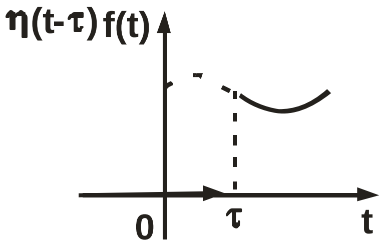

Рис. 6.

Примеры на применения этого свойства будут рассмотрены в 3.

IV. <u>Свойство смещения</u>. Если $f(t) \risingdotseq F(p),\ Re\,p > Re\,s_0$, **то для любого комплексного числа** λ **имеем** $e^{\lambda t}f(t) \risingdotseq F\big(p-\lambda\big),\ Re\,p > s_0 + Re\,\lambda$.

П р и м е р 3. Найти изображения функций $e^{-\lambda t}\cos\omega t$ и $e^{-\lambda t}\sin\omega t$.

Р е ш е н и е. Используя результаты примера 2 и свойство смещения, получим:

$$e^{-\lambda t}\cos\omega t \risingdotseq \frac{p+\lambda}{(p+\lambda)^2+\omega^2},\ Re\,p > |Im\,\omega| - Re\,\lambda;$$

$$e^{-\lambda t}\sin\omega t \risingdotseq \frac{\omega}{(p+\lambda)^2+\omega^2},\ Re\,p > |Im\,\omega| - Re\,\lambda.$$

V. <u>Дифференцирование оригинала (изображение производной)</u>. Если функция $f'(t)$ **удовлетворяет условиям существования изображения и** $f(t) \risingdotseq F(p),\ Re\,p > Re\,s_0$, **то** $f'(t) \risingdotseq pF(p) - f(0),\ Re\,p > Re\,s_0$, **где** $f(0) = \lim\limits_{t\to+0} f(t)$.

V'. Если функция $f^{(n)}(t)$ **удовлетворяет условиям существования изображения и** $f(t) \risingdotseq F(p),\ Re\,p > Re\,s_0$, **то**

$$f^{(n)}(t) \risingdotseq p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \ldots - pf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0),$$

$Re\,p > Re\,s_0$, **где** $f^{(k)}(0) = \lim\limits_{t\to+0} f^{(k)}(t)$, $k = 1,2,\ldots,n-1$.

Примеры на применения этого свойства будут рассмотрены в 3.

VI. <u>Дифференцирование изображения.</u> Если $f(t) \risingdotseq F(p),\ Re\,p > s_0$, **то**

$$\frac{dF(p)}{dp} \risingdotseq -tf(t),\ \frac{d^2F(p)}{dp^2} \risingdotseq t^2f(t), \ldots, \frac{d^nF(p)}{dp^n} \risingdotseq (-1)^nt^nf(t),\ Re\,p > Re\,s_0.$$

П р и м е р 4. Найти изображения функций te^{at}, t^2e^{at}, …, t^ne^{at}, t, t^2, …, t^n.

Р е ш е н и е. Так как $e^{at} \risingdotseq \dfrac{1}{p-a}$, $Re\,p > Re\,a$, (см. пример 1), то из последнего свойства следует: $te^{at} \risingdotseq -\dfrac{d}{dp}\dfrac{1}{p-a} = \dfrac{1}{(p-a)^2}$, $t^2e^{at} \risingdotseq \dfrac{d^2}{dp^2}\dfrac{1}{p-a} =$

$= -\dfrac{d}{dp}\dfrac{1}{(p-a)^2} = \dfrac{2}{(p-a)^3}$, ..., $t^n e^{at} \risingdotseq \dfrac{n!}{(p-a)^{n+1}}$, $Re\, p > Re\, a$. При $a = 0$ получим, в частности, $t \risingdotseq \dfrac{1}{p^2}$, $t^2 \risingdotseq \dfrac{2}{p^3}$, ..., $t^n \risingdotseq \dfrac{n!}{p^{n+1}}$, $Re\, p > 0$.

О т в е т. $te^{at} \risingdotseq \dfrac{1}{(p-a)^2}$, $t^2 e^{at} \risingdotseq \dfrac{2}{(p-a)^3}$, ..., $t^n e^{at} \risingdotseq \dfrac{n!}{(p-a)^{n+1}}$, $Re\, p > Re\, a$; $t \risingdotseq \dfrac{1}{p^2}$, $t^2 \risingdotseq \dfrac{2}{p^3}$, ..., $t^n \risingdotseq \dfrac{n!}{p^{n+1}}$, $Re\, p > 0$.

VII. **<u>Интегрирование оригинала (изображение интеграла).</u>** **Если** $f(t) \risingdotseq F(p)$, $Re\, p > s_0$, **то** $\int_0^t f(z)dz \risingdotseq \dfrac{F(p)}{p}$, $Re\, p > s_0$.

VIII. **<u>Интегрирование изображения.</u>** **Если функция** $\dfrac{f(t)}{t}$ **является оригиналом и** $f(t) \risingdotseq F(p)$, $Re\, p > s_0$, **то** $\dfrac{f(t)}{t} \risingdotseq \int_p^\infty F(z)dz$, $Re\, p > s_0$.

5. *Свёрткой* функций $f(t)$ и $g(t)$ называется функция $\varphi(t)$, определённая соотношением $\varphi(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$. Свёртка функций $f(t)$ и $g(t)$ обозначается $f(t) * g(t)$.

IX. Т е о р е м а **<u>умножения изображений (изображение свёртки)</u>. Если** $f(t) \risingdotseq F(p)$, $Re\, p > s_1$, $g(t) \risingdotseq G(p)$, $Re\, p > s_2$, **где** s_1, s_2 **- показатели степени роста функций** $f(t)$ **и** $g(t)$, **соответственно, то** $f(t) * g(t) \risingdotseq F(p)G(p)$ **или** $\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \risingdotseq F(p)G(p)$, $Re\, p > max\{s_1, s_1\}$.

С л е д с т в и е - <u>интеграл Дюамеля</u>. Если функции $f(t)$ **и** $g(t)$ **непрерывно дифференцируемы на интервале** $(0, +\infty)$ **и** $f(t) \risingdotseq F(p)$, $Re\, p > s_1$, $g(t) \risingdotseq G(p)$, $Re\, p > s_2$, **где** s_1, s_2 **- показатели степени роста функций** $f(t)$ **и** $g(t)$, **соответственно, то** $pF(p)G(p) \risingdotseq f(0)g(t) + \int_0^t f'(\tau)g(t-\tau)d\tau =$

$$= f(0)g(t) + \int_0^t g(\tau)f'(t-\tau)d\tau = g(0)f(t) + \int_0^t g'(\tau)f(t-\tau)d\tau =$$

$$= g(0)f(t) + \int_0^t f(\tau)g'(t-\tau)d\tau.$$

Таблица 1

Свойства изображений

$f(t) \risingdotseq F(p), \quad g(t) \risingdotseq G(p)$		
I.	$\sum\limits_{i=1}^{n} k_i f_i(t) \risingdotseq \sum\limits_{i=1}^{n} k_i F_i(p),$	$k_i = const$
II.	$f(at) \risingdotseq \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$	$a = const,\ a > 0$
III.	$\eta(t-\tau) f(t-\tau) \risingdotseq e^{-p\tau} F(p)$	$\tau > 0$
IV.	$e^{\lambda t} f(t) \risingdotseq F(p-\lambda)$	$\lambda = const$
V.	$f'(t) \risingdotseq pF(p) - f(0),$ $f''(t) \risingdotseq p^2 F(p) - pf(0) - f'(0),$ $\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ $f^{(n)}(t) \risingdotseq p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$	
VI.	$tf(t) \risingdotseq -\frac{dF(p)}{dp},\ t^n f(t) \risingdotseq (-1)^n \frac{d^n F(p)}{dp^n}$	
VII.	$\int\limits_0^t f(z)dz \risingdotseq \frac{F(p)}{p}$	
VIII.	$\frac{f(t)}{t} \risingdotseq \int\limits_p^{\infty} F(z)dz$	если $\int\limits_p^{\infty} F(z)dz$ сходится.
IX.	$\int\limits_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau \risingdotseq F(p)G(p)$	

Таблица 2

Изображения некоторых функций

	$f(t)$	$F(p)$		$f(t)$	$F(p)$
1	$\eta(t)$	$\frac{1}{p}$	7	$e^{-\lambda t} \sin\omega t$	$\frac{\omega}{(p+\lambda)^2+\omega^2}$
2	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	8	$e^{-\lambda t} \cos\omega t$	$\frac{p+\lambda}{(p+\lambda)^2+\omega^2}$
3	e^{at}	$\frac{1}{p-a}$	9	$sh\lambda t$	$\frac{\lambda}{p^2-\lambda^2}$
4	$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$	10	$ch\lambda t$	$\frac{p}{p^2-\lambda^2}$
5	$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$	11	$t\sin\omega t$	$\frac{2\omega p}{\left(p^2+\omega^2\right)^2}$
6	$\cos\omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$	12	$t\cos\omega t$	$\frac{p^2-\omega^2}{\left(p^2+\omega^2\right)^2}$

З а м е ч а н и е. Данную таблицу можно пополнять другими функциями. Для практических целей существуют обширные таблицы преобразований Лапласа, например, Г. Бейтмен, А. Эрдейи. Таблицы интегральных преобразований. Т. 1. Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина. (Серия "Справочная математическая библиотека"). М., 1969.

