Содержание

ЧАСТЬ 1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

1. Комплексные числа

1. *Комплексным числом* z называется упорядоченная пара действительных чисел (x,y), $x \in R$, $y \in R$, т.е. $z=(x,y)$. Здесь первое число x называется *действительной частью* комплексного числа z и обозначается $x = Re\,z$; второе число называется *мнимой частью* комплексного числа z и обозначается $y = Im\,z$. Множество комплексных чисел обозначается C . Два комплексных числа $z_1=(x_1,y_1)$ и $z_2=(x_2,y_2)$ *равны* тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части, т.е. $z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$.

З а м е ч а н и е. В отличие от множества действительных чисел множество комплексных чисел не обладает свойством упорядоченности, т.е. комплексные числа нельзя сравнивать на "больше" или "меньше"!

Пусть $z_1=(x_1,y_1)$ и $z_2=(x_2,y_2)$. *Суммой* z_1+z_2 называется комплексное число $z=(x,y)$ такое что, $x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2$. *Произведением* $z_1 \cdot z_2$ (или просто z_1z_2) называется комплексное число $z=(x,y)$ такое что, $x = x_1x_2 - y_1y_2$, $y = x_1y_2 + x_2y_1$.

При таком определении сложения и произведения выполняются свойства:

а) коммутативные (переместительные): $z_1+z_2=z_2+z_1$, $z_1z_2=z_2z_1$;

б) ассоциативные (сочетательные): $z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3$, $z_1(z_2z_3)=(z_1z_2)z_3$;

в) дистрибутивное (распределительное): $(z_1+z_2)z_3=z_1z_3+z_2z_3$;

г) существует комплексное число $0=(0,0)$, называемое *нулём,* и обладающее свойством $z+0=z$.

2. Если определить действительное число x, как комплексное число $x=(x,0)$, то сохраняются все известные правила сложения и умножения для действительных чисел. При этом действительная единица - это комплексное число $1=(1,0)$, сохраняющее своё свойство: $z\cdot 1=z$. Поэтому множество комплексных чисел - это расширение множества действительных чисел, т.е. $R \subset C$.

Комплексное число $z=(0,y)$ называется *чисто мнимым* и символически обозначается: $z=iy$. Чисто мнимое число $(0,1)=i$ называется *мнимой единицей* и, как это следует из определения произведения комплексных чисел, справедливо равенство: $i\cdot i=i^2=-1$. Это равенство позволяет записывать комплексное число $z=(x,y)$ в виде

$$z = x + iy, \qquad (1)$$

которое называется *алгебраической формой записи,* и производить операции сложения и умножения комплексных чисел по обычным правилам алгебры (правила "раскрытия скобок"), т.е. $z_1+z_2=(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)$;

$$z_1\cdot z_2=(x_1+iy_1)\cdot(x_2+iy_2)=x_1\cdot x_2+x_1\cdot iy_2+x_2\cdot iy_1+iy_1\cdot iy_2=$$
$$=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1).$$

Отсюда следует возможность операции возведения комплексного числа в натуральную степень, причём сохраняются формулы

$$z^2=(x\pm iy)^2=x^2\pm 2ixy+(iy)^2=x^2-y^2\pm 2ixy,$$

$z^3=(x\pm iy)^3=x^3\pm 3x^2(iy)+3x(iy)^2\pm(iy)^3=x^3-3xy^2\pm i(3x^2y-y^3)$ и т.д.

З а м е ч а н и е 1. Эквивалентность алгебраической формы записи (1) и записи в виде $z=(x,y)$ очевидна из следующей цепочки преобразований:

$$z=x+iy=(x,0)+(0,1)\cdot(y,0)=(x,0)+(0,y)=(x,y).$$

В то же время запись в алгебраической форме (1) делает естественными операции с комплексными числами, не требуя запоминания сложных формул.

З а м е ч а н и е 2. Мнимая часть комплексного числа и чисто мнимое число - разные понятия и их нельзя путать!

3. Операция *вычитания* комплексных чисел определяется как операция, обратная сложению. Тогда $z=z_1-z_2=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2)$.

4. Комплексное число $\bar{z}=x-iy$ называется *комплексно сопряжённым* числу $z=x+iy$. Справедливо важное свойство: произведение комплексного числа на комплексно сопряжённое ему число есть действительное неотрицательное число, т.е. $z\bar{z}=x^2+y^2$. Операция *деления* комплексных чисел вводится, как операция, обратная умножению. На практике деление комплексных чисел осуществляется с использованием рассмотренного свойства комплексно сопряжённых чисел (см. пример 2).

П р и м е р 1. Записать действительную и мнимую части чисел: $z_1=2-3i$, $z_2=3$, $z_3=-2i$, $z_4=-1+i$.

Р е ш е н и е. $Re z_1=2$, $Im z_1=-3$; $Re z_2=3$, $Im z_2=0$; $Re z_3=0$, $Im z_3=-2$; $Re z_4=-1$, $Im z_4=1$.

П р и м е р 2. Пусть $z_1=3+7i$ и $z_2=-2+4i$. Вычислить: z_1+z_2, z_1-z_2, $z_1\cdot z_2$, z_1/z_2.

Р е ш е н и е. $z_1+z_2=3+(-2)+i(7+4)=1+11i$,

$z_1-z_2=(3+7i)-(-2+4i)=3-(-2)+i(7-4)=5+3i$,

$$z_1\cdot z_2=(3+7i)(-2+4i)=3\cdot(-2)+(7i)\cdot(-2)+3\cdot 4i+(7i)\cdot(4i)=$$
$$=-6-14i+12i+28i^2=-6-2i+28(-1)=-34-2i,$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{3+7i}{-2+4i}=\left|\begin{array}{l}\textit{умножаем числитель и}\\ \textit{знаменатель на } \bar{z}_2=-2-4i\end{array}\right|=\frac{(3+7i)(-2-4i)}{(-2+4i)(-2-4i)}=$$
$$=\frac{-6-14i-12i-28i^2}{4-16i^2}=\frac{22-28i}{4+16}=\frac{11}{10}-\frac{7}{5}i.$$

5. Из определения комплексного числа как упорядоченной пары (x,y) действительных чисел следует, что комплексное число можно рассматривать на плоскости, на которой введена прямоугольная система координат. Абсциссой точки является число $x=Re z$, а ординатой точки - число $y=Im z$, т.е. комплексному числу $z=(x,y)=x+iy$ соответствует точка на плоскости $M(x,y)$. Тем самым между множеством комплексных чисел и множеством точек плоскости установлено взаимно однозначное соответствие. Ось абсцисс Ox называется *действительной осью*, ось ординат Oy - *мнимой осью*; плоскость Oxy при этом называется *комплексной плоскостью* (плоскостью (z)). На рис. 1 показана комплексная плоскость с нанесёнными на ней комплексными числами из примера 1.

П р и м е р 3. Какая кривая определяется уравнением $Re\frac{1}{z}=\frac{1}{4}$?

Р е ш е н и е. а) Пусть $z = x + iy$. Тогда $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{x+iy} =$

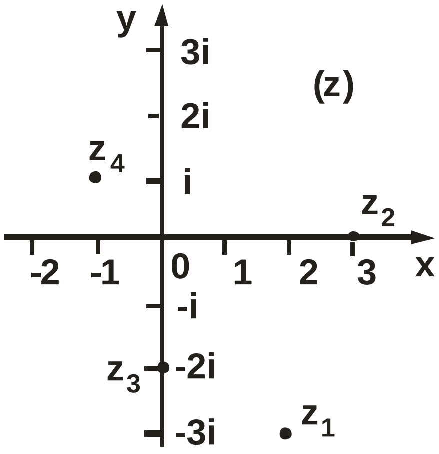


Рис. 1.

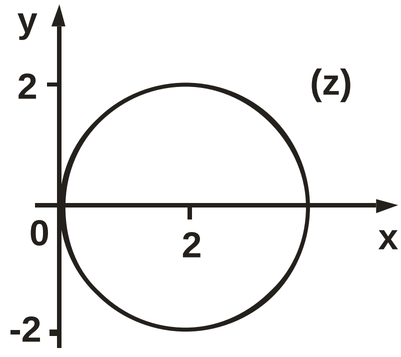


Рис. 2.

$$= \left| \begin{matrix} \textit{умножаем числитель и} \\ \textit{знаменатель на } \bar{z} = x - iy \end{matrix} \right| = \frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2};$$

отсюда $Re\dfrac{1}{z} = \dfrac{x}{x^2+y^2}$ и по условию $\dfrac{x}{x^2+y^2} = \dfrac{1}{4}$ или $x^2 + y^2 - 4x = 0$; после выделения полного квадрата по переменной x окончательно получим $(x-2)^2 + y^2 = 4$. Это уравнение окружности, изображённой на рис. 2.

6. Для определения положения точки на плоскости можно пользоваться полярными координатами (ρ, φ), где ρ - расстояние от начала координат до точки $(\rho \ge 0)$, а φ - угол между радиус-вектором точки и положительным направлением оси абсцисс (рис. 3). Положительным направлением изменения угла считается направление против часовой стрелки $(-\infty < \varphi < \infty)$. Подставляя формулы, связывающие прямоугольные и полярные координаты:

$x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ (2)

в (1) получим *тригонометрическую форму* записи комплексного числа:

$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, (3)

Число ρ называется *модулем*, а φ - *аргументом* комплексного числа z; обозначаются $\rho = |z|$, $\varphi = Arg\, z$. Из (2) следует

$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, $tg\varphi = y/x$. (4)

Формулы (2) и (4) связывают алгебраическую и тригонометрическую формы записи комплексного числа.

Аргумент комплексного числа определён неоднозначно, с точностью до аддитивного слагаемого, кратного 2π. Поэтому через $arg\, z$ обозначается *главное значение аргумента*, которое заключено в пределах $-\pi < arg\, z \le \pi$. Тогда $Arg\, z = arg\, z + 2k\pi$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$. Для вычисления главного значения аргумента в принятой области служит формула

$$
\arg z = \begin{cases} arctg\dfrac{y}{x}, & x > 0, \\ \pi + arctg\dfrac{y}{x}, & x < 0, y \ge 0, \\ -\pi + arctg\dfrac{y}{x}, & x < 0, y < 0, \\ -\dfrac{\pi}{2}, & x = 0, y < 0, \\ \dfrac{\pi}{2}, & x = 0, y > 0. \end{cases} \qquad (5)
$$

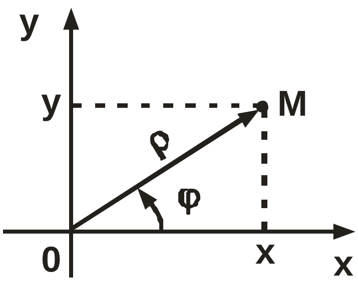


Рис. 3.

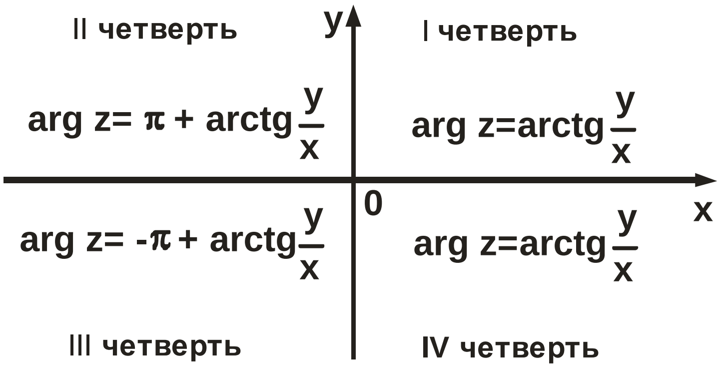


Рис. 4.

Заметим, что аргумент в точке $z = 0$ не определён. На практике удобно пользоваться схемой, представленной на рис. 4.

Из формулы (3) можно получить другое выражение:

$$z = \rho e^{i\varphi}, \qquad (6)$$

которое называется *показательной формой* записи комплексного числа. Если два комплексных числа z_1 и z_2 представлены в тригонометрической или показательной формах, то они равны в том и только том случае, когда равны их модули, а аргументы отличаются на $2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

П р и м е р 4. Найти модуль и главное значение аргумента следующих комплексных чисел; записать эти числа в тригонометрической и показательной формах: 1) $z = 1 + i$; 2) $z = 1 - i\sqrt{3}$; 3) $z = -\sqrt{3} + i$; 4) $z = -3 - i\sqrt{3}$; 5) $z = 2$; 6) $z = -2$: 7) $z = -2i$; 8) $z = -\cos\dfrac{\pi}{7} + i\sin\dfrac{\pi}{7}$.

Р е ш е н и е. 1) $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Число $z = 1 + i = (1,1)$ находится в I четверти комплексной плоскости. Поэтому $\arg z = arctg\dfrac{1}{1} = \dfrac{\pi}{4}$ (формула (6) или рис. 4); $z = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

2) $|z|=\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}=\sqrt{4}=2$. Число $z=1-i\sqrt{3}=(1,-\sqrt{3})$ находится в IV четверти. Поэтому $\arg z=\operatorname{arctg}\dfrac{-\sqrt{3}}{1}=-\dfrac{\pi}{3}$; $z=2\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right)=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

3) $|z|=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2}=\sqrt{4}=2$. Число $z=-\sqrt{3}+i=(-\sqrt{3},1)$ находится во II четверти. Поэтому $\arg z=\pi+\operatorname{arctg}\dfrac{1}{-\sqrt{3}}=\pi-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{5\pi}{6}$;

$z=2\left(\cos\dfrac{5\pi}{6}+i\sin\dfrac{5\pi}{6}\right)=2e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

4) $|z|=\sqrt{(-3)^2+(-\sqrt{3})^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$. Число $z=-3-i\sqrt{3}=(-3,-\sqrt{3})$ находится в III четверти. Поэтому $\arg z=-\pi+\operatorname{arctg}\dfrac{-3}{-\sqrt{3}}=-\pi+\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{2\pi}{3}$;

$z=2\sqrt{3}\left(\cos\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)\right)=2\sqrt{3}e^{-i\frac{2\pi}{3}}$.

5) $|z|=\sqrt{2^2+0^2}=2$. Число $z=2=(2,0)$ лежит на оси абсцисс и $x=2>0$. Поэтому $\arg z=\operatorname{arctg}\dfrac{0}{2}=0$; $z=2(\cos 0+i\sin 0)=2e^{i0}$.

6) $|z|=\sqrt{(-2)^2+0^2}=2$. Число $z=-2=(-2,0)$ лежит на оси абсцисс и $x=-2<0$. Поэтому $\arg z=\pi+\operatorname{arctg}\dfrac{0}{2}=\pi$; $z=2(\cos\pi+i\sin\pi)=2e^{i\pi}$.

7) $|z|=\sqrt{0^2+(-2)^2}=2$. Из формулы (5) $\arg z=-\dfrac{\pi}{2}$;

$z=2\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right)=2e^{-i\frac{\pi}{2}}$.

8) $|z|=\sqrt{\cos^2\dfrac{\pi}{7}+\sin^2\dfrac{\pi}{7}}=1$. Так как $x=-\cos\dfrac{\pi}{7}<0$, а $y=\sin\dfrac{\pi}{7}>0$, то число находится во II четверти. Поэтому $\arg z=\pi+\operatorname{arctg}\left(\dfrac{\sin(\pi/7)}{-\cos(\pi/7)}\right)=$

$=\pi-\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{7}\right)=\pi-\dfrac{\pi}{7}=\dfrac{6\pi}{7}$; $z=\cos\dfrac{6\pi}{2}+i\sin\dfrac{6\pi}{2}=e^{i\frac{6\pi}{7}}$.

П р и м е р 5. Какое множество точек комплексной плоскости удовлетворяет соотношениям: а) $|z-a|=R$, где $a=a_1+ia_2$ - постоянное число, R - положительное действительное число: б) $1<|z-i|<2$; в) $-\dfrac{\pi}{2}\le\arg(z+1-i)\le\dfrac{3\pi}{4}$?

Р е ш е н и е. а) Пусть $z=x+iy$. Тогда $|z-a|=R\ \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad \sqrt{(x-a_1)^2+(y-a_2)^2}=R \quad \Rightarrow \quad (x-a_1)^2+(y-a_2)^2=R^2$. Это уравнение описывает окружность радиуса R с центром в точке (a_1,a_2) (рис. 5).

б) Пусть $z=x+iy$. Тогда $|z-i|=|x+i(y-1)|=\sqrt{x^2+(y-1)^2}$. Следовательно, $1<|z-i|<2$ равносильно неравенству $1<\sqrt{x^2+(y-1)^2}<2$ или $1<x^2+(y-1)^2<4$. Это внутренность кольца между концентрическими окружностями радиусов 1 и 2 с центром в точке (0;1) (рис. 6).

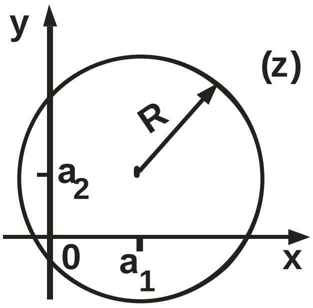


Рис. 5.

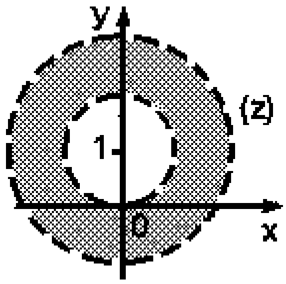
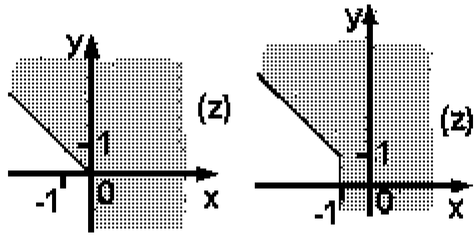


Рис. 6.



а) б)

Рис. 7.

в) Рассмотрим сначала задачу о множестве точек, удовлетворяющих неравенству $-\frac{\pi}{2}<arg\,z<\frac{3\pi}{4}$. Очевидно, по геометрическому смыслу аргумента, это точки, расположенные внутри сектора, ограниченного лучами $\varphi=-\frac{\pi}{2}$ и $\varphi=\frac{3\pi}{4}$, выходящими из начала координат (рис. 7 а)). Тогда, учитывая, что преобразование $z+1-i=z-(-1+i)$ означает сдвиг точек вдоль вектора (-1,1), получим множество точек, изображённых на рис. 7 б).

7. Операции умножения, деления, возведения в степень с натуральным показателем и извлечения корня удобнее производить в тригонометрической (или показательной) форме записи комплексных чисел. Можно показать, что если заданы два комплексных числа z и z_1 такие, что $|z|=\rho$, $arg\,z=\varphi$, $|z_1|=\rho_1$ и $arg\,z_1=\varphi_1$, то

$$zz_1=\rho\rho_1\big(cos(\varphi+\varphi_1)+i\,sin(\varphi+\varphi_1)\big)=\rho\rho_1 e^{i(\varphi+\varphi_1)};$$

$$z/z_1=(\rho/\rho_1)\big(cos(\varphi-\varphi_1)+i\,sin(\varphi-\varphi_1)\big)=(\rho/\rho_1)e^{i(\varphi-\varphi_1)};$$

$$z^n=\rho^n\big(cos\,n\varphi+i\,sin\,n\varphi\big)=\rho^n e^{in\varphi};$$

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{\rho}\left(cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\,sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)=\sqrt[n]{\rho}e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}}, \qquad (7)$$

где $k=0,1,...,(n-1)$ - всего n различных корней. Например,

$$\sqrt{z}=\sqrt{\rho e^{i\varphi+2k\pi}}=\sqrt{\rho}e^{i\frac{\varphi}{2}+k\pi}=\begin{cases}\sqrt{\rho}e^{i\frac{\varphi}{2}}, & k=0,\\ \sqrt{\rho}e^{i\frac{\varphi}{2}+i\pi}, & k=1.\end{cases}$$

З а м е ч а н и е 1. Заметим, что числа $\sqrt{\rho}e^{i\frac{\varphi}{2}}$ и $\sqrt{\rho}e^{i\frac{\varphi}{2}+i\pi}$ отличаются друг от друга на угол π, т.е. $\sqrt{z}=\pm z_0$, где $z_0=\sqrt{\rho}e^{i\frac{\varphi}{2}}$.

З а м е ч а н и е 2. В формуле (7) значения k, приводящие к разным значениям числа $\sqrt[n]{z}$, не обязательно должны быть равны именно $k=0,1,...,(n-1)$; они могут принимать и другие значения целых чисел; важно, чтобы это были n подряд следующих целых чисел. Это позволяет записывать корни с главными значениями аргумента: $arg\,z\in(-\pi,\pi]$.

З а м е ч а н и е 3. Можно доказать, что на комплексной плоскости все значения числа $\sqrt[n]{z}$ лежат в вершинах правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{|z|}$ с центром в начале координат.

П р и м е р 6. Заданы числа $z=1+i$ и $z_1=1-i\sqrt{3}$. Найти модуль и аргумент чисел: 1) zz_1; 2) z/z_1; 3) z^6; 4) $\sqrt{z}$; 5) $\sqrt[3]{z_1}$.

Р е ш е н и е. В примере 4 1) и 2) были вычислены: $|z|=\sqrt{2}$, $arg\,z=\pi/4$, $|z_1|=2$, $arg\,z_1=-\pi/3$. Для решения задачи используем формулы из п.7.

1) $|zz_1|=2\sqrt{2}$, $arg(zz_1)=arg\,z+arg\,z_1=\frac{\pi}{4}+\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{12}$;

2) $\left|\frac{z}{z_1}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $arg\left(\frac{z}{z_1}\right)=arg\,z-arg\,z_1=\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}=\frac{7\pi}{12}$;

3) $|z^6|=\left(\sqrt{2}\right)^6=2^3=8$, $Arg\,z^6=6arg\,z=6\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{2}$ и главное значение аргумента $arg\,z^6=\frac{3\pi}{2}-2\pi=-\frac{\pi}{2}\in(-\pi,\pi]$.

4) $\left|\sqrt{z}\right|=\sqrt{\sqrt{2}}=\sqrt[4]{2}$; аргумент числа $\sqrt{z}$ даёт два разных значения (в соответствие с формулой (7)): $arg\,z=\frac{\pi/4}{2}=\frac{\pi}{8}$ (при $k=0$) и $arg\,z=\frac{\pi/4}{2}-\pi=\frac{7\pi}{8}$ (при $k=-1$). Заметим, что при других $k\in Z$ получим не главные значения аргумента.

5) $\sqrt[3]{|z_1|}=\sqrt[3]{2}$; аргумент числа $\sqrt[3]{z_1}$ имеет три разных главных значения (в соответствие с формулой (7)):

$arg\,z_1=\frac{-\pi/3}{3}=-\frac{\pi}{9}$ (при $k=0$), $arg\,z_1=\frac{-\pi/3}{3}-\frac{2\pi}{3}=-\frac{7\pi}{9}$ (при $k=-1$) и

$arg\, z_1 = \dfrac{-\pi/3}{3} + \dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{5\pi}{9}$ (при $k=1$). Эти три аргумента соответствуют трём разным комплексным числам:

$\left(\sqrt[3]{z_1}\right)_1 = \sqrt[3]{2}e^{-i\frac{\pi}{9}}$, $\left(\sqrt[3]{z_1}\right)_2 = \sqrt[3]{2}e^{-i\frac{7\pi}{9}}$ и $\left(\sqrt[3]{z_1}\right)_3 = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{5\pi}{9}}$.

П р и м е р 7. Найти $\sqrt[4]{-2i}$ и нанести полученные значения на комплексную плоскость.

Р е ш е н и е. В примере 4 7) нашли: $z=-2i=2e^{-i\frac{\pi}{2}}$, т.е. $|z|=2=\rho$ и $arg\, z=-\pi/2=\varphi$. Поэтому из формулы (7) при $n=4$: $w_1=|k=0|=\sqrt[4]{2}e^{-i\frac{\pi}{8}}$, $w_2=|k=1|=\sqrt[4]{2}e^{i\frac{3\pi}{8}}$, $w_3=|k=2|=\sqrt[4]{2}e^{i\frac{7\pi}{8}}$, $w_4=|k=3|=\sqrt[4]{2}e^{i\frac{11\pi}{8}}$ или $w_4=\sqrt[4]{2}e^{-i\frac{5\pi}{8}}$ (при $k=-1$); последнее соответствует записи комплексного числа с главным значением аргумента. Расположение на комплексной плоскости точек, соответствующих числам $w_i=\left(\sqrt[4]{-2i}\right)_i$, $i=1,2,3,4$, приведено на рис. 8.

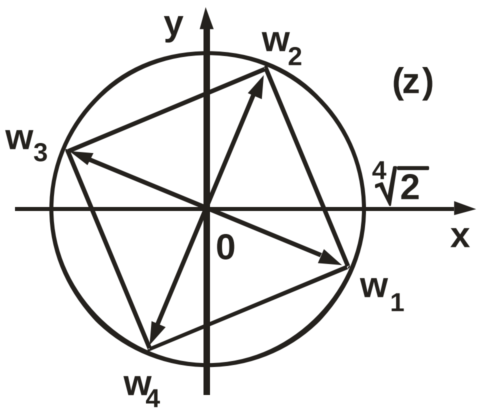


Рис. 8.

Упражнения

1. Найти модули и главные значения аргументов комплексных чисел
   а) $z=-2+2\sqrt{3}i$; б) $z=-14-2i$; в) $z=2-3i$.
   Ответы:
   а) $\rho=4$, $\varphi=\dfrac{2\pi}{3}$; б) $\rho=10\sqrt{2}$, $\varphi=-\pi+arctg\dfrac{1}{7}$; в) $\rho=\sqrt{13}$, $\varphi=-arctg\dfrac{3}{2}$.
2. Следующие числа представить в тригонометрической и показательной форме:
   а) $4i$; б) -3; в) $-\sqrt{3}-i$.
   Ответы:
   а) $4\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)=4e^{i\frac{\pi}{2}}$;
   б) $3(\cos\pi+i\sin\pi)=3e^{i\pi}$;

в) $2\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)=2e^{-i\frac{5\pi}{6}}$.

3. Какие кривые определяются следующими уравнениями:

а) $|z-5i|=8$; б) $|z-i|+|z+i|=4$; в) $|z|-3\,Im\,z=6$.

Ответы:

а) окружность с центром в точке $z_0=5i$ и радиусом 8;

б) эллипс с центром в начале координат и полуосями $a=\sqrt{3}$ и $b=2$;

в) гипербола $\frac{(y+9/4)^2}{(3/4)^2}-\frac{x^2}{(3/\sqrt{2})^2}=1$.

4. Найти все значения корня $\sqrt[3]{-1+i}$.

Ответ: $\frac{\sqrt[3]{4}}{2}(1+i)$; $\sqrt[6]{2}\left(-\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$; $\sqrt[6]{2}\left(\sin\frac{\pi}{12}-i\cos\frac{\pi}{12}\right)$.

5. Выписать все корни уравнения $z^7+1-i=0$, которые изображаются точками в третьей четверти.

Ответ: $z=\sqrt[14]{2}e^{-\frac{3\pi}{4}i}$.

2. Понятия числовой последовательности и функции комплексной переменной

8. Основные понятия вводятся также как и в области действительных чисел. Если каждому натуральному числу n поставлено в соответствие комплексное число z_n, то говорят, что задана *последовательность комплексных чисел* $\{z_n\}$. Сами числа z_n называются *членами* последовательности. Число $c=a+ib$ называется *пределом* последовательности $\{z_n\}$, если для любого положительного числа ε существует такой номер $N(\varepsilon)$, начиная с которого все члены z_n этой последовательности удовлетворяют неравенству $|z_n-c|<\varepsilon$ для всех $n>N(\varepsilon)$. Тогда пишут $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=c$ и говорят, что последовательность $\{z_n\}$ *сходящаяся*. В противном случае последовательность называется *расходящейся*.

Т е о р е м а 1. **Для сходимости последовательности $\{z_n\}$ необходимо и достаточно, чтобы сходились две последовательности действительных чисел $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$** $\left(z_n=x_n+iy_n\right)$, причём $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=\lim\limits_{n\to\infty} x_n+i\lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Т е о р е м а 2. **Если существуют $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=c_1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} w_n=c_2$, то**

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(z_n+w_n\right)=\lim\limits_{n\to\infty} z_n+\lim\limits_{n\to\infty} w_n=c_1+c_2$; **б)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(z_n\cdot w_n\right)=\lim\limits_{n\to\infty} z_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty} w_n=c_1\cdot c_2$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{z_n}{w_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty} z_n}{\lim\limits_{n\to\infty} w_n}=\frac{c_1}{c_2}$, $c_2\neq 0$ **и** $w_n\neq 0$ **для всех** n.

9. Для дальнейшего потребуются вспомогательные понятия, которые известны из анализа функций двух действительных переменных. Перечислим эти понятия, не повторяя их определения: окрестность точки; внутренняя точка множества; открытое множество (область);

граничная точка области; граница области; замкнутая область; связная область; односвязная и многосвязная область; плоские кривые. Все определения этих понятий могут быть переформулированы на комплексной плоскости.

10. Пусть заданы два множества комплексных чисел D и G. Если каждому числу z множества D ставится по какому-либо правилу (закону) f число $w \in G$, то говорят, что на множестве D задана *функция комплексной переменной* и пишут $w = f(z)$. Мы будем рассматривать случаи, когда множество D представляет собой область (или замкнутую область $\bar{D}$). Множество значений w функции $f(z)$ на комплексной плоскости (w) может быть также областью G (или замкнутой областью $\bar{G}$). При этом геометрическая интерпретация функции состоит в том, что равенством $w = f(z)$ устанавливается закон соответствия между точками области D комплексной плоскости (z) и точками области G комплексной плоскости (w). Устанавливается и обратное соответствие - каждой точке $w \in G$ ставится в соответствие одна или несколько точек области D. Это означает, что в области G задана функция комплексной переменной $z = f^{-1}(w)$, которая называется *обратной* функции $f(z)$.

Если каждому значению $z \in D$ ставится в соответствие ровно одно значение $w \in G$ функции $w = f(z)$, то такая функция называется *однозначной*, в противном случае она называется *многозначной*.

Так как каждое комплексное число определяется заданием пары действительных чисел, то задание комплексной функции $w = f(z) = u + iv$ комплексной переменной $z = x + iy$ эквивалентно заданию двух действительных функций двух действительных переменных, что может быть записано в виде

$$w(z) = u(x,y) + iv(x,y).$$

Функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ определены в области D плоскости действительных переменных x и y, соответствующей области D комплексной плоскости z. Функция $u(x,y)$ называется *действительной частью* функции $w = f(z)$, а функция $v(x,y)$ - её *мнимой частью*.

П р и м е р 8. Найти действительную и мнимую часть функций: а) $f(z) = z^3$; б) $f(z) = \dfrac{z+3}{z+i}$.