3. Примеры нахождения изображений

6. В примерах этого раздела требуется найти изображения заданных функций, используя свойства изображений и формулы из таблицы 2.

П р и м е р 5. Найти изображения функций: 1) $\boldsymbol{f(t)=3e^{-2t}+t^2+5}$;

2) $\boldsymbol{f(t)=\cos 3t+2e^t\sin 3t}$.

Р е ш е н и е.

1) $$\boldsymbol{Lf(t)=L(3e^{-2t}-4t^2+5)=\left|\textit{свойство } I\right|=3L(e^{-2t})-4L(t^2)+}$$

$$\boldsymbol{+5L(\eta(t))=\left|\textit{формулы } 1,3,2 \textit{ таблицы} 2\right|=3\frac{1}{p+2}-4\frac{2!}{p^3}+5\frac{1}{p}=}$$

$$\boldsymbol{=\frac{3p^3-8p-16+5p^3+10p^2}{p^3(p+2)}=\frac{8p^3+10p^2-8p-16}{p^3(p+2)}}.$$

2) $$\boldsymbol{Lf(t)=L(\cos 3t+2e^t\sin 3t)=\left|\textit{свойство } I,\ \textit{формулы } 6,7 \textit{ таблицы } 2\right|=}$$

$$\boldsymbol{=\frac{p}{p^2+9}+2\frac{3}{(p-1)^2+9}=\frac{p^3+4p^2+10p+54}{(p^2+9)(p^2-2p+10)}}.$$

П р и м е р 6. Найти изображение функции $\boldsymbol{f(t)=\sin^3 t}$.

Р е ш е н и е. Самое главное - необходимо всегда помнить, что произведение оригиналов не равно произведению изображений! Поэтому для нахождения изображение функции, содержащей произведение других функций или степени какой-либо функции, требуется предварительно преобразовать эту функцию, чтобы избавиться от произведений.

$$\boldsymbol{f(t)=\sin^3 t=\sin t\cdot\sin^2 t=\sin t\cdot\frac{1}{2}(1-\cos 2t)=\frac{1}{2}\sin t-\frac{1}{4}(\sin 3t-\sin t)=}$$

$\boldsymbol{=\frac{1}{4}\sin t-\frac{1}{4}\sin 3t}$. Используя свойство I и формулу 5 таблицы 2, получим

$$\boldsymbol{F(p)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p^2+1}-\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{p^2+9}=\frac{3-p^2}{2(p^2+1)(p^2+9)}}.$$

П р и м е р 7. Найти изображения функций: 1) $\boldsymbol{f(t)=t^2 ch2t}$;

2) $\boldsymbol{g(t)=(\cos 3t+2e^t\sin 3t)'}$.

Р е ш е н и е. 1) Для решения задачи применяем свойство VI к изображению функции $\boldsymbol{ch2t}$ (формула 10 таблицы 2): $\boldsymbol{ch2t \risingdotseq \frac{p}{p^2-4}}$. Получим:

$$t^2 ch2t \risingdotseq \frac{d^2}{dp^2}\left(\frac{p}{p^2-4}\right) = -\frac{d}{dp}\left(\frac{p^2+4}{(p^2-4)^2}\right) = \frac{2(p^2+12)p}{(p^2-4)^3}.$$

2) <u>Первый способ</u>. Находим производную $g(t) = (\cos 3t + 2e^t \sin 3t)' =$ $= -3\sin 3t + 2e^t \sin 3t + 6e^t \cos 3t$; используем свойство I и формулы 5, 7 и 8 таблицы 2: $g(t) = -3\sin 3t + 2e^t \sin 3t + 6e^t \cos 3t \risingdotseq 3\cdot\dfrac{3}{p^2+9} + 2\cdot\dfrac{3}{(p-1)^2+9} +$

$$+6\cdot\frac{p-1}{(p-1)^2+9} = \frac{6p^3-9p^2+72p-90}{(p^2+9)(p^2-2p+10)}.$$

<u>Второй способ</u>. В примере 5, 2) получили

$$f(t) = \cos 3t + 2e^t \sin 3t \risingdotseq \frac{p^3+4p^2+10p+54}{(p^2+9)(p^2-2p+10)}.$$

Воспользуемся свойством V. Для этого сначала найдём $f(0) = (\cos 3t + 2e^t \sin 3t)\Big|_{t=0} = 1$. Тогда $g(t) = (\cos 3t + 2e^t \sin 3t)' \risingdotseq$

$$\risingdotseq p\cdot\frac{p^3+4p^2+10p+54}{(p^2+9)(p^2-2p+10)} - 1 = \frac{6p^3-9p^2+72p-90}{(p^2+9)(p^2-2p+10)}.$$

П р и м е р 8. Найти изображения функций:

1) $f(t) = \begin{cases} 0, & t<0, \\ t^2, & 0 \le t \le 2, \\ 4, & t>2, \end{cases}$ (рис. 7);

2) $f(t) = \begin{cases} 0, & t<a, \\ \sin\omega(t-a), & a \le t \le b, \\ 0, & t>b, \end{cases}$ (рис. 8).

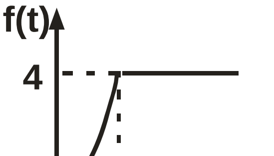

Рис. 7.

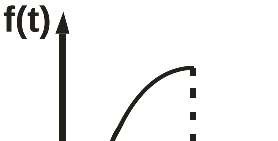

Рис. 8.

Р е ш е н и е. 1) Для нахождения изображения заданной функции воспользуемся свойством запаздывания (III). С этой целью необходимо, прежде всего, изменить аналитическую запись функции так, чтобы удобно было применять это свойство. Алгоритм формирования нового аналитического выражения для функции $f(t)$ состоит в следующем (см. также рис. 4 - 6):

а). Из функции t^2 (рис. 9 а)) получаем функцию $f_1(t) = \eta(t)t^2$ (рис. 9 б)); эта функция "включает" параболу в момент времени $t = 0$;

б). В момент $t=2$ парабола должна "выключиться", а вместо неё "включиться" постоянная "ступенька"; "выключение" параболы осуществляется добавлением к функции $\eta(t)t^2$ противоположной параболы $-t^2$, "включаемой в момент $t=2$ (рис. 9 в)), в результате чего получается функция $f_2(t)=\eta(t)t^2-\eta(t-2)t^2$ (рис. 9 г));

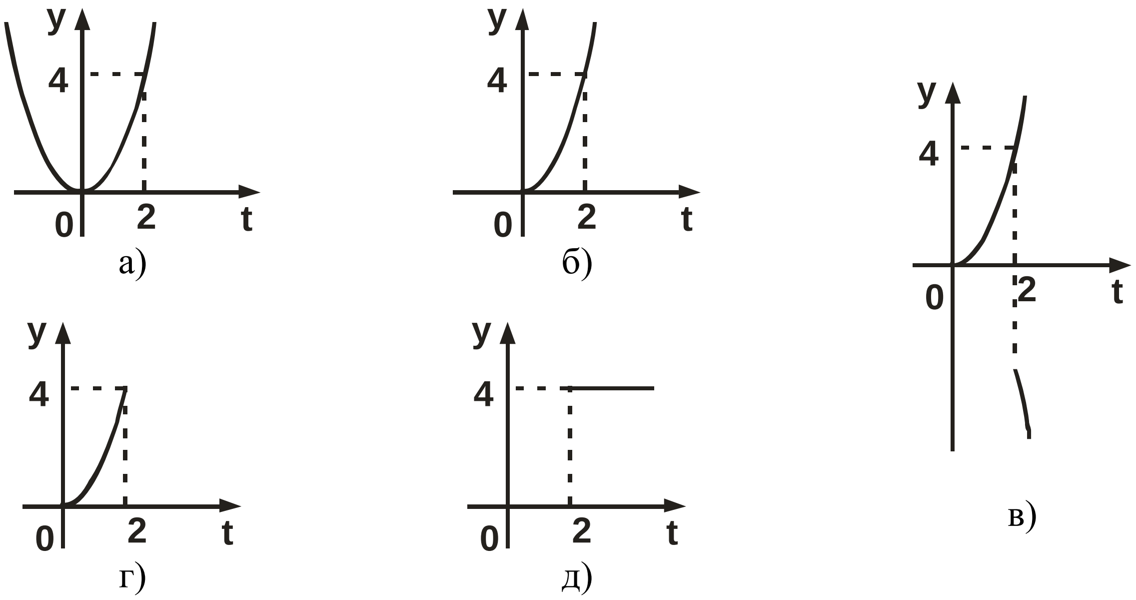

Рис. 9.

в). Осталось "включить" в момент $t=2$ "ступеньку", т.е. добавить функцию $4\cdot\eta(t-2)$ (рис. 9 д));

г). Мы получили функцию

$$f(t)=\eta(t)t^2-\eta(t-2)t^2+4\cdot\eta(t-2); \qquad (3)$$

д). Для окончательного построения новой записи функции необходимо сделать так, чтобы в каждом слагаемом аргументы функции Хевисайда и самой функции были бы одинаковыми (это требуется для применения свойства запаздывания). В нашем случае для первого и третьего слагаемого это условие выполняется. Добьемся, чтобы во втором слагаемом $\eta(t-2)t^2$ функция t^2 была бы представлена по степеням $(t-2)$. Если функция не очень сложная, как в нашем случае, то разложение её по степеням $(t-2)$ можно осуществить так:

$$t^2=\big((t-2)+2\big)^2=(t-2)^2+4(t-2)+4. \qquad (4)$$

Для более сложных функций разложение производится с использованием формулы Тейлора: $g(t)=g(2)+\dfrac{g'(2)}{1!}(t-2)+\dfrac{g''(2)}{2!}(t-2)^2+\ldots$. У нас $g(t)=t^2$,

$g(2)=4$, $g'(t)=2t$, $g'(2)=4$, $g''(t)=2=g''(2)$. Подставляя в формулу Тейлора, получим (4): $t^2=(t-2)^2+4(t-2)+4$.

Окончательное выражение для функции $f(t)$ получится подстановкой (4) во второе слагаемое (3):

$$f(t)=\eta(t)t^2-\eta(t-2)\Big((t-2)^2+4(t-2)+4\Big)+4\cdot\eta(t-2)=$$
$$=\eta(t)t^2-\eta(t-2)(t-2)^2-4\cdot\eta(t-2)(t-2). \qquad (5)$$

Для отыскания изображения функции (5) применим: свойство линейности (I), запаздывания (III). Так как по формуле 2 таблицы 2 $t \risingdotseq \dfrac{1}{p^2}$, $t^2 \risingdotseq \dfrac{2}{p^3}$, то

$\eta(t-2)(t-2) \risingdotseq \dfrac{1}{p^2}e^{-2p}$, $\eta(t-2)(t-2)^2 \risingdotseq \dfrac{2}{p^3}e^{-2p}$. Поэтому

О т в е т: $f(t) \risingdotseq \dfrac{2}{p^3}-\dfrac{2}{p^3}e^{-2p}-\dfrac{4}{p^2}e^{-2p}$.

2) Записываем сначала новое аналитическое выражение для заданной функции по тому алгоритму, который применён к функции 1) этого примера.

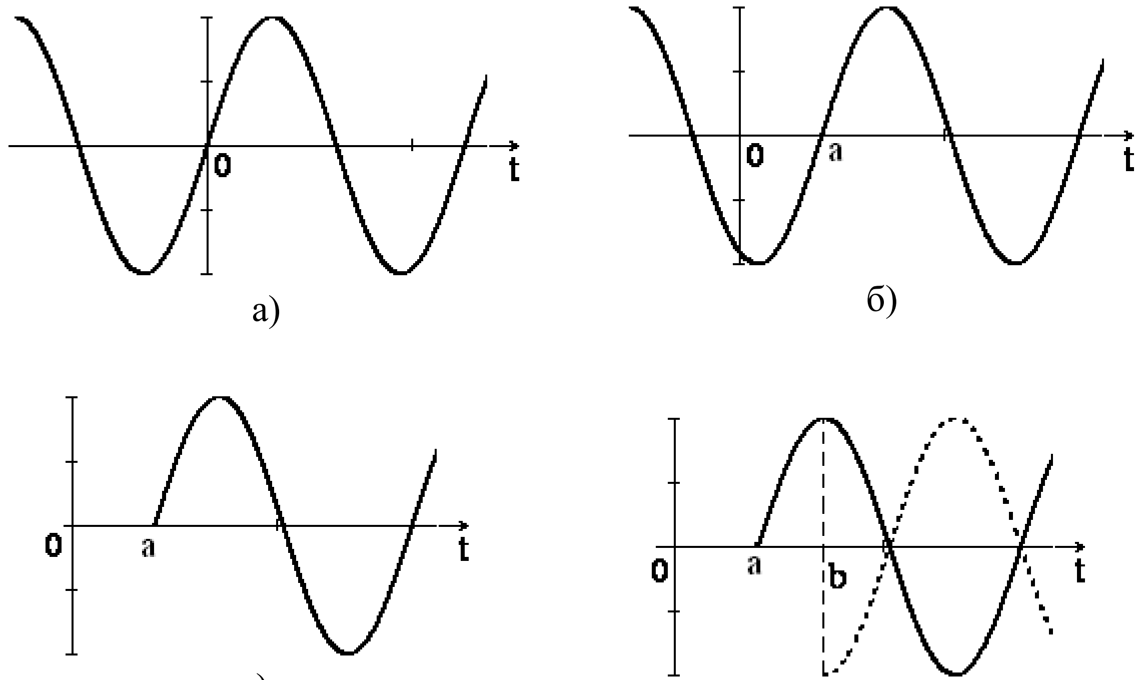

Рис. 10.

а) Функция $\sin\omega t$ (рис. 10 а)) сдвигается вправо на время $t=a$: $\sin\omega(t-a)$ (рис. 10 б)) и "включается" в момент $t=a$, т.е. имеет вид $\eta(t-a)\sin\omega(t-a)$ (рис. 10 в));

б) Для "выключения" её в момент $t=b$ к функции $\eta(t-a)\sin\omega(t-a)$ добавляется функция $-\eta(t-b)\sin\omega(t-a)$ (рис. 10 г)); в результате получается функция $f(t)=\eta(t-a)\sin\omega(t-a)-\eta(t-b)\sin\omega(t-a)$.

в) Выравниваем аргументы во втором слагаемом:

$$\sin\omega(t-a)=\sin\omega\big((t-b)+b-a\big)=|\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha|=$$

$$=\sin\omega(t-b)\cos\omega(b-a)+\cos\omega(t-b)\sin\omega(b-a).$$

Окончательно имеем

$$f(t)=\eta(t-a)\sin\omega(t-a)-\cos\omega(b-a)\eta(t-b)\sin\omega(t-b)-$$
$$-\sin\omega(b-a)\eta(t-b)\cos\omega(t-b).$$

Для нахождения изображения применим свойства I и III. Так как из формул 5 и 6 таблицы 2 следует: $\sin\omega t \doteq \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$, $\cos\omega t \doteq \frac{p}{p^2+\omega^2}$, то, применяя свойство запаздывания, находим $\eta(t-a)\sin\omega(t-a) \doteq \frac{\omega}{p^2+\omega^2}e^{-ap}$,

$\eta(t-b)\sin\omega(t-b) \doteq \frac{\omega}{p^2+\omega^2}e^{-bp}$, $\qquad \eta(t-b)\cos\omega(t-b) \doteq \frac{p}{p^2+\omega^2}e^{-bp}$.