Р е ш е н и е. а) $f(z) = z^3 = (x+iy)^3 = x^3 + 3x^2(iy) + 3x(iy)^2 + (iy)^3 =$
$= |\, i^2 = -1, i^3 = -i \,| = x^3 + i3x^2y - 3xy^2 - iy^3 = \left(x^3 - 3xy^2\right) + i\left(3x^2y - y^3\right)$; отсюда,
$u(x,y) = Re\, f(z) = x^3 - 3xy^2$, $v(x,y) = Im\, f(z) = 3x^2y - y^3$;

б) $$f(z) = \frac{z+3}{z+i} = \frac{x+iy+3}{x+iy+i} = \frac{(x+3)+iy}{x+i(y+1)} = \frac{\big((x+3)+iy\big)\big(x-i(y+1)\big)}{\big(x+i(y+1)\big)\big(x-i(y+1)\big)} =$$
$$= \frac{(x+3)x + xyi - (x+3)(y+1)i + y(y+1)}{x^2+(y+1)^2} =$$
$$= \frac{(x+3)x + y(y+1)}{x^2+(y+1)^2} + i\frac{xy-(x+3)(y+1)}{x^2+(y+1)^2};$$ отсюда,
$$u(x,y) = \frac{(x+3)x + y(y+1)}{x^2+(y+1)^2},\ v(x,y) = \frac{xy-(x+3)(y+1)}{x^2+(y+1)^2}.$$

3. Элементарные функции комплексной переменной

11. *Степенная функция* имеет вид $w = z^n$. Если n - натуральное число, то

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{n\ раз}.$$

Если $n = -k$, где k - натуральное число, то $w = z^{-k} = 1/z^k$, $z \neq 0$. $w = z^0 = 1$.

12. Арифметические операции над комплексными числами позволяют определить функции вида $w = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$.

13. *Показательную функцию* $w = e^z$ определим соотношением

$$e^z = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n. \qquad (1)$$

Докажем существование предела числовой последовательности $w_n = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$. Пусть $z = x + iy$; тогда $w_n = \left(1 + \frac{x+iy}{n}\right)^n$ Модуль z_n равен

$$|w_n| = \left|1 + \frac{x}{n} + i\frac{y}{n}\right|^n = \left(\sqrt{\left(1+\frac{x}{n}\right)^2 + \left(\frac{y}{n}\right)^2}\right)^n = \left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^2 + \left(\frac{y}{n}\right)^2\right)^{n/2} =$$

$$= \left(1 + \frac{2x}{n} + \frac{x^2+y^2}{n^2}\right)^{n/2} \overset{n\to\infty}{\sim} \left(1+\frac{2x}{n}\right)^{n/2}$$; находим $\lim\limits_{n\to\infty}|w_n| = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2x}{n}\right)^{n/2} =$

$$= \left|\begin{matrix} 2\ замечательный \\ предел \end{matrix}\right| = e^x.$$

Аргумент: $arg\ w_n = \left|\begin{matrix} формула\ возведения \\ в\ степень - п.7 \end{matrix}\right| = n \cdot arctg\frac{y/n}{1+x/n}$.

Находим $\lim\limits_{n\to\infty} arg\ w_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(n \cdot arctg\frac{y/n}{1+x/n}\right) = \left|arctg\frac{y/n}{1+x/n} \overset{n\to\infty}{\sim} \frac{y/n}{1+x/n}\right| =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left(n\frac{y/n}{1+x/n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{y}{1+x/n} = y$. Из существования полученных пределов следует существование (1) и $|e^z| = e^x$, $arg\ e^z = y$. Используя тригонометрическую форму записи комплексного числа, получим

$$e^z = e^x(\cos y + i\sin y). \qquad (2)$$

Из этой формулы следует, что функция e^z при чисто действительном аргументе $z = (x, 0)$ совпадает с известной показательной функцией e^x. При чисто мнимом аргументе $z = (0, y)$ получим формулу Эйлера

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y. \qquad (3)$$

Из формулы (2) следуют свойства показательной функции e^z:

а) $e^{z_1}\cdot e^{z_2}=e^{z_1+z_2}$; б) $\left(e^{z_1}\right)^{z_2}=e^{z_1 z_2}$; в) e^z - периодическая функция с периодом $T=2\pi i$.

П р и м е р 9. Найти действительную и мнимую часть функции $w=e^{z^2}$.

Р е ш е н и е. $w=e^{z^2}=e^{(x+iy)^2}=e^{x^2+2ixy-y^2}=e^{(x^2-y^2)}e^{i2xy}=$

$=|\,\text{формула (2) или (3)}\,|=e^{x^2-y^2}(\cos 2xy+i\sin 2xy)$. Отсюда, $u=\operatorname{Re}w=$

$=e^{x^2-y^2}\cos 2xy=e^{x^2-y^2}\cos 2xy$, $v=\operatorname{Im}w=e^{x^2-y^2}\sin 2xy$.

П р и м е р 10. Вычислить $e^{\pi(1+i)}$.

Р е ш е н и е. $e^{\pi(1+i)}=e^{\pi+i\pi}=e^{\pi}e^{i\pi}=|\,\text{формула (3)}\,|=e^{\pi}(\cos\pi+i\sin\pi)=-e^{\pi}$.

14. *Тригонометрические* функции. Введём по определению для любого комплексного числа следующие функции:

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i},\quad \cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}, \tag{4}$$

$$\operatorname{tg} z=\frac{\sin z}{\cos z},\ (\cos z\neq 0),\quad \operatorname{ctg} z=\frac{\cos z}{\sin z},\ (\sin z\neq 0),$$

которые называются соответственно *синусом*, *косинусом*, *тангенсом* и *котангенсом* комплексной переменной. Можно показать, что эти функции имеют те же свойства, что и тригонометрические функции действительной переменной.

15. *Гиперболические* функции. По определению

$$\operatorname{sh} z=\frac{e^{z}-e^{-z}}{2},\quad \operatorname{ch} z=\frac{e^{z}+e^{-z}}{2}, \tag{5}$$

$$\operatorname{th} z=\frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z},\ (\operatorname{ch} z\neq 0),\quad \operatorname{cth} z=\frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z},\ (\operatorname{sh} z\neq 0),$$

которые называются соответственно *гиперболическим синусом*, *гиперболическим косинусом*, *гиперболическим тангенсом* и *гиперболическим котангенсом* комплексной переменной.

Сравнивая формулы (4) и (5) можно установить соотношения, связывающие тригонометрические и гиперболические функции:

$$\sin iz=i\cdot\operatorname{sh} z,\quad \cos iz=\operatorname{ch} z,\quad \operatorname{sh} iz=i\sin z,\quad \operatorname{ch} iz=\cos z. \tag{5'}$$

П р и м е р 11. Найти действительную и мнимую часть функций: а) $w=\sin z$; б) $w=\operatorname{ch} 2z$.

Р е ш е н и е. а) $w=\sin z=|\,\text{формула (4)}\,|=\frac{1}{2i}\left(e^{iz}-e^{-iz}\right)=$

$$=\frac{1}{2i}\left(e^{i(x+iy)}-e^{-i(x+iy)}\right)=\frac{1}{2i}\left(e^{-y}e^{ix}-e^{y}e^{-ix}\right)=|\,\text{формула (3)}\,|=$$

$$=\frac{e^{-y}}{2i}(\cos x+i\sin x)-\frac{e^{y}}{2i}(\cos x-i\sin x)=-\frac{e^{y}-e^{-y}}{2i}\cos x+i\frac{e^{y}+e^{-y}}{2i}\sin x=$$

$=\left|\begin{array}{l}1/i=-i;\ \text{и}\\ \text{формулы (5)}\end{array}\right|=\sin x\cdot\operatorname{ch} y+i\cos x\cdot\operatorname{sh} y$. Отсюда, $u=\operatorname{Re}w=\sin x\cdot\operatorname{ch} y$,

$v=\operatorname{Im}w=\cos x\cdot\operatorname{sh} y$.

б) $w=\operatorname{ch} 2z=|\,\text{формула (5)}\,|=\frac{1}{2}\left(e^{2(x+iy)}+e^{-2(x+iy)}\right)=\frac{1}{2}\left(e^{2x}e^{i2y}+e^{-2x}e^{-i2y}\right)=$

$$=|\,\text{формула (3)}\,|=\frac{e^{2x}}{2}(\cos 2y+i\sin 2y)+\frac{e^{-2x}}{2}(\cos 2y-i\sin 2y)=$$

$$=\frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2}\cos 2y+i\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2}\sin 2y=|\text{формула (5)}|=$$

$= ch\ 2x\cdot\cos 2y+i\cdot sh\ 2x\cdot\sin 2y$. Отсюда, $u=Re\,w=ch\ 2x\cdot\cos 2y$, $v=Im\,w=sh\ 2x\cdot\sin 2y$.

16. *Логарифмическая* функция. Логарифмическая функция комплексного аргумента обозначается символом: $w=Lnz$. Определим эту функцию как обратную к показательной функции $z=e^{w}$, где $w=u+iv$ и $z\neq 0$. Имеем $z=e^{u+iv}$. Из формулы (2) п.13 следует, что $|z|=e^{u}$, т.е. $u=ln|z|$ и $v=Arg\ z$. Поэтому

$$Lnz=ln|z|+iArg\ z=ln|z|+i(arg\ z+2k\pi),\ k=0,\pm1,\ldots. \qquad (6)$$

П р и м е р 12. Вычислить $Ln(-1)$.

Р е ш е н и е. Число -1 имеет модуль, равный $|z|=1$, и главное значение аргумента, равное $arg\,z=\pi$ (формула (5), п.6). Из (6) находим

$$Ln(-1)=ln1+i(\pi+2k\pi)=i(2k+1)\pi,\ k=0,\pm1,\ldots.$$

17. *Обратные тригонометрические и гиперболические* функции. Эти функции определяются как обратные к соответствующим тригонометрическим и гиперболическим функциям (п.п.14, 15). Для примера рассмотрим функцию $w=Arc\sin z$. Эта функция определяется как обратная к функции $z=\sin w$. Тогда, учитывая формулу (4) п.14, получим:

$z=\frac{1}{2i}\left(e^{iw}-e^{-iw}\right)$ или $\left(e^{iw}\right)^2-2ize^{iw}-1=0$. Это квадратное уравнение относительно e^{iw}. Решая его, находим $e^{iw}=iz+\sqrt{1+(iz)^2}=iz+\sqrt{1-z^2}$. Перед радикалом записан только один знак, так как в комплексной области $\sqrt{z}$ имеет два значения (см. замечание 1 к п.7). Из полученного решения, исходя из определения логарифмической функции (см. п.16), находим $w=\frac{1}{i}Ln\left(iz+\sqrt{1-z^2}\right)$. Таким образом,

$$Arc\sin z=-i\cdot Ln\left(iz+\sqrt{1-z^2}\right). \qquad (7)$$

Аналогично определяются и другие функции: $Arc\cos z=-i\cdot Ln\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)$, (8)

$$Arctg\ z=-\frac{i}{2}Ln\frac{1+iz}{1-iz},\ Arcctg\ z=-\frac{i}{2}Ln\frac{iz-1}{iz+1},\ Arsh\ z=Ln\left(z+\sqrt{z^2+1}\right), \qquad (9)$$

$$Arch\ z=Ln\left(z+\sqrt{z^2-1}\right),\ Arth\ z=\frac{1}{2}Ln\frac{1+z}{1-z},\ Arcth\ z=\frac{1}{2}Ln\frac{z+1}{z-1}. \qquad (10)$$

П р и м е р 13. Решить уравнение $\sin z=3$.

Р е ш е н и е. Множество решений уравнения определяется формулой (7): $z=Arc\sin 3=-iLn\left(i3+\sqrt{1-9}\right)=-iLn\left(i3\pm i2\sqrt{2}\right)$. Здесь мы учли, что при извлечении квадратного корня из комплексного числа получаются два разных значения. Для каждого из чисел $i\left(3+2\sqrt{2}\right)$ и $i\left(3-2\sqrt{2}\right)$ вычисляем логарифм по формуле (6) и записываем решения:

$$z_k=\begin{cases}-iLn\left(3+2\sqrt{2}\right)i=-i\,ln\left(3+2\sqrt{2}\right)+\pi/2+2k\pi,\\ -iLn\left(3-2\sqrt{2}\right)i=-i\,ln\left(3-2\sqrt{2}\right)+\pi/2+2k\pi\end{cases}$$

или $z_k=\pi/2+2k\pi-i\,ln\left(3\pm2\sqrt{2}\right)$, $k=0,\pm1,\ldots$.

П р и м е р 14. Решить уравнение $sh\,z+2ch\,z=i=3$.

Р е ш е н и е. Из формул (5) имеем: $\frac{1}{2}\left(e^z-e^{-z}\right)+2\cdot\frac{1}{2}\left(e^z+e^{-z}\right)=i$,

$3e^z+\frac{1}{e^z}-2i=0$, $3\left(e^z\right)^2-2ie^z+1=0$. Это квадратное уравнение относительно e^z имеет решения: $\left(e^z\right)_{1,2}=\frac{i+\sqrt{i^2-3}}{3}=\frac{1\pm2}{3}i$. Для каждого из полученных значений определяем решения исходного уравнения: а) $e^z=\frac{1+2}{3}i=i$ $\Rightarrow$

$z=Ln\,i=$

$=ln\,|\,i\,|+i(arg\,i+2k\pi)=ln1+i(\pi/2+2k\pi)=\pi/2+2k\pi$, $k=0,\pm1,\ldots$;

б) $e^z=\frac{1-2}{3}i=-\frac{1}{3}i$ $\Rightarrow$ $z=Ln\left(-\frac{1}{3}i\right)=ln\left|-\frac{1}{3}i\right|+i\left(arg\left(-\frac{1}{3}i\right)+2k\pi\right)=$

$=ln\frac{1}{3}+i\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)-ln3+i\frac{\pi}{2}(4k-1)$, $k=0,\pm1,\ldots$.

О т в е т. $z_k=\begin{cases}i\frac{\pi}{2}(4k+1),\\ -ln3+i\frac{\pi}{2}(4k+1),\end{cases}$ $k=0,\pm1,\ldots$.

18. *Обобщённые степенная и показательная* функции. Обобщённая степенная функция комплексного аргумента определяется так.

$z^a=e^{a\cdot Lnz}$, $a\in C$. (11)

Обобщённая показательная функция комплексного аргумента определяется так.

$a^z=e^{z\cdot Lna}$, $a\in C$. (12)

П р и м е р 15. Вычислить $(-2+i)^i$.

Р е ш е н и е. По формуле (11) находим $(-2+i)^i=e^{iLn(-2+i)}$. Вычисляем

$$Ln(-2+i)=ln\,|-2+i\,|+i\left(arg(-2+i)+2k\pi\right)=\left|\begin{matrix}|-2+i|=\sqrt{5}\\ arg(-2+i)=\pi-arctg(1/2)\end{matrix}\right|=$$

$$=ln\sqrt{5}+i\left(\pi-arctg\left(\frac{1}{2}\right)+2k\pi\right)=\frac{1}{2}ln5+i\left(\pi(2k+1)-arctg\left(\frac{1}{2}\right)\right).$$ Тогда

$$(-2+i)^i=e^{i\frac{1}{2}ln5-\left(\pi(2k+1)-arctg\left(\frac{1}{2}\right)\right)}=e^{i\frac{1}{2}ln5}e^{-\left(\pi(2k+1)-arctg\left(\frac{1}{2}\right)\right)}=|\,\textit{из формулы (3)}\,|=$$

$$=e^{-\left(\pi(2k+1)-arctg\left(\frac{1}{2}\right)\right)}\left(cos\frac{ln5}{2}+i\,sin\frac{ln5}{2}\right),\ k=0,\pm1,\ldots.$$

Упражнения

1. Выделить действительную и мнимую часть функции.

а) $w=\frac{1}{z}$; б) $w=e^{z^2}$; в) $w=ch(z-i)$.

Ответы: а) $u=\frac{x}{x^2+y^2}$, $v=\frac{y}{x^2+y^2}$; б) $u=e^{x^2-y^2}cos2xy$, $v=e^{x^2-y^2}sin2xy$;

в) $u=chx\cdot cos(y-1)$, $v=shx\cdot sin(y-1)$

2. Найти значения функций: а) 3^{2+i}; б) $(1-i)^{3-3i}$; в) $Arc\,sin\,i$; г) $Arth\,i$.

Ответы: а) $e^{2ln3-2k\pi}(cos\,ln3+i\,sin\,ln3)$; б) $2^{\frac{3}{2}\left(2k\pi-\frac{\pi}{2}\right)-3\left(\frac{\pi}{4}+ln2-2k\pi\right)i}$;

в) $k\pi-i\,ln\left(\sqrt{2}-(-1)^k\right)$; г) $\left(k+\frac{1}{4}\right)\pi i$.