Получаем

О т в е т: $f(t) \doteq \frac{1}{p^2+\omega^2}\left(\omega e^{-ap}-\omega e^{-bp}\cos\omega(b-a)-pe^{-bp}\sin\omega(b-a)\right)$.

П р и м е р 9. Найти изображения функций: 1) $f(t)=\int\limits_0^t t\cos^2 2tdt$; 2) $f(t)=\int\limits_0^t e^{2(t-\tau)}\sin 3\tau d\tau$; 3) $f(t)=\frac{1-\cos t}{t}$.

Р е ш е н и е. 1) Преобразуем подынтегральную функцию $t\cos^2 2t =$ $=t\cdot\frac{1}{2}(1+\cos 4t)=\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}t\cos 4t$. По формулам 2 и 12 таблицы 2 находим $t \doteq \frac{1}{p^2}$, $t\cos 4t \doteq \frac{p^2-16}{\left(p^2+16\right)^2}$. По свойству I находим $\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}t\cos 4t \doteq \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p^2}+$ $+\frac{1}{2}\cdot\frac{p^2-16}{\left(p^2+16\right)^2}=\frac{p^4+8p^2+128}{p^2\left(p^2+16\right)^2}=F_1(p)$. Используя свойство VII, получим

О т в е т: $f(t)=\int\limits_0^t t\cos^2 2tdt \doteq \frac{F_1(p)}{p}=\frac{1}{p}\cdot\frac{p^4+8p^2+128}{p^2\left(p^2+16\right)^2}$.

2) Заданный интеграл - это свёртка функций e^{2t} и $\sin 3t$, т.е. $\int\limits_0^t e^{2(t-\tau)}\sin 3\tau d\tau=e^{2t}*\sin 3t$. По формулам 3 и 5 таблицы 2 имеем $e^{2t} \doteq \frac{1}{p-2}$, $\sin 3t \doteq \frac{3}{p^2+9}$. По теореме умножения (свойство IX) находим

О т в е т: $e^{2t}*\sin 3t \doteq \frac{3}{(p-2)(p^2+9)}$.

3) Изображение этой функции можно найти, используя свойство VIII. По формулам 1 и 6 таблицы 2 получим $1-\cos t \risingdotseq \frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+1}$; устанавливаем сходимость несобственного интеграла (как того требует свойство VIII):

$$\int_p^{\infty}\left(\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+1}\right)dp=\left(\ln p-\frac{1}{2}\ln(p^2+1)\right)\Bigg|_p^{\infty}=\ln\frac{p}{\sqrt{p^2+1}}\Bigg|_p^{\infty}=$$

$$=\lim_{p\to\infty}\ln\frac{p}{p\sqrt{1+1/p^2}}-\ln\frac{p}{\sqrt{p^2+1}}=\lim_{p\to\infty}\ln\frac{1}{\sqrt{1+1/p^2}}+\ln\frac{\sqrt{p^2+1}}{p}=$$

$=\ln 1+\ln\frac{\sqrt{p^2+1}}{p}=\ln\frac{\sqrt{p^2+1}}{p}$. Интеграл сходится, и по свойству VIII получим

$$f(t)=\frac{1-\cos t}{t}\risingdotseq \ln\frac{\sqrt{p^2+1}}{p}.$$

В ряде случаев изображение функции можно получить различными методами.

П р и м е р 10. Найти изображение функции $f(t)=t^2e^{-2t}$.

Р е ш е н и е. Первый способ. Из формулы 3 таблицы 2 имеем $e^{-2t}\risingdotseq\frac{1}{p+2}$. Применяем свойство VI:

$$t^2e^{-2t}\risingdotseq\frac{d^2}{dp^2}\left(\frac{1}{p+2}\right)=\frac{d}{dp}\left(-\frac{1}{(p+2)^2}\right)=\frac{2}{(p+2)^3}.$$

Второй способ. Из формулы 2 таблицы 2 устанавливаем соответствие: $t^2\risingdotseq\frac{2}{p^3}$, а затем применяем свойство IV: $e^{-2t}t^2\risingdotseq\frac{2}{(p+2)^3}$.

П р и м е р 11. Найти свёртку функций $f(t)=e^t$ и $g(t)=t$.

Р е ш е н и е. Свёртка равна (см. п.5): $f(t)*g(t)=\int_0^t e^{\tau}(t-\tau)d\tau=$

$$=\left|\begin{matrix}\text{интегрируем по частям}\\ u=t-\tau, \quad du=-d\tau,\\ dv=e^{\tau}d\tau, \quad v=e^{\tau}\end{matrix}\right|=e^{\tau}(t-\tau)\Big|_0^t+\int_0^t e^{\tau}d\tau=-t+e^{\tau}\Big|_0^t=-t+e^t-1.$$

Упражнения

Используя свойства преобразований Лапласа и таблицу изображений, найти изображения следующих функций:

а) $\frac{1}{3}t^3+4\cos 2t$; б) $te^{-t}\sin t$; в) $\int\limits_0^t(\tau+1)\cos\omega\tau d\tau$; г) $\int\limits_0^t\cos^2\omega\tau d\tau$; д) $\frac{\sin^2 t}{t}$.

Ответы: а) $\frac{2}{p^4}+\frac{4p}{p^2+4}$; б) $\frac{2(p+1)}{\left((p+1)^2+1\right)^2}$; в) $\frac{p^3+p^2+p\omega^2-\omega^2}{p\left(p^2+\omega^2\right)^2}$;

г) $\frac{p^2+2\omega^2}{p^2(p^2+4\omega^2)}$; д) $\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{p^2+4}}{p}$.

4. Определение оригинала по изображению

7. Т е о р е м а **об обращении преобразования Лапласа**. **Пусть известно, что заданная функция $F(p)$ комплексной переменной p в области $\operatorname{Re}p>s_0$ является изображением кусочно-гладкой функции $f(t)$ действительной переменной t с показателем степени роста s_0. Тогда**

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{s-i\infty}^{s+i\infty}e^{pt}F(p)dp,\ s>s_0 \qquad (6)$$

где интеграл понимается в смысле главного значения, т.е. как $\lim\limits_{\sigma\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{s-i\sigma}^{s+i\sigma}e^{pt}F(p)dp$.

Т е о р е м а **об единственности обращения**. **Если два оригинала $f_1(t)$ и $f_2(t)$ имеют одно и тоже изображение $F(p)$, то функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$ совпадают во всех точках t, где обе функции дифференцируемы.**

Из теоремы об обращении преобразования Лапласа следует теорема, лежащая в основе одного из практических методов нахождения оригинала по известному изображению.

Т е о р е м а. **Если изображение $F(p)$ является однозначной функцией и имеет конечное число особых точек p_i, $i=1,...,n$, лежащих в конечной части плоскости, то**

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\underset{p_k}{\operatorname{res}}(F(p)e^{pt}). \qquad (7)$$

З а м е ч а н и е. Пусть $F(p)=\frac{P_n(p)}{Q_m(p)}$ - правильная дробь, где $P_n(p)$ и $Q_m(p)$ - многочлены степеней n и m, соответственно ($n<m$). Тогда, если многочлен $Q_m(p)$ имеет комплексно сопряжённые корни p_k и $\bar{p}_k$, то

$$\underset{p_k}{\operatorname{res}}\left(\frac{P_n(p)}{Q_m(p)}e^{pt}\right)+\underset{\bar{p}_k}{\operatorname{res}}\left(\frac{P_n(p)}{Q_m(p)}e^{pt}\right)=2\operatorname{Re}\underset{p_k}{\operatorname{res}}\left(\frac{P_n(p)}{Q_m(p)}e^{pt}\right), \qquad (8)$$

т.е. вместо вычисления двух вычетов в полюсах p_k и $\bar{p}_k$ функции $\frac{P_n(p)}{Q_m(p)}e^{pt}$ достаточно найти удвоенную действительную часть вычета этой функции в полюсе p_k.

П р и м е р 12. Найти оригинал изображения

$$F(p)=\frac{p+2}{(p+1)(p-1)(p+3)}.$$

Р е ш е н и е. <u>Первый способ</u>. Изображение $F(p)$ - правильная дробь; раскладываем её на простые дроби:

$$F(p)=\frac{p+2}{(p+1)(p-1)(p+3)}=\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{p-1}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p+1}-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{p+3}.$$

Из таблицы 2 (формула 3) находим $f(t)=\frac{3}{8}e^{t}-\frac{1}{4}e^{-t}-\frac{1}{8}e^{-3t}$.

<u>Второй способ</u>. Знаменатель изображения $F(p)$ имеет простые действительные корни: $p_1=-1$, $p_2=1$ и $p_3=-3$, которые для функции $F(p)$ представляют собой простые полюса. Находим вычеты в этих точках:

$$\operatorname*{res}_{p_1}\left(F(p)e^{pt}\right)=\lim_{p\to-1}\frac{(p+1)(p+2)}{(p+1)(p-1)(p+3)}e^{pt}=-\frac{1}{4}e^{-t},$$

$$\operatorname*{res}_{p_2}\left(F(p)e^{pt}\right)=\lim_{p\to1}\frac{(p-1)(p+2)}{(p+1)(p-1)(p+3)}e^{pt}=\frac{3}{8}e^{t},$$

$$\operatorname*{res}_{p_3}\left(F(p)e^{pt}\right)=\lim_{p\to-3}\frac{(p+3)(p+2)}{(p+1)(p-1)(p+3)}e^{pt}=-\frac{1}{8}e^{-3t}.$$

Подставляя в (7), получим оригинал $f(t)=-\frac{1}{4}e^{-t}+\frac{3}{8}e^{t}-\frac{1}{8}e^{-3t}$.

П р и м е р 13. Найти оригинал изображения $F(p)=\frac{p^2+1}{p(p^2+2p+5)}$.

Р е ш е н и е. <u>Первый способ</u>. Изображение $F(p)$ - правильная дробь. Раскладываем её на простые дроби:

$$F(p)=\frac{p^2+1}{p(p^2+2p+5)}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{p}+\frac{\frac{4}{5}p-\frac{2}{5}}{p^2+2p+5}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{p}+\frac{\frac{4}{5}p-\frac{2}{5}}{(p+1)^2+2^2}.$$

Преобразуем дроби, выделив слагаемые, входящие в таблицу 2:

$$F(p)=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{p}+\frac{4}{5}\cdot\frac{p+1}{(p+1)^2+2^2}-\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{(p+1)^2+2^2}.$$

Из формул 1, 7 и 8 таблицы 2 находим $f(t)=\frac{1}{5}+\frac{4}{5}e^{=t}\cos 2t-\frac{3}{5}e^{-t}\sin 2t$.

<u>Второй способ</u>. Знаменатель изображения $F(p)$ имеет простые корни: два комплексно сопряжённых $p_{1,2}=-1\pm 2i$ и один действительный $p_3=0$. Это полюсы функции $F(p)$. По формулам (7) и (8) находим

$$f(t)=\sum_{k=1}^{3}\operatorname*{res}_{p_k}\left(F(p)e^{pt}\right)=$$

$$=2\,Re\lim_{p\to-1+2i}\frac{(p+1-2i)(p^2+1)}{p(p+1-2i)(p+1+2i)}e^{pt}+\lim_{p\to0}\frac{(p-0)(p^2+1)}{p(p^2+2p+5)}e^{pt}=$$

$$=2\,Re\frac{((-1+2i)^2+1)}{4i(-1+2i)}e^{(-1+2i)t}+\frac{1}{5}=Re\frac{(1+2i)}{2+i}e^{-t}e^{2it}+\frac{1}{5}=$$

$$= Re\frac{(1+2i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}e^{-t}e^{2it}+\frac{1}{5}=\frac{1}{5}Re\Big((4+3i)e^{-t}(cos\,2t+i\,sin\,2t)\Big)+\frac{1}{5}=$$

$= \frac{4}{5}e^{-t}cos\,2t-\frac{3}{5}e^{-t}sin\,2t+\frac{1}{5}$. О т в е т: $f(t)=\frac{4}{5}e^{-t}cos\,2t-\frac{3}{5}e^{-t}sin\,2t+\frac{1}{5}$.

П р и м е р 14. Найти оригинал изображения $F(p)=\frac{1}{(p^2+4)^2}$.

Р е ш е н и е. Первый способ. Изображение $F(p)$ - правильная дробь. Она имеет два полюса $p_1=2i$ и $p_2=-2i$ второго порядка. Знаменатель $(p^2+4)^2=$ $=(p-2i)^2(p+2i)^2$. По формулам (7) и (8) находим

$$f(t)=2\,Re\,\underset{2i}{res}\Big(F(p)e^{pt}\Big)=2\,Re\frac{1}{1!}\lim_{p\to 2i}\frac{d}{dp}\left(\frac{(p-2i)^2}{(p-2i)^2(p+2i)^2}e^{pt}\right)=$$

$$=2\,Re\lim_{p\to 2i}\frac{d}{dp}\left(\frac{e^{pt}}{(p+2i)^2}\right)=2\,Re\lim_{p\to 2i}\left(\frac{te^{pt}(p+2i)-2e^{pt}}{(p+2i)^3}\right)=2\,Re\left(\frac{4ite^{2it}-2e^{2it}}{(4i)^3}\right)=$$

$$=2\,Re\left(-\frac{1}{16}(t\,cos\,2t+it\,sin\,2t)+\frac{8}{64i}(cos\,2t+i\,sin\,2t)\right)=\frac{1}{16}sin\,2t-\frac{1}{8}t\,cos\,2t\,.$$

Второй способ. Воспользуемся теоремой умножения (свойство IX изображений):

$$F_1(p)G(p)\ \dot{=}\int_0^t f_1(\tau)g(t-\tau)d\tau\,. \qquad (9)$$

Имеем: $F(p)=F_1(p)G(p)$, где $F_1(p)=G(p)=\frac{1}{p^2+4}$. По формуле 5 таблицы 2 находим $\frac{1}{p^2+4}\ \dot{=}\ \frac{1}{2}sin\,2t=f_1(t)=g(t)$. Подставляем в (9):

$$F(p)=F_1(p)G(p)\ \dot{=}\ \frac{1}{4}\int_0^t sin\,2\tau\,sin\,2(t-\tau)d\tau=\frac{1}{8}\int_0^t\Big(cos(4\tau-2t)-cos\,2t\Big)d\tau=$$

$$=\frac{1}{32}sin(4\tau-2t)\Big|_0^t-\frac{1}{8}cos\,2t\cdot\tau\Big|_0^t=\frac{1}{16}sin\,2t-\frac{1}{8}t\,cos\,2t\,.$$

О т в е т. $f(t)=\frac{1}{16}sin\,2t-\frac{1}{8}t\,cos\,2t$.

Упражнения

Найти оригинал по заданному изображению.

а) $F(p)=\frac{p+1}{p^2+2p}$, б) $F(p)=\frac{p+8}{p^2+4p+5}$, в) $F(p)=\frac{p}{p^4+4}$, г) $F(p)=\frac{e^{-2p}}{(p+1)^3}$

Ответы: а) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-2t}$, б) $e^{-2t}cos\,t+6e^{-2t}sin\,t$, в) $\frac{1}{2}sht\cdot sin\,t$, г) $\frac{1}{2}(t-2)^2 e^{-(t-2)}\eta(t-2)$.

5. Решение линейных дифференциальных уравнений

8. а**)** Пусть задана задача Коши: линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$a_0\frac{d^n x}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\ldots+a_{n-1}\frac{dx}{dt}+a_n x=f(t),\ a_k \text{ - постоянные, } k=0,1,\ldots,n,$$

с начальными условиями $x(0)=x_0$, $x'(0)=x'_0$, …, $x^{(n-1)}(0)=x_0^{(n-1)}$. Требуется найти решение $x(t)$ этой задачи.