4. Понятия предела и непрерывности функции. Дифференцирование функции комплексной переменной. Аналитические функции

19. Пусть функция $f(z)$ определена и однозначна в некоторой проколотой окрестности точки z_0. Рассмотрим различные последовательности $\{z_n\}$ точек этой окрестности, сходящиеся к точке z_0, и соответствующие им последовательности функций $\{f(z_n)\}$. Если независимо от выбора последовательности $\{z_n\}$ существует единственный предел $\lim\limits_{z_n\to z_0} f(z_n)=w_0$, то этот предел называется *пределом функции* $f(z)$ в точке z_0, что записывается в виде $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=w_0$.

Это определение эквивалентно следующему: число w_0 называется пределом функции $f(z)$ в точке z_0, если для любой ε-окрестности точки w_0 существует такая проколотая δ-окрестность точки z_0, что для всех точек из проколотой δ-окрестности точки z_0 соответствующие точки $f(z)$ лежат в ε-окрестности точки w_0. Важно понимать, что функция стремится к своему пределу независимо от способа приближения точки z к z_0.

Из определения предела функции следует, что из существования $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=w_0$, где $z=x+iy$, $z_0=x_0+iy_0$, $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, $w_0=u_0+iv_0$, следует существование пределов $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=u_0$ и $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=v_0$. Это соответствие приводит к тому, что основные свойства предела для функций действительной переменной сохраняются и для функций комплексной переменной.

20. Функция $f(z)$ называется *непрерывной в точке* z_0, если она определена в некоторой окрестности z_0 и $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$. Для непрерывности функции $f(z)$ в точке z_0 необходимо и достаточно, чтобы функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ были непрерывными в точке (x_0,y_0). Функция $f(z)$ называется *непрерывной в области* D, если она непрерывна во всех точках области D.

21. Пусть $f(z)$ функция комплексной переменной определена и однозначна в некоторой окрестности z_0 и существует предел $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = f'(z_0)$. Тогда этот предел называется *производной функции* $f(z)$ *в точке* z_0, а сама функция $f(z)$ называется *дифференцируемой* в точке z_0.

22. Независимость предела от способа приближения Δz к нулю накладывает на дифференцируемость функции более сильные ограничения, чем аналогичные требования для функции действительной переменной. Эти требования выражаются условиями Коши - Римана.

Т е о р е м а. **Пусть функция $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ определена в некоторой окрестности точки z, причём в этой точке функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ дифференцируемы. Тогда для дифференцируемости функции $f(z)$ в точке z необходимо и достаточно, чтобы в этой точке выполнялись условия Коши - Римана:**

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \qquad (1)$$

С учётом условий Коши - Римана производную функции $f(z)$ можно представить в следующих эквивалентных формах:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}. \qquad (2)$$

Так как основные теоремы о пределах сохраняются для функций комплексной переменной, а определение производной функции комплексной переменной не отличается от соответствующего определения для функции действительной переменной, то известные правила дифференцирования сумм, произведений, частного и сложной функции остаются справедливыми и в случае функции комплексной переменной.

23. Функция $f(z)$, дифференцируемая во всех точках области D, называется *аналитической* в этой области. Сформулируем <u>основные свойства аналитических функций</u>.

1) Если $f_1(z)$ и $f_2(z)$ аналитические функции в области D, то их сумма и произведение также аналитические функции в области D, а функция $f_1(z)/f_2(z)$ является аналитической функцией всюду, где $f_2(z) \neq 0$.

2) Если $w = f(z)$ аналитическая функция в области D комплексной плоскости z, причём в области её значений G на плоскости w определена аналитическая функция $\varsigma = g(w)$, то функция $\varsigma = g\big(f(z)\big)$ является аналитической функцией комплексной переменной z в области D.

3) Если в области D определена аналитическая функция $f(z)$, причём $|f'(z)| \neq 0$, то в области её значений G определена обратная функция $z = f^{-1}(w)$, являющаяся

аналитической функцией переменной w. При этом, если $w_0 = f(z_0)$, то $f'(z_0) = \dfrac{1}{\left(f^{-1}(z_0)\right)'}$.

П р и м е р 16. Выяснить, являются ли следующие функции аналитическими: а) $w = Im z$; б) $w = \bar{z}^2$; в) $w = z^2$; г) e^z.

Р е ш е н и е. а) Функция определена на всей комплексной плоскости. Пусть $z = x + iy$. Тогда $w = Im(x + iy) = y$. Отсюда $u(x, y) = y$, $v(x, y) = 0$. Находим частные производные: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 1$, $\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0$, $\dfrac{\partial v}{\partial y} = 0$. Проверяем условия Коши - Римана: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow 0 = 1 \Rightarrow$ пришли к противоречию, т.е. функция не дифференцируема (и тем более не аналитична) ни в одной точке комплексной плоскости.

б) Функция определена на всей комплексной плоскости. Пусть $z = x + iy$. Тогда $\bar{z} = x - iy$, $w = \bar{z}^2 = (x - iy)^2 = x^2 - y^2 - 2ixy$. Отсюда $u(x, y) = x^2 - y^2$, $v(x, y) = -2xy$. Находим частные производные: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -2y$, $\dfrac{\partial v}{\partial x} = -2y$, $\dfrac{\partial v}{\partial y} = -2x$. Проверяем условия Коши - Римана: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow 2x = -2x \Rightarrow x = 0$; $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow -2y = 2y \Rightarrow y = 0$. Таким образом, условия Коши - Римана выполняются только в точке $z = 0$, т.е. только в этой точке функция дифференцируема и поэтому нигде не является аналитической.

в) Функция определена на всей комплексной плоскости. Пусть $z = x + iy$. Тогда $w = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$. Отсюда $u(x, y) = x^2 - y^2$, $v(x, y) = 2xy$. Находим частные производные: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -2y$, $\dfrac{\partial v}{\partial x} = 2y$, $\dfrac{\partial v}{\partial y} = 2x$. Проверяем условия Коши - Римана: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow 2x = 2x \Rightarrow$ равенство верно при любом x; $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow -2y = -2y \Rightarrow$ равенство верно при любом y. Таким образом, функция является аналитической на всей комплексной плоскости. Найдём её производную: $(z^2)' = |\text{\textit{по формуле из}}\ (2)| = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x} = 2x + i2y = 2(x + iy) = 2z$, что совпадает с производной от аналогичной функции действительной переменной.

г) Пусть $z = x + iy$. По формуле (2) п.13 находим: $e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$. Поэтому $u(x, y) = e^x \cos y$, $v(x, y) = e^x \sin y$. Находим частные производные:

$\dfrac{\partial u}{\partial x}=e^x\cos y$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-e^x\sin y$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}=e^x\sin y$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}=e^x\cos y$. Проверяя условия Коши - Римана, убеждаемся в их выполнении на всей комплексной плоскости. Вычислим производную:

$$(e^z)'=|\text{по формуле из }(2)|=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=e^x\cos y+ie^x\sin y=$$

$=e^x(\cos y+i\sin y)=e^z$, что совпадает с производной от аналогичной функции действительной переменной.

24. В рассмотренном примере доказано, что функция $w=e^z$ является аналитической на всей комплексной плоскости. Из свойств аналитических функций (п.23) и определений элементарных функций (параграф 3) следует, что все элементарные функции в области их определения являются аналитическими функциями.

П р и м е р 17. Известно, что аналитическая функция $f(z)$ имеет мнимую часть равную $v=2xy-2y$, причём $f(0)=1$. Требуется восстановить эту функцию.

Р е ш е н и е. Так как по условию функция $f(z)$ аналитическая, то для неё справедливы условия Коши - Римана (1). Находим $\dfrac{\partial v}{\partial x}=2y$ и $\dfrac{\partial v}{\partial y}=2x-2$. Из первого равенства (1) получим $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}=2x-2 \Rightarrow u=\int(2x-2)dx+g(y)$, где $g(y)$ - неизвестная функция одной переменной y. Интеграл равен

$u=x^2-2x+g(y)$ и $\dfrac{\partial u}{\partial y}=g'(y)$. Из второго равенства (1) получим

$g'(y)=\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}=-2y \Rightarrow g'(y)=-2y$ и $g(y)=-\int 2y\,dy=-y^2+C$, где C - произвольная постоянная. Итак, $u=x^2-2x-y^2+C$ и $f(z)=u+iv=$

$=x^2-2x-y^2+C+i(2xy-2y)$. Из условия $f(0)=1$ $\big(u(0,0)+iv(0,0)=1\big)$ находим C: $f(0)=\left(x^2-2x-y^2+C+i(2xy-2y)\right)_{\substack{x=0\\y=0}}=C=1$. Таким образом,

$$f(z)=x^2-2x-y^2+1+i(2xy-2y). \qquad (3)$$

Мы получили функцию f в переменных x,y. Чтобы записать её как функцию аргумента z, воспользуемся соотношениями:

$$x=\frac{z+\bar z}{2},\ y=\frac{z-\bar z}{2i}. \qquad (4)$$

(Формулы (4) выводятся из равенств $z=x+iy$ и $\bar z=x-iy$). Подставляя (4) в (3), получим

$$f(z)=\frac{(z+\bar z)^2}{4}-(z+\bar z)-\frac{(z-\bar z)^2}{4i^2}+1+i\left(2\frac{(z+\bar z)}{2}\frac{(z-\bar z)}{2i}-2\frac{(z-\bar z)}{2i}\right)=$$

$$= \frac{z^2 + \overline{z}^2}{2} - z + 1 + \frac{z^2 - \overline{z}^2}{2} - z + \overline{z} = z^2 - 2z + 1 = (z-1)^2.$$

О т в е т. $f(z) = (z-1)^2$.

Упражнения

Пользуясь условиями Коши - Римана, выяснить, какие из следующих функций являются аналитическими, а какие нет:

а) $w = z^2\overline{z}$; б) $w = ze^z$; в) $w = |z|\overline{z}$.

Ответы: а) нет; б) да; в) нет.

5. Интегрирование функции комплексной переменной

5.1. Интегралы по кривой от функций комплексной переменной

25. Пусть C - кусочно-гладкая ориентированная кривая, a и b - её начальная и конечная точки, соответственно. Пусть в каждой точке z кривой C определена функция $f(z)$. Последовательными точками $a = z_0$, z_1, …, z_{i-1}, z_i, …, $z_n = b$ разобьем кривую на n частичных дуг и обозначим $\Delta z_i = z_i - z_{i-1}$; выберем на каждой из частичных дуг произвольную точку ξ_i и в каждой такой точке вычислим значение функции $f(\xi_i)$; составим сумму $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta z_i$; пусть $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} |\Delta z_i|$, где $|\Delta z_i|$ длина i-ой частичной дуги.

Если существует $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta z_i$, не зависящий ни от способа разбиения кривой C, ни от выбора точек ξ_i, то этот предел называется *интегралом от функции* $f(z)$ *по кривой* C и обозначается $\int\limits_C f(z)dz$.

Если C - кусочно-гладкая кривая, а $f(z)$ кусочно-непрерывная функция, то интеграл $\int\limits_C f(z)dz$ существует. Доказательство основано на известной из анализа теореме существования криволинейного интеграла второго рода. Если представить $z = x + iy$, $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, то интеграл $\int\limits_C f(z)dz$ можно свести к виду

$$\int\limits_C f(z)dz = \int\limits_C udx - vdy + i\int\limits_C udy + vdx, \qquad (1)$$

где в правой части стоят два криволинейных интеграла второго рода. Таким образом, вычисление интеграла от комплексной переменной сводится к вычислению двух криволинейных интеграла второго рода от действительной переменной. Всё это означает, что интеграл (1) существует и в случае, когда $f(z)$ неаналитическая функция.

26. Основные свойства криволинейного интеграла.

а) $\int\limits_C f(z)dz = -\int\limits_{C^-} f(z)dz$, где C^- обозначает кривую C, ориентированную в противоположном направлении;

б) $\int\limits_{C_1+C_2} f(z)dz = \int\limits_{C_1} f(z)dz + \int\limits_{C_2} f(z)dz$;

в) $\int\limits_C \big(af(z)+bg(z)\big)dz = a\int\limits_C f(z)dz + b\int\limits_C g(z)dz$, где a и b - постоянные.

27. Вычисления криволинейного интеграла рассмотрим на примерах.

П р и м е р 18. Вычислить $\int\limits_C \bar{z}^2 dz$, где C: а) дуга окружности радиуса R с центром в начале координат, расположенная в первой четверти; б) хорда, соединяющая концы кривой из а); направление обхода кривых в обоих случаях показано на рис. 9.

Р е ш е н и е. а) Первый способ. Запишем уравнение окружности в параметрическом виде:

$$x = R\cos t,\ y = R\sin t,\ t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]. \qquad (2)$$

Чтобы вычислить интеграл $\int\limits_C \bar{z}^2 dz$, сначала преобразуем его в криволинейный интеграл от действительных переменных: Пусть $z = x + iy$. Тогда $dz = dx + idy$, $\bar{z}^2 = (x - iy)^2$ и $\bar{z}^2 dz = (x-iy)^2(dx+idy) = \left(x^2 - y^2 - 2ixy\right)(dx+idy) =$

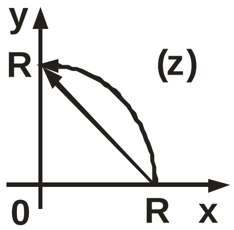


Рис. 9.

$= \left(x^2 - y^2\right)dx + 2xydy + i\left(\left(x^2-y^2\right)dy - 2xydx\right)$. Подставляем в интеграл

$$\int\limits_C \bar{z}^2 dz = \int\limits_C \left(x^2 - y^2\right)dx + 2xydy + i\int\limits_C \left(x^2 - y^2\right)dy - 2xydx. \qquad (3)$$

Далее следуем по тому же алгоритму, что и при вычислении криволинейного интеграла от функции действительной переменной: из (2) следует $dx = -R\sin t dt$, $dy = R\cos t dt$; подставляем в подынтегральное выражение вместо dx и dy эти дифференциалы а вместо переменных x и y уравнения (2) и преобразуем криволинейный интеграл (3) в определённый интеграл

$$\int_C \bar{z}^2 dz = \int_0^{\pi/2}\Big(R^2\big(\cos^2 t-\sin^2 t\big)(-R\sin t)dt + 2R^2\cos t\sin t\cdot R\cos t\cdot dt\Big)+$$

$$+i\int_0^{\pi/2}\Big(R^2\big(\cos^2 t-\sin^2 t\big)R\cos t dt - 2R^2\cos t\sin t(-R\sin t)dt\Big)=$$

$$=-R^3\int_0^{\pi/2}\cos 2t\sin t dt + 2R^3\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\sin t dt+$$

$$+iR^3\int_0^{\pi/2}\cos 2t\cos t dt + 2iR^3\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\cos t dt=$$

$$=\left|\begin{matrix}\sin t\cos 2t=\frac{1}{2}(\sin 3t-\sin t),\ \ \sin t dt = d(-\cos t),\\ \cos 2t\cos t=\frac{1}{2}(\cos 3t+\cos t),\ \ \cos t dt = d\sin t\end{matrix}\right|=$$

$$=-\frac{R^3}{2}\int_0^{\pi/2}(\sin 3t-\sin t)dt - 2R^3\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\cdot d(\cos t)+$$

$$+i\frac{R^3}{2}\int_0^{\pi/2}(\cos 3t-\cos t)dt + 2iR^3\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\cdot d(\sin t)=$$

$$=-\frac{R^3}{2}\left(-\frac{\cos 3t}{3}+\cos t\right)\Big|_0^{\pi/2} - 2R^3\frac{\cos^3 t}{3}\Big|_0^{\pi/2} + i\frac{R^3}{2}\left(-\frac{\sin 3t}{3}+\sin t\right)\Big|_0^{\pi/2}+$$

$$+2iR^3\frac{\sin^3 t}{3}\Big|_0^{\pi/2} = R^3(1+i).$$

<u>Второй способ</u>. Запишем уравнение окружности в комплексной форме:

$$z=x+iy=\left|\begin{matrix}\textit{подставляем вместо}\\ x,y\ \textit{уравнения}\ (2)\end{matrix}\right|=R(\cos t+i\sin t)=\left|\begin{matrix}\textit{применяемформулу}\\ \textit{Эйлера}\ (3)\ \textit{п.}13\end{matrix}\right|=$$