б) Пусть задана задача Коши: система линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases}\frac{dx_1}{dt}=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n+f_1(t),\\ \frac{dx_2}{dt}=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n+f_2(t),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \frac{dx_n}{dt}=a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n+f_n(t),\end{cases}$$

с начальными условиями $x_1(0)=x_{10}$, $x_2(0)=x_{20}$, …, $x_{n-1}(0)=x_{n-1,0}$. Требуется найти решение $x_1(t)$, $x_2(t)$, …, $x_n(t)$ этой задачи.

5.1. Алгоритм решения задачи Коши операционным методом

9. 1) С помощью преобразования Лапласа от известных и неизвестных функций переходим к изображениям;
2) записываем уравнение (систему уравнений) в изображениях;
3) решаем полученное операторное уравнение (систему уравнений);
4) с помощью обратного преобразования Лапласа находим оригинал - решение задачи Коши.
На рис. 11 показана схема этого алгоритма.

П р и м е р 15. Решить задачу Коши: $x''+2x'-3x=e^{-t}$, $x(0)=0$, $x'(0)=1$.

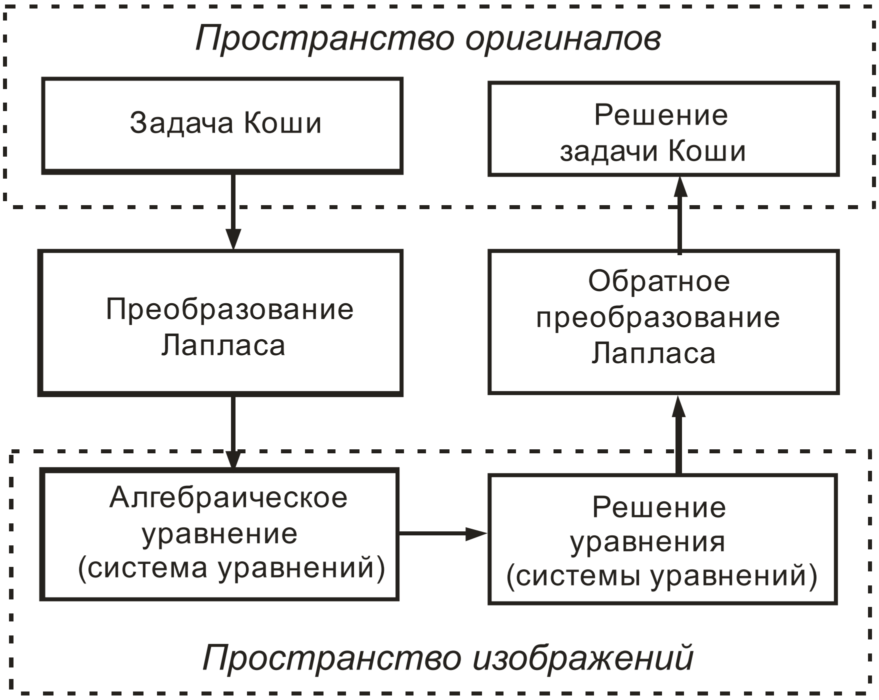

Рис. 11.

Р е ш е н и е. Применим алгоритм. 1) Переходим от оригиналов к изображениям (для нахождения изображения производных используем свойство V изображений): $x(t) \risingdotseq X(p)$,

$x'(t) \risingdotseq pX(p) - x(0) = pX(p)$,

$x''(t) \risingdotseq p^2X(p) - px(0) - x'(0) = p^2X(p) - 1$, $e^{-t} \risingdotseq \dfrac{1}{p+1}$.

2) Составляем операторное уравнение, заменяя в уравнении каждое слагаемое соответствующим изображением и применяя затем свойство I линейности изображения: $p^2X(p) - 1 + 2pX(p) - 3X(p) = \dfrac{1}{p+1}$.

3) Решаем уравнение, которое представляет собой линейное алгебраическое уравнение относительно неизвестной $X(p)$:

$X(p)(p^2 + 3p - 2) = \dfrac{1}{p+1} + 1$, $X(p)(p^2 + 3p - 2) = \dfrac{p+2}{p+1}$,

$$X(p) = \frac{p+2}{(p^2+2p-3)(p+1)} = \frac{p+2}{(p+1)(p-1)(p+3)}.$$

4) Оригинал этой функции был получен в примере 12: $x(t) = \dfrac{3}{8}e^{t} - \dfrac{1}{4}e^{-t} - \dfrac{1}{8}e^{-3t}$.

О т в е т: $x(t) = \dfrac{3}{8}e^{t} - \dfrac{1}{4}e^{-t} - \dfrac{1}{8}e^{-3t}$.

П р и м е р 16. Решить задачу Коши: $x''' + 2x'' + 5x' = 0$, $x(0) = -1$, $x'(0) = 2$, $x''(0) = 0$.

Р е ш е н и е. Применим алгоритм. 1) Переходим от оригиналов к изображениям (для нахождения изображения производных используем свойство V изображений): $x(t) \risingdotseq X(p)$,

$x'(t) \risingdotseq pX(p) - x(0) = pX(p) + 1$,

$x''(t) \risingdotseq p^2X(p) - px(0) - x'(0) = p^2X(p) + p - 2$,

$x'''(t) \risingdotseq p^3X(p) - p^2x(0) - px'(0) - x(0) = p^3X(p) + p^2 - 2p$.

2) Составляем операторное уравнение:

$p^3X(p) + p^2 - 2p + 2\left(p^2X(p) + p - 2\right) + 5\left(pX(p) + 1\right) = 0$.

3) Решаем уравнение относительно неизвестной $X(p)$:

$X(p)(p^3 + 2p^2 + 5p) = -p^2 + 2p - 2p - 1$, $X(p)(p^3 + 2p^2 + 5p) = -(p^2 + 1)$,

$X(p) = -\dfrac{p^2 + 1}{p(p^2 + 2p + 5)}$.

4) Оригинал функции $F(p) = -X(p)$ был получен в примере 13.

О т в е т: $x(t) = -\dfrac{1}{5} - \dfrac{4}{5}e^{=t}\cos 2t + \dfrac{3}{5}e^{-t}\sin 2t$.

П р и м е р 17. Решить задачу Коши: $x^{IV} - x'' = \cos t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = -1$, $x''(0) = x'''(0) = 0$.

Р е ш е н и е. Применим алгоритм. 1) Переходим от оригиналов к изображениям: $x(t) \risingdotseq X(p)$,

$x'(t) \risingdotseq pX(p) - x(0) = pX(p)$,

$x''(t) \risingdotseq p^2X(p) - px(0) - x'(0) = p^2X(p) + 1$,

$x'''(t) \risingdotseq p^3X(p) - p^2x(0) - px'(0) - x(0) = p^3X(p) + p$;

$x^{IV}(t) \risingdotseq p^4X(p) - p^3x(0) - p^2x'(0) - px''(0) - x'''(0) = p^4X(p) + p^2$;

$\cos t \risingdotseq \dfrac{p}{p^2 + 1}$.

2) Составляем операторное уравнение: $p^4X(p) + p^2 - p^2X(p) - 1 = \dfrac{p}{p^2 + 1}$.

3) Решаем это уравнение относительно неизвестной $X(p)$:

$X(p)(p^4 - p^2) = \dfrac{p}{p^2 + 1} - (p^2 - 1)$, $X(p) = \dfrac{1}{p(p^2 - 1)(p^2 + 1)} - \dfrac{1}{p^2}$.

4) Находим оригинал. Функция $F(p) = \dfrac{1}{p(p^2 - 1)(p^2 + 1)}$ имеет простые действительные полюсы $p_1 = 0$, $p_2 = 1$, $p_3 = -1$ и простые комплексно сопряжённые полюсы $p_4 = i$ и $p_5 = -i$. Оригинал функции $F(p)$ равен

$$f(t) = \sum_{k=1}^{3} \underset{p_k}{res}\left(F(p)e^{pt}\right) + 2\,Re\,\underset{i}{res}\left(F(p)e^{pt}\right) =$$

$$=\left.\frac{pe^{pt}}{p(p-1)(p+1)(p^2+1)}\right|_{p=0}+\left.\frac{(p-1)e^{pt}}{p(p-1)(p+1)(p^2+1)}\right|_{p=1}+$$

$$+\left.\frac{(p+1)e^{pt}}{p(p-1)(p+1)(p^2+1)}\right|_{p=-1}+2Re\left.\frac{(p-i)e^{pt}}{p(p-1)(p+1)(p-i)(p+i)}\right|_{p=i}=$$

$$=-1+\frac{1}{4}e^t+\frac{1}{4}e^{-t}+2Re\frac{e^{it}}{i(i-1)(i+1)2i}=-1+\frac{1}{2}\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)+Re\frac{cos\,t+i\,sin\,t}{i^2(i^2-1)}=$$

$=-1+\frac{1}{2}cht+\frac{1}{2}cos\,t$. Из формулы 3 таблицы 2 следует, что $t \risingdotseq \frac{1}{p^2}$. Поэтому

$x(t)=f(t)-t=-1+\frac{1}{2}cht+\frac{1}{2}cos\,t-t$.

О т в е т: $x(t)=-1+\frac{1}{2}cht+\frac{1}{2}cos\,t-t$.

П р и м е р 18. Решить задачу Коши: $x'''+x''=t$, $x(0)=-3$, $x'(0)=1$, $x''(0)=0$.

Р е ш е н и е. Применим алгоритм. 1) Переходим от оригиналов к изображениям: $x(t)\risingdotseq X(p)$,

$x'(t)\risingdotseq pX(p)-x(0)=pX(p)+3$,

$x''(t)\risingdotseq p^2X(p)-px(0)-x'(0)=p^2X(p)+3p-1$,

$x'''(t)\risingdotseq p^3X(p)-p^2x(0)-px'(0)-x(0)=p^3X(p)+3p^2-p$; $t\risingdotseq\frac{1}{p^2}$.

2) Составляем операторное уравнение:

$$p^3X(p)+3p^2-p+p^2X(p)+3p-1=\frac{1}{p^2}.$$

3) Решаем это уравнение относительно неизвестной $X(p)$:

$X(p)(p^3+p^2)=\frac{1}{p^2}-3p^2-2p+1$, $X(p)=\frac{-3p^4-2p^3+p^2+1}{p^4(p+1)}$.

4) Находим оригинал. Функция $X(p)$ - правильная дробь. Раскладываем её на простые дроби: $X(p)=\frac{-3p^4-2p^3+p^2+1}{p^4(p+1)}=\frac{A}{p^4}+\frac{B}{p^3}+\frac{C}{p^2}+\frac{D}{p}+\frac{E}{p+1}$.

Складываем дроби правой части и приравниваем числители левой и правой дробей:

$-3p^4-2p^3+p^2+1=A(p+1)+Bp(p+1)+Cp^2(p+1)+Dp^3(p+1)+Ep^4$.

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях p; получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{array}{l} p^4: \\ p^3: \\ p^2: \\ p: \\ p^0: \end{array}\begin{cases} -3=E+D, \\ -2=D+C, \\ 1=C+B, \\ 0=B+A, \\ 1=A. \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} A=1, \\ B=-1, \\ C=2, \\ D=-4, \\ E=1. \end{array} \quad X(p)=\frac{1}{p^4}-\frac{1}{p^3}+\frac{2}{p^2}-\frac{4}{p}+\frac{1}{p+1}.$$

Используя формулы 1 - 3 таблицы 2, находим: $x(t)=\frac{1}{6}t^3-\frac{1}{2}t^2+2t-4+e^{-t}$.

О т в е т: $x(t)=\frac{1}{6}t^3-\frac{1}{2}t^2+2t-4+e^{-t}$.

П р и м е р 19. Решить задачу Коши: $x''+4x=f(t)$, $x(0)=2$, $x'(0)=3$.

где $f(t)=\begin{cases} 0, & t<0, \\ \sin 2t, & 0\le t\le \pi, \\ 0, & t>\pi. \end{cases}$ (Рис. 12).

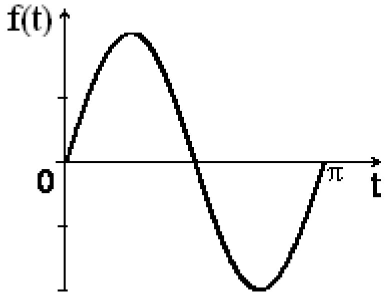

Рис. 12.

Р е ш е н и е. Применим алгоритм. 1) Переходим от оригиналов к изображениям: $x(t) \risingdotseq X(p)$,

$x''(t) \risingdotseq p^2X(p)-px(0)-x'(0)=p^2X(p)-2p-3$;

из примера 8 при $a=0$, $b=\pi$ и $\omega=2$ получим $f(t) \risingdotseq \frac{2}{p^2+4}\left(1-e^{-\pi p}\right)$.

2) Составляем операторное уравнение:

$$p^2X(p)-2p-3+4X(p)=\frac{2}{p^2+4}\left(1-e^{-\pi p}\right).$$

3) Решаем это уравнение относительно неизвестной $X(p)$:

$X(p)(p^2+4)=\frac{2}{p^2+4}\left(1-e^{-\pi p}\right)+2p+3$,

$X(p)=\frac{2}{(p^2+4)^2}-\frac{2e^{-\pi p}}{(p^2+4)^2}+\frac{2p}{p^2+4}+\frac{3}{p^2+4}$.

4) Находим оригинал. В примере 14 получили соответствие $\frac{1}{(p^2+4)^2} \risingdotseq$

$\risingdotseq \frac{1}{16}\sin 2t-\frac{1}{8}t\cos 2t$. Второе слагаемое отличается от первого множителем $e^{-\pi p}$. Этот множитель подсказывает, что можно воспользоваться свойством запаздывания (свойство III): если $\frac{1}{(p^2+4)^2} \risingdotseq \frac{1}{16}\sin 2t-\frac{1}{8}t\cos 2t$, то

$\dfrac{e^{-\pi p}}{(p^2+4)^2} \risingdotseq \eta(t-\pi)\left(\dfrac{1}{16}\sin 2(t-\pi)-\dfrac{1}{8}(t-\pi)\cos 2(t-\pi)\right)$. Третье и четвёртое слагаемые изображения находим из таблицы 2 (формулы 5 и 6): $\dfrac{p}{p^2+4} \risingdotseq \cos 2t$, $\dfrac{1}{p^2+4} \risingdotseq \dfrac{1}{2}\sin 2t$. В результате получим

$$\frac{2}{(p^2+4)^2}-\frac{2e^{-\pi p}}{(p^2+4)^2}+\frac{2p}{p^2+4}+\frac{3}{p^2+4} \risingdotseq \eta(t)\left(\frac{13}{8}\sin 2t-\frac{1}{4}t\cos 2t+2\cos 2t\right)-$$
$$-\eta(t-\pi)\left(\frac{1}{8}\sin 2(t-\pi)-\frac{1}{4}(t-\pi)\cos 2(t-\pi)\right).$$

О т в е т: $x(t)=\eta(t)\left(\dfrac{13}{8}\sin 2t-\dfrac{1}{4}t\cos 2t+2\cos 2t\right)-$

$$-\eta(t-\pi)\left(\frac{1}{8}\sin 2(t-\pi)-\frac{1}{4}(t-\pi)\cos 2(t-\pi)\right).$$

10. В некоторых случаях можно решить задачу, не находя изображения правой части дифференциального уравнения.

П р и м е р 20. Решить задачу Коши: $x''+2x'+x=\dfrac{e^{-t}}{1+t}$, $x(0)=2$, $x'(0)=-3$.

Р е ш е н и е. 1) Переходим от оригиналов к изображениям: $x(t) \risingdotseq X(p)$,
$x'(t) \risingdotseq pX(p)-x(0)=pX(p)-2$,
$x''(t) \risingdotseq p^2X(p)-px(0)-x'(0)=p^2X(p)-2p+3$.

Изображение функции $f(t)=\dfrac{e^{-t}}{1+t}$ трудно найти. Пусть $F(p) \risingdotseq \dfrac{e^{-t}}{1+t}$.