$=Re^{it}$. Аналогично, $\bar{z}=x-iy=Re^{-it}$ и $\bar{z}^2=R^2e^{-2it}$. Находим дифференциал $dz=i\,Re^{it}\,dt$ и, подставляя всё это в подынтегральное выражение, преобразуем криволинейный интеграл в определённый интеграл:

$$\int_C \bar{z}^2 dz=\int_0^{\pi/2}R^2e^{-2it}i\,Re^{it}\,dt=iR^3\int_0^{\pi/2}e^{-it}dt=iR^3\frac{e^{-it}}{-i}\Big|_0^{\pi/2}=-R^3\big(e^{-i\pi/2}-1\big)=R^3(1+i).$$

б) Составляем уравнение прямой, проходящей через точки $(R,0)$ и $(0,R)$:

$\dfrac{x-R}{-R}=\dfrac{y}{R}\ \Rightarrow\ y=R-x,\ x\in[R,0]$. Так как интеграл $\int_C \bar{z}^2 dz$ остался тем же, что и в случае а), то остаётся в силе и преобразование его от комплексной переменной к криволинейному интегралу от действительных переменных, т.е. имеет место (3). Подставляем уравнение прямой $y=R-x$ в (3) и, учитывая, что дифференциал от этого уравнения равен $dy = d(R-x) = -dx$, $x \in [R,0]$, находим

$$\int_C \overline{z}^2 dz =$$

$$= \int_R^0 \left(x^2-(R-x)^2\right)dx - 2\int_R^0 x(R-x)dx - i\int_R^0 \left(x^2-(R-x)^2\right)dx - 2i\int_R^0 x(R-x)dx =$$

$$= \int_R^0 \left(2x^2-R^2\right)dx + i\int_R^0 \left(2x^2-4xR+R^2\right)dx =$$

$$= \left(\frac{2x^3}{3}-R^2x\right)\Bigg|_R^0 + i\left(\frac{2x^3}{3}-2x^2R+R^2x\right)\Bigg|_R^0 = \frac{R^3}{3}(1+i).$$

Упражнения

Вычислить интегралы по заданным кривым

а) $\int_C (2z+1)\overline{z}dz$, $C:\ |z|=1$, $0 \le \arg z \le \pi$;

б) $\int_C e^{|z|^2} \operatorname{Re} z dz$, $C:\ y=x$, $0<x<1$;

в) $\int_C \operatorname{Re}(z+z^2)dz$, $C:\ y=2x^2$, $0<x<1$;

г) $\int_C \overline{z}e^z dz$, C - отрезок прямой от точки $z_1=1$ до точки $z_2=i$.

Ответы: а) $-4+i\pi$; б) $\frac{1}{4}(e^2-1)(1+i)$; в) $\frac{1}{30}-\frac{i}{3}$; г) $(2\sin 1-e)+i(1-2\cos 1)$.

5.2. Интегралы, не зависящие от пути интегрирования

28. Из математического анализа функции действительной переменной известно, что криволинейный интеграл второго рода $\int_C Pdx+Qdy$ не зависит от пути интегрирования, если выполняется условие

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}. \qquad (4)$$

Интеграл (1) не зависит от пути интегрирования, если не зависят от пути интегрирования интегралы $\int_C udx - vdy$ и $\int_C udy + vdx$. Для этих интегралов условие (4) равносильно выполнению условий Коши - Римана: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$. Функция, для которой во всех точках некоторой области выполняются условия Коши - Римана называется аналитической (п.23). Таким образом, имеет место

Т е о р е м а 1. **Если $f(z)$ аналитическая функция в односвязной области D, то для всех кривых C в этой области, имеющих общие концевые точки, интеграл $\int\limits_C f(z)dz$ имеет одно и то же значение.**

В силу этой теоремы для функций, аналитических в односвязной области, вместо $\int\limits_C f(\xi)d\xi$ можно писать $\int\limits_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi$, где z_0 и z - концевые точки кривой C. Если z_0 фиксированная точка, а z - переменная величина, то интеграл $\int\limits_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi$ является функцией z, т.е.

$$F(z)=\int\limits_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi. \tag{5}$$

Такой интеграл называется *интегралом с переменным верхним пределом*.

Т е о р е м а 2. **Если $f(z)$ аналитическая функция в односвязной области D, то интеграл с переменным верхним пределом (5) также является аналитической функцией в D, причём**

$$F'(z)=f(z). \tag{6}$$

Функция $F(z)$, для которой выполнено условие (6), называется *первообразной* для функции $f(z)$, а совокупность всех первообразных, т.е. $F(z)+C$, где C - произвольная постоянная, называется *неопределённым интегралом*. Методы нахождения неопределённых интегралов от аналитических функций точно такие же, как от функций действительной переменной. Например, $\int z^n dz=\dfrac{z^{n+1}}{n+1}+C$ или $\int \cos z dz=\sin z+C$. Справедлива и формула

$$\int\limits_{z_1}^{z_2} f(z)dz=F(z)\Big|_{z_1}^{z_2}=F(z_2)-F(z_1). \tag{7}$$

П р и м е р 19. Вычислить $\int\limits_C z^2dz$ по кривой а) из примера 18.

Р е ш е н и е. В примере 16 в) было показано, что функция $w=z^2$ является аналитической на всей комплексной плоскости. Поэтому интеграл $\int\limits_C z^2dz$ не зависит от вида кривой C, а определяется лишь концевыми точками. Кривая имеет начальную точку $z_1=R$ и конечную точку $z_2=iR$. По формуле (7) находим $\int\limits_C z^2dz=\int\limits_R^{iR} z^2dz=\dfrac{z^3}{3}\Big|_R^{iR}=\dfrac{R^3}{3}\left(i^3-1\right)=-\dfrac{R^3}{3}\left(1+i\right)$.

5.3. Интегралы по замкнутому контуру

29. Кусочно-гладкая замкнутая кривая, не имеющая точек самопересечения, называется *замкнутым контуром*, а интеграл $\int\limits_C z^2dz$ по замкнутому контуру часто называют *контурным* *интегралом* и обозначают $\oint\limits_C f(z)dz$. Так как значение контурного интеграла зависит от направления интегрирования, условимся в качестве *положительного направления обхода* принимать направление, при котором внутренняя область, ограниченная данным контуром, остаётся *слева* от направления движения. Интегрирование в отрицательном направлении будем обозначать $\oint\limits_{C^-} f(z)dz$.

Т е о р е м а 1. Теорема Коши для односвязной области. **Если $f(z)$ аналитическая функция в односвязной области D, то для любого замкнутого контура C, лежащего в D, справедливо равенство $\oint\limits_C f(z)dz = 0$.**

Т е о р е м а 2. Теорема Коши для многосвязной области. **Пусть $f(z)$ является аналитической функцией в многосвязной области D, ограниченной извне контуром C_0, а изнутри контурами C_1, C_2,..., C_n, и пусть $f(z)$ непрерывна в замкнутой области $\bar{D}$. Тогда $\oint\limits_C f(z)dz = 0$, где C - полная граница области D, состоящая из C_0, C_1, C_2,..., C_n, причём обход границы C происходит в положительном направлении** (рис. 10)**.**

С л е д с т в и е 1. **При выполнении условий теоремы 3 интеграл по внешнему контуру равен сумме интегралов по всем внутренним контурам при условии, что обход по всем контурам происходит в одном направлении** (рис. 11):

$$\oint\limits_C f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \oint\limits_{C_k^-} f(z)dz.$$

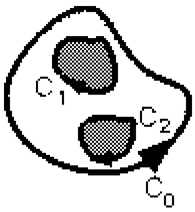


Рис. 10.

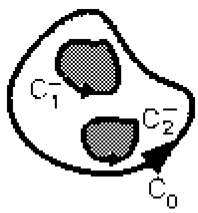


Рис. 11.

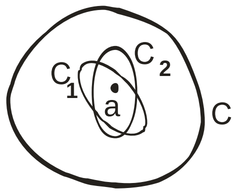


Рис. 12.

С л е д с т в и е 2. **Если $f(z)$ - аналитическая функция в односвязной области D и на её границе, за исключением точки $a \in D$, то интеграл по различным замкнутым контурам, которые лежат в D и ограничивают область, содержащую точку a, равны между собой** (рис. 12).

5.3.1. Интеграл Коши

Т е о р е м а 3. **Пусть $f(z)$ является аналитической функцией в области D и непрерывна в замкнутой области $\bar{D}$. Тогда для любой точки $z \in D$ справедлива формула Коши:**

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi. \qquad (8)$$

где C - граница области D, обходимая в положительном направлении.

Т е о р е м а 4. **Пусть $f(z)$ является аналитической функцией в области D и непрерывна в замкнутой области $\bar{D}$. Тогда во всех внутренних точках области D существует производная любого порядка функции $f(z)$, причём справедлива формула:**

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}d\xi, \qquad (9)$$

где C - граница области D, обходимая в положительном направлении.

П р и м е р 20. Вычислить $\oint_C\frac{e^z dz}{z(z-3)^2}$, где контур C: а) $|z+2|=1$; б) $|z-2|=2$; в) $|z|=4$.

Р е ш е н и е. Во всех трёх случаях контур C - это окружности (см. пример 5 а)).

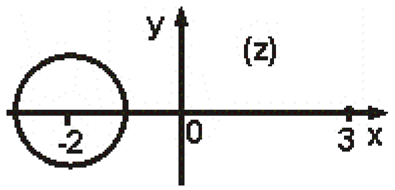


Рис. 13.

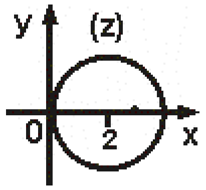


Рис. 14.

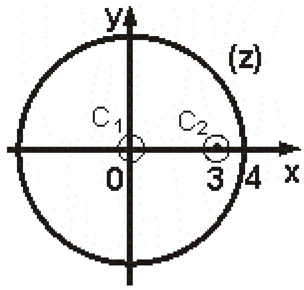


Рис. 15.

Знаменатель подынтегральной функции $z(z-3)^2$ равен нулю в точках $z=0$ (простой нуль) и $z=3$ (нуль второго порядка или корень кратности 2).

а) C: $|z+2|=1$ - это окружность радиуса 1 с центром в точке (-2, 0) (рис. 13). Ни один из нулей не попал в область, ограниченную контуром C. Поэтому функция $\frac{e^z}{z(z-3)^2}$ - аналитическая в этой области и по теореме 1 $\oint_C\frac{e^z dz}{z(z-3)^2}=0$.

б) C: $|z-2|=2$ - это окружность радиуса 2 с центром в точке (2, 0) (рис. 14). Внутри круга находится точка $z=3$. Поэтому приводим подынтегральную функцию $\frac{e^z}{z(z-3)^2}$ к виду подынтегральной функции (9):

$\frac{e^z}{z(z-3)^2}=\frac{e^z/z}{(z-3)^2}=\frac{f(z)}{(z-3)^2}$, где $f(z)=\frac{e^z}{z}$ - функция, аналитическая внутри данного круга. По формуле (9) $\oint_C\frac{e^z/z}{(z-3)^2}dz=\frac{2\pi i}{1!}\frac{d}{dz}\left(\frac{e^z}{z}\right)\Bigg|_{z=3}=$

$$=2\pi i\frac{e^z z-e^z}{z^2}\Bigg|_{z=3}=i\frac{4e^3}{9}.$$

в) C: $|z|=4$ - это окружность радиуса 4 с центром в точке (0, 0) (рис. 15). Внутри круга находятся обе точки $z=0$ и $z=3$. По следствиям 1 и 2 из теоремы

2 пишем: $\oint\limits_{C}\frac{e^z dz}{z(z-3)^2}=\oint\limits_{C_1}\frac{e^z dz}{z(z-3)^2}+\oint\limits_{C_2}\frac{e^z dz}{z(z-3)^2}$, где C_1 и C_2 границы непересекающихся окрестностей точек $z=0$ и $z=3$, соответственно. Вычисляем:

$$\oint\limits_{C_1}\frac{e^z dz}{z(z-3)^2}=\oint\limits_{C_1}\frac{e^z/(z-3)^2}{z}dz=\left|\begin{matrix}e^z/(z-3)^2\ \text{аналитична}\\ \text{внутри } C_1\end{matrix}\right|=2\pi i\left.\frac{e^z}{(z-3)^2}\right|_{z=0}=\frac{2\pi i}{9}.$$

Интеграл $\oint\limits_{C_2}\frac{e^z dz}{z(z-3)^2}=\oint\limits_{C_2}\frac{e^z/z}{(z-3)^2}dz$ вычислен в б) и равен $i\frac{4e^3}{9}$. Окончательно получаем $\oint\limits_{C}\frac{e^z dz}{z(z-3)^2}=\oint\limits_{C_1}\frac{e^z dz}{z(z-3)^2}+\oint\limits_{C_2}\frac{e^z dz}{z(z-3)^2}=\frac{2\pi i}{9}+\frac{4e^3 i}{9}=\frac{2\pi i}{9}\left(1+2e^3\right)$.

П р и м е р 21. Вычислить $\oint\limits_{C}\frac{\cos z}{z^4+4z^2}dz$, где контур C: а) $|z+2i|=1$;

б) $|z-1-i|=2$.

Р е ш е н и е. Находим корни знаменателя подынтегральной функции: $z^4+4z^2=z^2\left(z^2+4\right)=z^2(z+2i)(z-2i)=0 \Rightarrow z^2=0$, $z^2+4=0 \Rightarrow z=0$ (нуль второго порядка или корень кратности 2) и $z=\pm 2i$ - простые нули.

а) $C:|z+2i|=1$ - это окружность радиуса 1 с центром в точке (0, -2) (рис. 16). Внутри круга находится корень $z=-2i$. Приводим подынтегральную функцию $\frac{\cos z}{z^4+4z^2}=\frac{\cos z}{z^2(z+2i)(z-2i)}$ к виду подынтегральной функции (8):

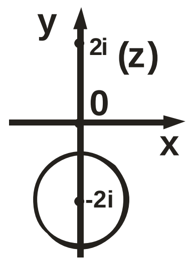


Рис. 16.

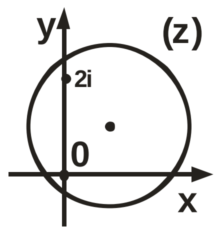


Рис. 17.

$\frac{\cos z}{z^2(z+2i)(z-2i)}=\frac{\frac{\cos z}{z^2(z-2i)}}{(z+2i)}$. Функция $f(z)=\frac{\cos z}{z^2(z-2i)}$ аналитическая внутри круга, поэтому из (8) находим $\oint\limits_{C}\frac{\cos z}{z^4+4z^2}dz=\oint\limits_{C}\frac{\frac{\cos z}{z^2(z-2i)}}{(z+2i)}dz=$

$$=2\pi i\left.\frac{\cos z}{z^2(z-2i)}\right|_{z=-2i}=\frac{\pi}{8}\cos 2i=\left|\begin{matrix}\text{формула } (5')\\ \text{из п.}15\end{matrix}\right|=\frac{\pi}{8}\operatorname{ch}2.$$

б) $C: |z-1-i|=2$ - это окружность радиуса 2 с центром в точке (1, 1) (рис. 17). Внутри круга находятся корни знаменателя $z=2i$ и $z=0$. По следствию из теоремы 2 пишем: $\oint\limits_C \frac{\cos z}{z^4+4z^2}dz = \oint\limits_{C_1}\frac{\cos z}{z^2(z^2+4)}dz + \oint\limits_{C_2}\frac{\cos z}{z^2(z+2i)(z-2i)}dz$, где C_1 и C_2 границы непересекающихся окрестностей точек $z=0$ и $z=2i$, соответственно. Вычисляем:

$$\oint\limits_{C_1}\frac{\cos z}{z^2(z+2i)(z-2i)}dz = \oint\limits_{C_1}\frac{\frac{\cos z}{(z^2+4)}}{z^2}dz = |\,формула\ (9)\,| = 2\pi i\left(\frac{\cos z}{(z^2+4)}\right)'\Bigg|_{z=0} =$$

$$= 2\pi i\frac{(z^2+4)\sin z - 2z\sin z}{(z^2+4)^2}\Bigg|_{z=0} = 0.$$

$$\oint\limits_{C_2}\frac{\cos z}{z^2(z+2i)(z-2i)}dz = \oint\limits_{C_2}\frac{\frac{\cos z}{z^2(z+2i)}}{(z-2i)}dz = |\,формула\ (8)\,| = 2\pi i\frac{\cos z}{z^2(z+2i)}\Bigg|_{z=2i} =$$

$= -\frac{\pi}{8}ch2$. Таким образом, $\oint\limits_C\frac{\cos z}{z^4+4z^2}dz = -\frac{\pi}{8}ch2$.

Упражнения

Вычислите с помощью интеграла Коши

а) $\oint\limits_{|z-2|=2}\frac{chz}{z^4-1}dz$; б) $\oint\limits_{|z|=4}\frac{dz}{(z^2+9)(z+9)}$; в) $\oint\limits_{|z-2|=2}\frac{\sin z\cdot\sin(z-1)}{z^2-z}dz$;

г) $\oint\limits_{|z|=1/2}\frac{1}{z^3}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{z+1}\right)dz$.

Ответы: а) $\frac{\pi i}{2}ch1$; б) $-\frac{\pi i}{45}$; в) 0; г) $-\frac{\pi^2}{2}sh1$.

6. Ряды

6.1. Степенные ряды

30. Основные понятия, связанные с рядами в комплексной области, вводятся также как и в действительной области. Выражение вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k = z_1 + z_2 + \ldots + z_k + \ldots, \qquad (1)$$

где $\{z_n\}$ - заданная числовая последовательность с комплексными членами, называется *числовым рядом* с комплексными членами. Ряд (1) называется *сходящимся*, если сходится последовательность $\{S_n\}$ его частичных сумм, где $S_n = \sum_{k=1}^{n} z_k = z_1 + z_2 + \ldots + z_n$. При этом предел S последовательности $\{S_n\}$ называется *суммой ряда* (1). Если сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |z_n|$, то сходится и ряд (1), который в этом случае называется *абсолютно сходящимся*. Наиболее употребляемым способом исследования сходимости ряда является рассмотрение ряда с действительными членами, составленными из модулей членов исходного ряда. Такие ряды исследуются достаточными признаками сходимости ряда с положительными членами (признаки Даламбера, Коши).

31. Ряд, членами которого являются функции $u_n(z)$ комплексной переменной z, определённые в области D комплексной плоскости и принадлежащие последовательности $\{u_n(z)\}$, называется *функциональным рядом* в комплексной плоскости и обозначается

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) = u_1(z) + u_2(z) + \ldots + u_n(z) + \ldots . \qquad (2)$$

Ряд (2) называется *сходящимся* в области D, если при любом $z \in D$ соответствующий ему числовой ряд сходится. Если ряд (2) сходится в области D, то в этой области можно определить однозначную функцию $f(z)$, значение которой в каждой точке области D равно сумме соответствующего числового ряда. Эта функция называется *суммой ряда* (2) в области D. Область D называется областью сходимости ряда (2).

32. Степенным рядом называется функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n = c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 \ldots + c_n(z-z_0)^n + \ldots \qquad (3)$$

Т е о р е м а Абеля. **Если ряд (3) сходится в точке $z_1 \neq z_0$, то он абсолютно сходится и в любой точке z, для которого $|z-z_0| < |z_1 - z_0|$.**

С л е д с т в и е 1. **Если степенной ряд (3) расходится в некоторой точке z_1, то он расходится во всех точках, удовлетворяющих неравенству $|z-z_0| > |z_1-z_0|$.**

С л е д с т в и е 2. **Существует такое число R, что в области $|z-z_0| < R$ степенной ряд (3) сходится, а вне этой области расходится.** Область $|z-z_0| < R$ называется *кругом сходимости* ряда (3), а число R - его *радиусом сходимости*.

С л е д с т в и е 3. **Внутри круга сходимости степенной ряд сходится к аналитической функции.**

С л е д с т в и е 4. **Степенной ряд внутри круга сходимости можно почленно интегрировать и дифференцировать любое число раз, причём радиус сходимости полученных рядов равен радиусу сходимости исходного ряда.**

Т е о р е м а Тейлора. **Функция $f(z)$, аналитическая внутри круга $|z-z_0| < R$ может быть представлена в этом круге сходящемся степенным рядом**

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n , \qquad (4)$$

причём этот ряд определён однозначно.

Коэффициенты c_n ряда (4) вычисляются по формуле

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz , \qquad (5)$$

Разложение функции $f(z)$, аналитической в круге $|z-z_0|<R$, в сходящийся степенной ряд (4) называется *разложением Тейлора*, а сам ряд (4) - *рядом Тейлора*. В приложении 1 приведены ряды Тейлора в точке $z_0=0$ для основных элементарных функций.

П р и м е р 22. Разложить функцию $f(z)=\dfrac{1}{z}$ в ряд Тейлора по степеням $(z+2)$ (или, что то же самое, в окрестности точки $z_0=-2$).

Р е ш е н и е. Функция определена всюду, кроме точки $z=0$. Ищем решение задачи, используя ряды из приложения 1. Для этого преобразуем функцию так, чтобы она соответствовала функции (7) приложения 1:

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{(z+2)-2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\left(\dfrac{z+2}{2}\right)}=\left|\begin{array}{l}\textit{замена}\\ (z+2)/2=w\end{array}\right|=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-w}=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\textit{формула (7)}\\ \textit{приложения 1}\end{array}\right|=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}w^n=\left|\begin{array}{l}\textit{возвращаемся к}\\ \textit{исходной переменной}\end{array}\right|=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+2)^n}{2^n}.$$

Так как область сходимости "табличного" ряда - круг $|w|<1$, то $\left|\dfrac{z+2}{2}\right|<1 \Rightarrow$ $|z+2|<2$. Таким образом, полученный ряд сходится в круге радиуса $R=2$ с центром в точке $z_0=-2$, что соответствует поставленной задаче - разложить по степеням $(z+2)$.

З а м е ч а н и е. Теорема Тейлора устанавливает взаимно однозначное соответствие между функцией, аналитической в окрестности точки z_0, и степенным рядом с центром в этой точке, т.е. понятие аналитической функции, как имеющей производные всех порядков, и функции, представимой в виде степенного ряда, эквивалентны.

33. Пусть функция $f(z)$ задана в области D, ограниченной контуром C. Точка $z_0\in\bar{D}$ называется *правильной точкой функции* $f(z)$, если существует сходящийся степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$, который в общей части области D и своего круга сходимости $|z-z_0|<R(z_0)$, где $R>0$, сходится к функции $f(z)$ (рис. 18). Точки $z\in\bar{D}$, не являющиеся правильными точками функции $f(z)$, называются её *особыми точками*. Если $f(z)$ - аналитическая в области D, то все внутренние точки этой области являются правильными точками функции $f(z)$. Точки границы C могут быть как правильными, так и особыми точками аналитической функции $f(z)$. Все точки границы C, лежащие внутри круга $|z-z_0|<R(z_0)$ с центром в некоторой правильной точке $z_0\in\bar{D}$, также являются правильными точками функции $f(z)$.

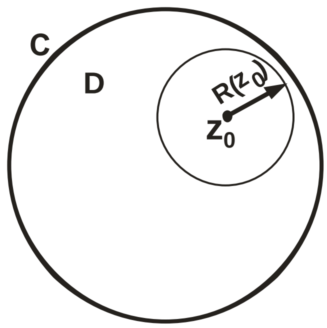


Рис. 18.

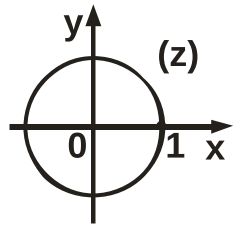


Рис. 19.

Например, из формулы (7) приложения 1 следует, что ряд $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ сходится внутри круга $|z|<1$ к аналитической функции $f(z)=\frac{1}{1-z}$ (рис. 19). Всюду вне круга $|z|<1$ ряд расходится. Можно показать, что все точки границы, за исключением точки $z=1$ - правильные точки и единственной особой точкой этой функции является точка $z=1$.

Т е о р е м а. **На границе круга сходимости степенного ряда лежит хотя бы одна особая точка аналитической функции, к которой сходится данный ряд.**

С л е д с т в и е. **Радиус круга сходимости степенного ряда определяется расстоянием от центра сходимости до ближайшей особой точки.**

Упражнения

Следующие функции разложить в ряд Тейлора, применяя ряды для элементарных функций, и найти радиусы сходимости полученных рядов.

а) $\sin(2z+1)$ по степеням $(z+1)$; б) $\frac{z+1}{z^2+4z-5}$ по степеням z (указание: разложить на сумму простых дробей).

Ответы: а) $\sin 1\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n}}{(2n)!}(z+1)^{2n}+\cos 1\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!}(z+1)^{2n+1}$, $R=\infty$; б) $-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{2(-1)^n}{5^{n+1}}\right)z^n$, $R=1$.

6.2. Ряды Лорана

34. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n=\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-z_0)^n+\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n=$$

$$=\ldots+\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}+\ldots+\frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2}+\frac{c_{-1}}{z-z_0}+c_0+c_1(z-z_0)+\ldots+c_n(z-z_0)^n+\ldots. \quad (1)$$

Ряд (1) называется *рядом Лорана*. Совокупность членов ряда с неотрицательными степенями - $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ называется *правильной частью ряда Лорана*; члены с отрицательными степенями - $\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-z_0)^n$ или $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}$ называются *главной частью ряда Лорана*. Найдём область сходимости этого ряда. Очевидно областью сходимости ряда (1) будет общая часть областей сходимости рядов $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ и $\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}$.

Область сходимости первого ряда - круг радиуса R с центром в точке z_0. Внутри круга сходимости этот ряд сходится к некоторой аналитической функции

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n, \ |z-z_0| < R. \qquad (2)$$

Для определения области сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}$ введём новую переменную $\xi = \frac{1}{z-z_0}$. Тогда получим степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \xi^n$, сходящийся внутри своего круга сходимости к некоторой аналитической функции $f_2(\xi)$. Пусть его радиус сходимости равен $1/r$, т.е.

$$f_2(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \xi^n, \ |\xi| < 1/r \qquad (3)$$

или в исходной переменной

$$f_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}, \ |z-z_0| > r$$

Если $r < R$, то общая область сходимости рядов (2) и (3) - *круговое кольцо* $r < |z-z_0| < R$ (рис. 19), в котором ряд (1) сходится к аналитической функции

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}, \ r < |z-z_0| < R.$$

Так как ряды (2) и (3) являются обычными степенными рядами, то в указанной области функция $f(z)$ обладает всеми свойствами суммы степенного ряда. Это означает, что ряд Лорана (1) сходится внутри своего кольца сходимости к функции $f(z)$ аналитической в данном кольце (рис. 20).

Т е о р е м а 1. **Функция $f(z)$, аналитическая в кольце $r < |z-z_0| < R$, представляется рядом (1), т.е. имеет место равенство**

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n.$$

Коэффициенты ряда вычисляются по формулам

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}, \ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \qquad (4)$$

где C - произвольный контур, лежащий внутри кольца $r < |z-z_0| < R$.

35. При $r=0$ получим круг с выколотым центром. Это частный случай кольца (вырожденное кольцо) $0<|z-z_0|<R$. В этом случае имеем разложение функции $f(z)$ в окрестности особой точки.

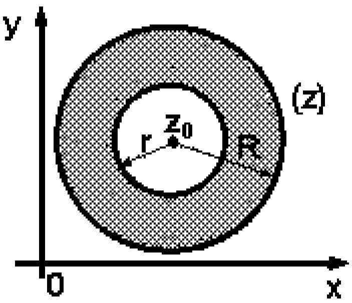


Рис. 20.

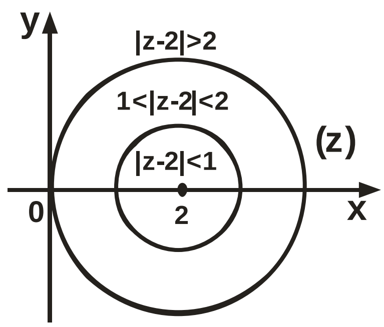


Рис. 21.

З а м е ч а н и я. 1. На границах кольца сходимости ряда Лорана имеется хотя бы по одной особой точке функции $f(z)$ - его суммы, что является следствием теоремы п. 33..

2. Поскольку вычисление коэффициентов по формуле (4) - трудоёмкий процесс, то при разложении функции $f(z)$ в ряд Лорана, по возможности, используются ряды Тейлора элементарных функций (приложение 1).

П р и м е р 23. Разложить функцию $f(z)=\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{z-1}$ в ряд Лорана по степеням $(z-2)$ (или, что то же самое, в окрестности точки $z_0=2$).

Р е ш е н и е. Точки $z=0$ и $z=1$, в которых знаменатель функции обращается в нуль, являются особыми точками функции $f(z)$; точка $z=2$ - правильная точка, так как в ней функция аналитическая. Наносим эти три точки на комплексную плоскость. На основании теоремы и следствия из неё п.33 строим две концентрические окружности с центрами в точке $z_0=2$ и радиусами равными расстояниями от этого центра до особых точек, т.е. $r=2-1=1$ и $R=2-0=2$. В результате комплексная плоскость разбивается на три области: круг $|z-2|<1$, кольцо $1<|z-2|<2$ и внешняя область кольца $|z-2|>2$ (рис. 21). Рассмотрим разложение функции в каждой из этих областей.

а) В круге $|z-2|<1$ функция аналитическая. Первое слагаемое:

$$\frac{1}{z}=\left|\begin{array}{l}\textit{т.к. разложение проводится в точке } z=2,\\ \textit{выделяем в знаменателе выражение } (z-2)\end{array}\right|=\frac{1}{(z-2)+2}=$$

$$=\left|\begin{array}{c}\textit{сводим к функции (8) приложения 1;}\\ \textit{чтобы получить ряд для } \dfrac{1}{1+w},\ |w|<1, \textit{ в знаменателе}\\ \textit{выносим слагаемое бо́льшее по модулю в этой области}\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\left(\dfrac{z-2}{2}\right)}=\left|\frac{z-2}{2}=w\right|=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+w}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n w^n=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-2}{2}\right)^n=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-2)^n}{2^{n+1}}$$; ряд сходится при $\left|\frac{z-2}{2}\right|<1$ или $|z-2|<2$.

Аналогичные операции осуществляем со вторым слагаемым: $\frac{1}{z-1}=\frac{1}{(z-2)+1}=\frac{1}{1+(z-2)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^n$ и область сходимости $|z-2|<1$. В результате, складывая найденные разложения, получим

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-2)^n}{2^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^n\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right);$$

из двух областей сходимости каждого из слагаемых: $|z-2|<2$ и $|z-2|<1$ - выбираем меньшую: $|z-2|<1$, которая и будет областью сходимости всего ряда.