2) Составляем операторное уравнение:

$$p^2X(p)-2p+3+2pX(p)-4+X(p)=F(p).$$

3) Решаем это уравнение относительно неизвестной $X(p)$:

$X(p)(p^2+2p+1)=F(p)+2p+1$, $X(p)=F(p)\dfrac{1}{(p+1)^2}+\dfrac{2p+1}{(p+1)^2}$.

Обозначим $\dfrac{1}{(p+1)^2}=G(p)$, тогда $X(p)=F(p)G(p)+\dfrac{2p+1}{(p+1)^2}=$

$=F(p)G(p)+\dfrac{2(p+1)-1}{(p+1)^2}=F(p)G(p)+\dfrac{2}{p+1}-\dfrac{1}{(p+1)^2}$.

4) Находим оригинал. Так как изображение $F(p)$ неизвестно, то поступаем следующим образом: а) Находим из таблицы 2 (формула 4) оригинал изображения $G(p)=\dfrac{1}{(p+1)^2}$: $G(p)=\dfrac{1}{(p+1)^2} \risingdotseq te^{-t}=g(t)$;

б) По теореме умножения (свойство IX): $F(p)G(p) \risingdotseq f(t)*g(t)=$

$$=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau=\int_0^t \frac{e^{-\tau}}{1+\tau}e^{-(t-\tau)}(t-\tau)d\tau=-e^{-t}\int_0^t \frac{(1+\tau)-1-t}{1+\tau}d\tau=$$
$$=-e^{-t}\left[\int_0^t d\tau-(t+1)\int_0^t \frac{d\tau}{1+\tau}\right]=-e^{-t}\left[\tau\Big|_0^t+(t+1)\left(ln(\tau+1)\Big|_0^t\right)\right]=$$
$$=-e^{-t}\big(t-(t+1)ln(t+1)\big).$$

Из таблицы 2 (формулы 3 и 4) находим $\frac{2}{p+1} \risingdotseq 2e^{-t}$ и $\frac{1}{(p+1)^2} \risingdotseq te^{-t}$. В итоге приходим к решению задачи: $x(t)=-2te^{-t}+e^{-t}(t+1)ln(t+1)+2e^{-t}$.

О т в е т: $x(t)=-2te^{-t}+e^{-t}(t+1)ln(t+1)+2e^{-t}$.

П р и м е р 21. Решить задачу Коши:

$$\begin{cases} x'=x+2y-5sint, \\ y'=2x+y+4e^t, \end{cases}, \; x(0)=1, \; y(0)=2.$$

Р е ш е н и е. 1) Переходим от оригиналов к изображениям: $x(t) \risingdotseq X(p)$, $x'(t) \risingdotseq pX(p)-x(0)=pX(p)-1$, $y(t) \risingdotseq Y(p)$,

$y'(t) \risingdotseq pY(p)-y(0)=pY(p)-2$; $sint \risingdotseq \frac{1}{p^2+1}$, $e^t \risingdotseq \frac{1}{p-1}$.

2) Составляем систему операторных уравнений:

$$\begin{cases} pX(p)-1=X(p)+2Y(p)-\dfrac{5}{p^2+1}, \\ pY(p)-2=2X(p)+Y(p)+\dfrac{4}{p-1}, \end{cases} \quad \begin{cases} (p-1)X(p)-2Y(p)=1-\dfrac{5}{p^2+1}, \\ 2X(p)+(p-1)Y(p)=2+\dfrac{4}{p-1}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (p-1)X(p)-2Y(p)=\dfrac{p^2-4}{p^2+1}, \\ 2X(p)+(p-1)Y(p)=\dfrac{2(p+1)}{p-1}. \end{cases}$$

3) Решаем систему уравнений относительно неизвестных $X(p)$ и $Y(p)$, например, методом исключения переменных. Из первого уравнения выражаем одну из неизвестных; пусть это будет $Y(p)$:

$Y(p)=\frac{p-1}{2}X(p)-\frac{1}{2}\frac{p^2-4}{p^2+1}$ - и подставляем её во второе уравнение:

$$-2X(p)+(p-1)\left(\frac{p-1}{2}X(p)-\frac{1}{2}\frac{p^2-4}{p^2+1}\right)=\frac{2(p+1)}{p-1},$$

$$(p^2-2p-3)X(p)=\frac{(p-1)(p^2-4)}{p^2+1}+\frac{4(p+1)}{p-1},$$

$$(p-3)(p+1)X(p)=\frac{(p-1)(p^2-4)}{p^2+1}+\frac{4(p+1)}{p-1},$$

$$X(p)=\frac{(p-1)(p^2-4)}{(p+1)(p-3)(p^2+1)}+\frac{4}{(p-3)(p-1)}=X_1+4X_2,$$

$$Y(p)=\frac{2}{p-3}+\frac{2(p^2-4)}{(p^2+1)(p+1)(p-3)}=2Y_1+2Y_2.$$

4) Находим оригиналы. Раскладываем слагаемые в $X(p)$ и $Y(p)$ на простые дроби: $X_1=\frac{p^3-p^2-4p+4}{(p^2+1)(p+1)(p-3)}=\frac{Ap+B}{p^2+1}+\frac{C}{p+1}+\frac{D}{p-3}$,

$$p^3-p^2-4p+4=(Ap+B)(p+1)(p-3)+C(p^2+1)(p-3)+D(p^2+1)(p+1);$$

отсюда находим $A=\frac{3}{2}$, $B=-\frac{1}{2}$, $C=-\frac{3}{4}$, $D=\frac{1}{4}$ и

$$X_1=\frac{3}{2}\cdot\frac{p}{p^2+1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p^2+1}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{p+1}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p-3};$$

$X_2=\frac{1}{(p-3)(p-1)}=\frac{A}{p-3}+\frac{B}{p-1}$, $1=A(p-1)+B(p-3)$, $A=\frac{1}{2}$, $B=-\frac{1}{2}$ и

$$X_2=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p-3}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p-1};$$

$Y_2=\frac{p^2-4}{(p^2+1)(p+1)(p-3)}=\frac{Ap+B}{p^2+1}+\frac{C}{p+1}+\frac{D}{p-3}$, $A=-\frac{1}{2}$, $B=1$, $C=\frac{3}{8}$, $D=\frac{1}{8}$ и $Y_2=-\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p^2+1}+\frac{1}{p^2+1}+\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{p+1}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{p-3}$; по формулам 3, 5, и 6 таблицы 2 определяем оригиналы:

$$X(p)=X_1+4X_2 \risingdotseq \frac{3}{2}\cos t-\frac{1}{2}\sin t-\frac{3}{4}e^{-t}+\frac{9}{4}e^{3t}-2e^{t},$$

$$Y(p)=2Y_1+2Y_2 \risingdotseq -\cos t+2\sin t+\frac{3}{4}e^{-t}+\frac{5}{4}e^{3t}.$$

О т в е т: $x(t)=\frac{3}{2}\cos t-\frac{1}{2}\sin t-\frac{3}{4}e^{-t}+\frac{9}{4}e^{3t}-2e^{t}$,

$$y(t)=-\cos t+2\sin t+\frac{3}{4}e^{-t}+\frac{5}{4}e^{3t}.$$

Упражнения

Решить задачу Коши

а) $x'''+x''=\sin t$, $x(0)=1$, $x'(0)=1$, $x''(0)=2$.

б) $x''-3x'+2x=e^{5t}$, $x(0)=1$, $x'(0)=2$.

в) $\begin{cases} x'=x+2y-9t, \\ y'=2x+y+4e^{t}, \end{cases}$ $x(0)=1$, $y(0)=2$.

г) $\begin{cases} 3x' + 2x + y' = 1, \\ x' + 4y' + 3y = 0, \end{cases}$ $x(0) = 0,\ y(0) = 0.$

Ответы: а) $x(t) = 2t + \frac{1}{2}(e^t + \cos t - \sin t);$

б) $x(t) = \frac{1}{12}e^{5t} + \frac{1}{4}e^t + \frac{2}{3}e^{2t};$

в) $x(t) = 2e^{3t} - 4e^{-t} - 2e^t + 5 - 3t,\quad y(t) = -4 + 6t + 4e^{-t} + 2e^{3t};$

г) $x(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{5}e^{-t} - \frac{3}{10}e^{-6t/11},\ y(t) = \frac{1}{5}e^{-t} - \frac{1}{5}e^{-6t/11}.$