б) В кольце $1<|z-2|<2$ функция $f(z)$ аналитическая; ряд для первого слагаемого остается справедливым и в этом случае, так как он сходится в круге $|z-2|<2$, а значит и в кольце $1<|z-2|<2$; второе слагаемое:

$$\frac{1}{z-1}=\frac{1}{(z-2)+1}=\left|\begin{array}{c}\textbf{\textit{чтобы свести к ряду (8)}}\\ \textbf{\textit{приложения 1, выносим}}\ (z-2)\end{array}\right|=\frac{1}{z-2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z-2}}=$$

$$=\left|\frac{1}{z-2}=w\right|=\frac{1}{z-2}\cdot\frac{1}{1+w}=\frac{1}{z-2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n w^n=$$

$$=\frac{1}{z-2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{z-2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(z-2)^{n+1}}$$; ряд сходится при $\left|\frac{1}{z-2}\right|<1$, т.е. при $|z-2|>1$. Таким образом, в рассматриваемом кольце получим ряд Лорана:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-2)^n}{2^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(z-2)^{n+1}},\ 1<|z-2|<2.$$

в) В области $|z-2|>2$ функция $f(z)$ аналитическая. $\frac{1}{z}=\frac{1}{(z-2)+2}=$

$$=\left|\begin{array}{c}\textbf{\textit{сводим к функции (8) приложения 1; в знаменателе}}\\ \textbf{\textit{выносим слагаемое бо́льшее по модулю в этой области}}\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{z-2}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{2}{z-2}\right)}=\left|\frac{2}{z-2}=w\right|=\frac{1}{z-2}\cdot\frac{1}{1+w}=\frac{1}{z-2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n w^n=$$

$$=\frac{1}{z-2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2}{z-2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{(z-2)^{n+1}}.$$

Второе слагаемое: $1/(z-1)$ - сохраняет своё разложение, полученное для области $|z-2|>1$. В итоге, имеем ряд Лорана:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{(z-2)^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(z-2)^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2^n+1)}{(z-2)^{n+1}},\ |z-2|>2.$$

О т в е т. а) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^n\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right),\ |z-2|<1$;

б) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-2)^n}{2^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(z-2)^{n+1}},\ 1<|z-2|<2$;

в) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n2^n}{(z-2)^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(z-2)^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2^n+1)}{(z-2)^{n+1}},\ |z-2|>2$.

З а м е ч а н и е. Еще раз сформулируем правило преобразования дроби $\frac{1}{A+B}$ к виду функций (7) или (8) приложения 1: из двух слагаемых знаменателя выносим за скобки то, которое больше по модулю в рассматриваемой области. Только в таком случае можно получить дробь $\frac{1}{1\pm w}$, где $|w|<1$, которую можно разложить в степенной ряд.

П р и м е р 24. Разложить функцию $f(z)=\frac{1}{z^2(z+i)}$ в ряд Лорана в окрестности точки: а) $z_0=0$; б) $z_0=-i$.

Р е ш е н и е. Разложим данную функцию на сумму простых дробей:

а) б)

Рис. 22.

$f(z)=\frac{1}{z^2(z+i)}=\frac{A}{z^2}+\frac{B}{z}+\frac{C}{z+i}$. После нахождения коэффициентов $A=-i$, $B=1$, $C=-1$, получим $f(z)=\frac{1}{z^2(z+i)}=\frac{1}{z}-\frac{i}{z^2}-\frac{1}{z+i}$. Особыми точками функции $f(z)$ являются точки $z_0=0$ и $z_0=-i$. Расстояние между ними равно единице. Поэтому область в а) будет $0<|z|<1$ (рис. 22 а)), а в б) - область $0<|z+i|<1$ (рис. 22 б)).

а) В области $0<|z|<1$ слагаемые $\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}$ уже члены ряда Лорана. Поэтому раскладываем по степеням z только третье слагаемое. Сводим его к функции (7) приложения 1:

$$-\frac{1}{z+i}=-\frac{1}{i}\cdot\frac{1}{1+(z/i)}=i\frac{1}{1-iz}=i\sum_{n=0}^{\infty}(iz)^n=\sum_{n=0}^{\infty}i^{n+1}z^n,\ |iz|<1\ \Rightarrow\ |z|<1.$$

Получили разложение $f(z)=\frac{1}{z}-\frac{i}{z^2}+\sum_{n=0}^{\infty}i^{n+1}z^n,\ 0<|z|<1$.

б) В области $\mathbf{0<|z+i|<1}$, слагаемое $-\frac{1}{z+i}$ - член ряда Лорана. Поэтому раскладываем по степеням $(z+i)$ первые два слагаемых:

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{(z+i)-i}=\left|\begin{matrix}\textit{выносим слагаемое бо'льшее}\\ \textit{по модулю в этой области}\end{matrix}\right|=-\frac{1}{i}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{z+i}{i}\right)}=\left|\frac{1}{i}=-i\right|=-i\,|=$$

$$=i\frac{1}{1+i(z+i)}=\left|\begin{matrix}\textit{формула (7)}\\ \textit{приложения } 1\end{matrix}\right|=i\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n i^n (z+i)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n i^{n+1}(z+i)^n,$$

$$0<|z+i|<1;$$

$$\frac{1}{z^2}=\left(-\frac{1}{z}\right)'=\left|\begin{matrix}\textit{ряд можно дифференцировать}-\\ \textit{следствие } 4 \textit{ теоремы Абеля, п.}32\end{matrix}\right|=\left(-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n i^{n+1}(z+i)^n\right)'=$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n i^{n+1} n(z+i)^{n-1}=\left|\begin{matrix}\textit{запишем ряд,}\\ \textit{начиная с } n=0\end{matrix}\right|=-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1} i^{n+2}(n+1)(z+i)^n,$$

$|z+i|<1$. Итак, в области $0<|z+i|<1$ получили разложение:

$$f(z)=\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z+i}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n i^{n+1}(z+i)^n+i\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1} i^{n+2}(n+1)(z+i)^n-\frac{1}{z+i}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n i^{n+1}(n+2)(z+i)^n-\frac{1}{z+i}.$$

О т в е т. а) $f(z)=\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}+\sum_{n=0}^{\infty} i^{n+1} z^n$, $0<|z|<1$;

б) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n i^{n+1}(n+2)(z+i)^n-\frac{1}{z+i}, 0<|z+i|<1$.

П р и м е р 25. Разложить функции $e^{\frac{z-1}{z}}$ и $e^{\frac{z}{z-1}}$ в ряд Лорана в окрестности особых точек.

Р е ш е н и е. а) Функция $e^{\frac{z-1}{z}}$ имеет особую точку $z_0=0$. Представляем дробь $\frac{z-1}{z}$ по степеням z: $\frac{z-1}{z}=1-\frac{1}{z}$. Тогда

$$e^{\frac{z-1}{z}}=e^{1-\frac{1}{z}}=e\cdot e^{-\frac{1}{z}}=\left|\begin{matrix}\textit{заменяем } w=-1/z \textit{ и применяем}\\ \textit{формулу (1) из приложения } 1\end{matrix}\right|=e\sum_{n=0}^{\infty}\frac{w^n}{n!}=$$

$$=e\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{1}{z}\right)^n=e\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{z^n}.$$ Так как ряд (1) из приложения 1 сходится при любом значении модуля аргумента, то и полученный ряд для функции $e^{\frac{z-1}{z}}$ сходится при $0<|z|<\infty$.

б) Особая точка функции $e^{\frac{z}{z-1}}$ будет $z_0=1$. Представляем дробь $\frac{z}{z-1}$ по степеням $(z-1)$: $\frac{z}{z-1}=\frac{(z-1)+1}{z-1}=1+\frac{1}{z-1}$. Тогда

$$e^{\frac{z}{z-1}}=e^{1+\frac{1}{z-1}}=e\cdot e^{\frac{1}{z-1}}=\left|\frac{1}{z-1}=w\right|=e\cdot e^{w}=\left|\begin{matrix}\textit{формула (1)}\\ \textit{из приложения 1}\end{matrix}\right|=e\sum_{n=0}^{\infty}\frac{w^n}{n!}=$$

$$=e\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{z-1}\right)^n=e\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!(z-1)^n},\ \ 0<|z-1|<\infty.$$

Упражнения

Разложить следующие функции в ряд Лорана в указанных кольцах:

1) $\frac{1}{(z-2)(z-3)}$, а) $2<|z|<3$; б) $3<|z|<\infty$.

2) $\frac{1}{(z+2)(1+z^2)}$, а) $1<|z|<4$; б) $4<|z|<\infty$.

Ответы: 1.а) $-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{z^n}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}$; 1.б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}-2^{n-1}}{z^n}$.

2.а) не разлагается в указанном кольце. 2.б) $\frac{1}{5}\sum(-1)^n\left(\frac{2^n}{z^{n+1}}-\frac{1}{z^{2n+1}}+\frac{2}{z^{2n+2}}\right)$.

7. Классификация изолированных особых точек

36. Предварительно рассмотрим понятие нуля аналитической функции.. Пусть $f(z)$ - аналитическая функция в области D. Точка $z_0\in D$ называется *нулём функции* $f(z)$, если $f(z_0)=0$. Из разложения $f(z)$ в окрестности точки z_0 в степенной ряд, $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$, следует, что в нуле коэффициент $c_0=0$. Если не только $c_0=0$, но и $c_1=...=c_{k-1}=0$, а $c_k\neq 0$, то точка z_0 называется *нулём* k *-го порядка* функции $f(z)$. Из формулы нахождения коэффициентов ряда Тейлора (формула (5), п.32) следует, что в нуле k-го порядка не только сама функция, но и её первые $k-1$ производных равны нулю, а k-я производная отлична от нуля. Поэтому в окрестности нуля k-го порядка разложение функции $f(z)$ в степенной ряд имеет вид

$$f(z)=\sum_{n=k}^{\infty}c_n(z-z_0)^n=(z-z_0)^k\sum_{n=0}^{\infty}c_{n+k}(z-z_0)^n=(z-z_0)^k g(z),\text{ т.е.}$$

$$f(z)=(z-z_0)^k g(z), \tag{1}$$

где $g(z)$ является аналитической функцией в окрестности точки z_0, причём $g(z_0)\neq 0$. Второй метод определения порядка нуля состоит в том, что для функции $f(z)$ записывается ряд Тейлора в окрестности нуля функции, после чего приходим к (1)..

З а м е ч а н и е. Часто нуль порядка 1 называют *простым нулём*. В алгебре и математическом анализе нули функции обычно называют её корнями, а порядок нуля - кратностью корня.

П р и м е р 26. Найти нули функции $f(z)=z^6-z^2$ и определить их порядок

Р е ш е н и е. Раскладываем функцию $f(z)$ на множители: $f(z)=z^6-z^2=$

$$=z^2(z^4-1)=z^2(z^2-1)(z^2+1)=z^2(z-1)(z+1)(z^2+1).$$

Находим нули: $f(z)=z^2(z-1)(z+1)(z^2+1)=0 \Rightarrow z=0$ - нуль второго порядка и $z=\pm 1$, $z=\pm i$ - простые нули.

П р и м е р 27. Определить порядок нуля $z_0=0$ функций: а) $f(z)=e^{z^3}-1$;

б) $f(z)=\sin z+1-\cos^2 z$.

Р е ш е н и е. а) Первый метод. Вычислим производные до первой, отличной от нуля, в точке $z_0=0$: $f'(z)=(e^{z^3}-1)'=3z^2e^{z^3}$, $f'(0)=0$, $f''(z)=6ze^{z^3}+9z^4e^{z^3}$, $f''(0)=0$, $f'''(z)=6e^{z^3}+54z^3e^{z^3}+27z^6e^{z^3}$, $f'''(0)=6\neq 0$. Поэтому $z_0=0$ - нуль третьего порядка.

Второй метод. Разложим функцию в ряд Тейлора по степеням z:

$$f(z)=e^{z^3}-1=\left|\begin{array}{l}\text{формула (1)}\\ \text{приложения 1}\end{array}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z^3)^n}{n!}-1=1+\frac{z^3}{1!}+\frac{z^6}{2!}+\ldots-1=$$

$=\dfrac{z^3}{1!}+\dfrac{z^6}{2!}+\ldots=z^3\left(1+\dfrac{z^3}{2!}+\ldots\right)$, $|z|<\infty$. Сравнивая с формулой (1), заключаем, что $z_0=0$ нуль третьего порядка.

б) Вычислим производные в точке $z_0=0$ до первой неравной нулю:

$f'(z)=(\sin z+1-\cos^2 z)'=\cos z+2\cos z\sin z$, $f'(0)=1\neq 0 \Rightarrow z_0=0$ простой нуль (нуль первого порядка).

Еще один метод нахождения порядка нуля основан на следующем свойстве: если $f(z)=f_1(z)\cdot f_2(z)$ и $f_1(z)$ имеет в точке z_0 нуль порядка k, а $f_2(z)$ в этой же точке - нуль порядка m, то z_0 является нулём порядка $k+m$ для функции $f(z)$. Это свойство непосредственно следует из формулы (1).

П р и м е р 28. Определить порядок нуля $z_0=0$ функции

$f(z)=\sin^3 z\cdot\left(e^{z^3}-1\right)$.

Р е ш е н и е. Так как $z_0=0$ - нуль каждого из сомножителей, то рассмотрим порядок этого нуля для них по отдельности. Определяем порядок нуля для функции $f_1(z)=\sin^3 z$: $f_1'(z)=(\sin^3 z)'=3\sin^2 z\cos z$, $f_1'(0)=0$,

$f_1''(z)=6\sin z\cos^2 z-3\sin^3 z$, $f_1''(0)=0$, $f_1'''(z)=6\cos^3 z-21\sin^2 z\cos z$,

$f_1'''(0)=6\neq 0 \Rightarrow z_0=0$ нуль третьего порядка. Порядок нуля в точке $z_0=0$ для функции $f_2(z)=e^{z^3}-1$ определён в примере 27 а) и равен трём. Поэтому порядок нуля в точке $z_0=0$ для функции $f(z)=\sin^3 z\cdot\left(e^{z^3}-1\right)$ равен шести.

37. Особая точка z_0 функции $f(z)$ называется *изолированной особой точкой*, если существует проколотая окрестность $0<|z-z_0|<R$ этой точки, в которой $f(z)$ является

аналитической. Согласно п.34 функцию $f(z)$ в окрестности точки z_0 можно разложить в ряд Лорана, сходящийся в кольце $0<|z-z_0|<R$. При этом возможны три различных случая:
1) Полученный ряд Лорана не содержит членов с отрицательными степенями $(z-z_0)$;
2) Ряд Лорана содержит конечное число членов с отрицательными степенями $(z-z_0)$,
3) Ряд Лорана содержит бесконечное число членов с отрицательными степенями $(z-z_0)$.
Рассмотрим каждый из этих случаев.
1) Полученный ряд Лорана не содержит членов с отрицательными степенями $(z-z_0)$, т.е.
$f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n=c_0+c_1(z-z_0)+...+c_n(z-z_0)^n+...$. Такая особая точка z_0 называется *устранимой особой точкой* функции $f(z)$.

Т е о р е м а 1. **Для того, чтобы точка z_0 была устранимой особой точкой аналитической функции $f(z)$ необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=c_0$, причём $|c_0|<\infty$.**

П р и м е р 29. Покажите, что функция $f(z)=\dfrac{e^z-1}{z}$ имеет в точке $z_0=0$ устранимую особую точку.

Р е ш е н и е. Функция в точке $z_0=0$ неопределенна. Определяем тип особой точки. <u>Первый способ</u>. Находим $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{e^z-1}{z}=\left|e^z-1\overset{z\to 0}{\sim}z\right|=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{z}{z}=1$. Так как предел конечен, то точка $z_0=0$ устранимая особая точка.

<u>Второй способ</u>. Раскладываем функцию $f(z)=\dfrac{e^z-1}{z}$ в ряд Лорана в окрестности $z_0=0$, используя формулу (1) приложения 1:
$$f(z)=\frac{e^z-1}{z}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}-\frac{1}{z}=$$
$=\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{z}{2!}+...-\dfrac{1}{z}=1+\dfrac{z}{2!}+...$. Так как ряд Лорана не содержит членов с отрицательными степенями z, то точка $z_0=0$ устранимая особая точка.

2) Ряд Лорана содержит конечное число членов с отрицательными степенями $(z-z_0)$, т.е.
$$f(z)=\sum_{n=1}^{m}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n=\frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m}+...+\frac{c_{-1}}{z-z_0}+$$
$+c_0+c_1(z-z_0)+...+c_n(z-z_0)^n+...$. Такая особая точка z_0 называется *полюсом порядка* m *функции* $f(z)$.

Т е о р е м а 2. **Для того, чтобы аналитическая функция $f(z)$ имела в точке z_0 полюс порядка m необходимо и достаточно, чтобы её можно было представить в виде $f(z)=\dfrac{g(z)}{(z-z_0)^m}$, где $g(z)$ аналитическая функция в точке z_0 и $g(z_0)\neq 0$.**

С л е д с т в и е 1. **Если аналитическая функция $f(z)$ имеет $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=\infty$, то точка z_0 является полюсом.**

С л е д с т в и е 2. **Если точка z_0 - полюс порядка m функции $f(z)$, то эта же точка является нулём порядка m функции $\frac{1}{f(z)}$ и наоборот.**

С л е д с т в и е 3. **Если точка z_0 - полюс порядка m для функции $f(z)$ и полюс порядка k для функции $g(z)$, то а) для функции $f(z)+g(z)$ эта точка будет полюсом порядка $n \le max(m,k)$; б) для функции $f(z)\cdot g(z)$ эта точка будет полюсом порядка $n=m+k$; в) для функции $f(z)/g(z)$ эта точка будет полюсом порядка $n=m-k$.**

П р и м е р 30. Покажите, что функция $f(z)=\frac{1}{z^3}$ имеет в точке $z_0=0$ полюс и найдите его порядок.

Р е ш е н и е. Первый способ. Функция $f(z)=\frac{1}{z^3}$ представляет собой единственный член ряда Лорана в точке $z_0=0$. Так как его отрицательная степень равна трём, то $z_0=0$ - полюс третьего порядка.

Второй способ. Функция $\frac{1}{f(z)}=z^3$ в точке $z_0=0$ имеет нуль третьего порядка и поэтому функция $f(z)=\frac{1}{z^3}$ в точке $z_0=0$ имеет полюс третьего порядка (следствие 2).

3) Ряд Лорана содержит бесконечное число членов с отрицательными степенями $(z-z_0)$, т.е.

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n=\ldots+\frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m}+\ldots+\frac{c_{-1}}{z-z_0}+$$

$+c_0+c_1(z-z_0)+\ldots+c_n(z-z_0)^n+\ldots$. Такая особая точка z_0 называется *существенно особой точкой функции* $f(z)$.

Т е о р е м а Сохоцкого. **Если z_0 - существенно особая точка функции $f(z)$, то для любого комплексного числа A существует последовательность точек, сходящаяся к z_0, такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} f(z_k)=A$.**

Из этой теоремы непосредственно следует, что в существенно особой точке предел функции не существует.

П р и м е р 31. Покажите, что функция $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$ имеет в точке $z_0=0$ существенно особую точку.

Р е ш е н и е. Раскладываем функцию $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$ в ряд Лорана в окрестности $z_0=0$, используя формулу (1) приложения 1:

$f(z)=e^{\frac{1}{z}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n n!}=1+\frac{1}{z}+...+\frac{1}{z^n n!}+....$ Ряд содержит бесконечно много членов с отрицательными степенями z. Поэтому точка $z_0=0$- существенно особая точка функции $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$.

П р и м е р 32. Определить все особые точки и их тип для следующих функций:

а) $f(z)=\frac{z-i}{z^3+i}$; б) $f(z)=\frac{1}{e^{-z}-1}+\frac{1}{z}$; в) $f(z)=e^{\frac{z-1}{z}}$; г) $f(z)=sin\frac{z}{z+1}$;

д) $f(z)=\frac{z-\pi}{sin^2 z}$

Р е ш е н и е. а) Особыми точками функции $f(z)=\frac{z-i}{z^3+i}$ будут нули знаменателя: $z^3+i=0 \Rightarrow z^3=-i \Rightarrow z=\sqrt[3]{-i}=$

$=\sqrt[3]{|-i|}\left(cos\frac{arg(-i)+2k\pi}{3}+i\,sin\frac{arg(-i)+2k\pi}{3}\right)$, $k=0,\ 1,\ 2$. Так как $|-i|=1$, $arg(-1)=-\frac{\pi}{2}$, то $z_1=cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\,sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}$;

$z_2=cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\,sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=i$; $z_3=cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)+i\,sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}$. Все эти нули - простые, так как производная знаменателя $(z^3+i)'=3z^2$ в этих точках не равна нулю. Кроме того, $z_2=i$ нуль числителя. Находим

$\lim_{z\to i}f(z)=\lim_{z\to i}\frac{z-i}{z^3+i}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\left|\begin{matrix}правило\\ Лопиталя\end{matrix}\right|=\lim_{z\to i}\frac{(z-i)'}{(z^3+i)'}=\lim_{z\to i}\frac{1}{3z^2}=-\frac{1}{3}$. Предел равен конечному числу, следовательно, точка $z_2=i$ - устранимая особая точка. Из следствия 2 следует, что $z_{1,3}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}$ - простые полюсы (полюсы первого порядка).

б) $f(z)=\frac{1}{e^{-z}-1}+\frac{1}{z}=f_1(z)+f_2(z)$. Особыми точками функции $f_1(z)=\frac{1}{e^{-z}-1}$ будут нули знаменателя: $e^{-z}-1=0 \Rightarrow z=-Ln1=$

$=-(ln1+i2k\pi)=i2k\pi$, $k=0,\ \pm1,\ \pm2\ldots$; $(e^{-z}-1)'\Big|_{z=i2k\pi}=-e^{-z}\Big|_{z=i2k\pi}=-e^{-i2k\pi}\neq0$, т.е. все нули знаменателя - простые.

Точка $z_0=0$ - особая точка функции $f_2(z)=\frac{1}{z}$. Для определения её типа вычислим $\lim_{z\to0}f(z)=\left(\frac{1}{e^{-z}-1}+\frac{1}{z}\right)=\left|\begin{matrix}e^{-z}=1-z+\frac{z^2}{2!}-...,\\ формула\ (1)\ приложения\ 1\end{matrix}\right|=$

$$=\lim_{z\to 0}\left(\frac{1}{-z+\frac{z^2}{2!}}+\frac{1}{z}\right)=\lim_{z\to 0}\frac{1}{z}\left(1-\frac{1}{1-\frac{z}{2}}\right)=\lim_{z\to 0}\frac{1}{z}\cdot\frac{1-(z/2)-1}{1-\frac{z}{2}}=\lim_{z\to 0}\frac{-1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=-\frac{1}{2}.$$

Он конечен, а поэтому $z_0=0$ - устранимая особая точка функции $f(z)$. Остальные особые точки: $z_k=i2k\pi,\ k=\pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$ - полюсы первого порядка (из следствия 2).

в) Функция $f(z)=e^{\frac{z-1}{z}}$ имеет особую точку $z=0$. Для определения типа этой точки разложим $f(z)=e^{\frac{z-1}{z}}$ в ряд Лорана по степеням z. В примере 25 такой ряд получен: $f(z)=e\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{z^n},\ \ 0<|z|<\infty$. Так как ряд содержит бесконечное число членов с отрицательными степенями z, то $z=0$ - существенно особая точка.

г) Для функции $f(z)=\sin\frac{z}{z+1}$ особой точкой будет $z=-1$. Для определения типа этой точки разложим эту функцию в ряд Лорана по степеням $z+1$:

$$f(z)=\sin\frac{z}{z+1}=\sin\frac{(z+1)-1}{z+1}=\sin\left(1-\frac{1}{z+1}\right)=\sin 1\cos\frac{1}{z+1}-\cos 1\sin\frac{1}{z+1}=$$

$$=\left|\begin{matrix}\textit{формулы } (2),\ (3)\\ \textit{приложения } 1\end{matrix}\right|=\sin 1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\cdot\frac{1}{(z+1)^{2n}}-\cos 1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{1}{(z+1)^{2n+1}},$$

$|z+1|>0$. Ряд Лорана содержит бесконечное число членов с отрицательными степенями $z+1$. Поэтому точка $z=-1$ - существенно особая точка.

д) Особыми точками функции $f(z)=\frac{z-\pi}{\sin^2 z}$ будут те, в которых знаменатель обращается в нуль: $\sin^2 z=0\Rightarrow\ z_k=k\pi,\ k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots$. Так как $(\sin^2 z)'\big|_{z=z_k}=$ $=\sin 2z\big|_{z=z_k}=0$, но $(\sin^2 z)''\big|_{z=z_k}=2\cos z\big|_{z=z_k}=2\cos 4k\pi=2\neq 0$, то $z_k=k\pi,\ k=0$, $\pm 1,\ \pm 2,\ldots$ - нули второго порядка знаменателя. Кроме того, $z_1=\pi$ - простой корень числителя. Согласно следствию 2, $z_1=\pi$ является полюсом первого порядка.

8. Вычеты функции

38. *Вычетом* аналитической функции $f(z)$ в изолированной особой точке z_0 называется число, равное коэффициенту c_{-1} при члене $\frac{1}{z-z_0}$ в разложении $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности этой точки. Обозначается $res f(z_0)$, $\underset{z=z_0}{res} f(z)$ или $res\big(f(z),z_0\big)$. Из формулы (4), п.34, для коэффициентов c_n следует, что при $n=-1$

$$\mathop{res}_{z=z_0} f(z) = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz, \qquad (1)$$

где C - произвольный, лежащий в области аналитичности функции $f(z)$, замкнутый контур, обходимый в положительном направлении и содержащий единственную особую точку z_0.

39. 1) Из определения вычета и устранимой особой точки непосредственно следует, что *вычет функции в устранимой особой точке всегда равен нулю*.

2) *Вычет функции* $f(z)$ *в существенно особой точке равен коэффициенту* c_{-1} в разложении $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности этой точки.

3) *Вычет функции* $f(z)$ *в полюсе порядка* m находится по формуле

$$\mathop{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\Big((z-z_0)^m f(z)\Big). \qquad (2)$$

В частности, если полюс простой ($m=1$), то из (2) следует

$$\mathop{res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0}\Big((z-z_0)f(z)\Big). \qquad (3)$$

Если $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{g(z)}$, $\varphi(z_0)\neq 0$, а $g(z_0)=0$, $g'(z_0)\neq 0$ (z_0 - простой нуль знаменателя), то

$$\mathop{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{\varphi(z_0)}{g'(z_0)}. \qquad (4)$$

П р и м е р 33. Найти вычеты функции $f(z)=\dfrac{z}{e^z+2}$ во всех её особых точках.

Р е ш е н и е. Особыми точками будут нули знаменателя: $e^z+2=0 \Rightarrow e^z=-2$ $\Rightarrow z=z_k=Ln(-2)=ln2+i(2k-1)\pi$, $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$. Так как

$$(e^z+2)'\Big|_{z_k} = e^z\Big|_{z_k} = e^{ln2+i(2k-1)\pi} = 2\Big(cos(2k-1)\pi + i\,sin(2k-1)\pi\Big) = -2\neq 0,$$

то z_k - простые нули знаменателя. Согласно следствию 2, п.37, точки z_k будут простыми полюсами для функции $f(z)$. Из формулы (4)

$$\mathop{res}_{z=z_k} f(z) = \frac{z}{(e^z+2)'}\Bigg|_{z_k} = \frac{z}{e^z}\Bigg|_{z_k} = -\frac{1}{2}\Big(ln2+i(2k-1)\pi\Big),\ k=0, \pm1, \pm2, \ldots.$$

П р и м е р 34. Найти вычеты функции $f(z)=\dfrac{sin2z}{(z-1)^3}$ в точке $z=1$.

Р е ш е н и е. Точка $z=1$ - нуль третьего порядка для знаменателя, т.е. полюс третьего порядка для функции $f(z)$. По формуле (2) находим

$$\mathop{res}_{z=1} f(z) = \frac{1}{2!}\lim_{z\to1}\frac{d^2}{dz^2}\left((z-1)^3\frac{sin2z}{(z-1)^3}\right) = \frac{1}{2!}\lim_{z\to1}(sin2z)'' =$$

$$= \frac{1}{2!}\lim_{z\to1}(-4sin2z) = -2sin2.$$

П р и м е р 35. Найти вычеты функции $f(z)=(3z-1)e^{\frac{1}{z^2}}$ в точке $z=0$.

Р е ш е н и е. Разложим функцию в ряд Лорана в окрестности точки $z=0$:

$$f(z)=(3z-1)e^{\frac{1}{z^2}}=\left|\begin{matrix}\text{формула (1)}\\ \text{приложения 1}\end{matrix}\right|=(3z-1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{z^{2n}}=$$

$$=(3z-1)\left(1+\frac{1}{1!z^2}+\frac{1}{2!z^4}+\dots\right)=3z-1+\frac{3}{z}-\frac{1}{z^2}+\frac{3}{2z^3}-\frac{1}{2z^4}+\dots,\ \left|\frac{1}{z^2}\right|<\infty\ \Rightarrow$$

$|z|>0$. Ряд содержит бесконечное число членов с отрицательными степенями z. Поэтому $z=0$ - существенно особая точка функции $f(z)$ и вычет в этой точке равен коэффициенту c_{-1} при $1/z$ (формула (1)), т.е. $\operatorname*{res}\limits_{z=0} f(z)=c_{-1}=3$.

П р и м е р 36. Найти вычеты функции $f(z)=\dfrac{\cos\pi z-1}{z^2(z^2-4)}$ во всех её особых точках.

Р е ш е н и е. Находим особые точки - нули знаменателя: $z^2(z^2-4)=$
$=z^2(z-2)(z+2)=0\ \Rightarrow\ z_1=0$ - нуль второго порядка, $z_{2,3}=\pm 2$ - простые нули. При всех этих нулях знаменателя и числитель обращается в нуль. Можно установить тип особых точек из анализа порядка нулей числителя и знаменателя, как это делалось в предыдущих примерах. Предложим другой метод: определим тип особых точек по пределам:

1) $$\lim_{z\to 0}\frac{\cos\pi z-1}{z^2(z^2-4)}=-2\lim_{z\to 0}\frac{\sin^2\frac{\pi z}{2}}{z^2(z^2-4)}=\left|\sin\frac{\pi z}{2}\overset{z\to 0}{\sim}\frac{\pi z}{2}\right|=-2\lim_{z\to 0}\frac{\left(\frac{\pi z}{2}\right)^2}{z^2(z^2-4)}=\frac{\pi^2}{8}.$$

Предел - конечное число, поэтому точка $z_1=0$ - устранимая особая точка (теорема 1, п.37) и $\operatorname*{res}\limits_{z=0} f(z)=0$ (п.39).

2) $$\lim_{z\to\pm 2}\frac{\cos\pi z-1}{z^2(z^2-4)}=-2\lim_{z\to\pm 2}\frac{\sin^2\frac{\pi z}{2}}{z^2(z^2-4)}=\left|\begin{matrix}\text{замена}\\ z=t\pm 2\end{matrix}\right|=-2\lim_{t\to 0}\frac{\sin^2\frac{\pi(t\pm 2)}{2}}{(t\pm 2)^2((t\pm 2)^2-4)}=$$

$$=-2\lim_{t\to 0}\frac{\sin^2\frac{\pi t}{2}}{(t^2\pm 4t+4)(t^2\pm 4t)}=\left|\sin\frac{\pi t}{2}\overset{t\to 0}{\sim}\frac{\pi t}{2}\right|=-2\lim_{t\to 0}\frac{\left(\frac{\pi t}{2}\right)^2}{(t^2\pm 4t+4)(t^2\pm 4t)}=$$

$=-\dfrac{\pi^2}{2}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{(t^2\pm 4t+4)(t\pm 4)}=0$. Вновь предел конечен и поэтому точки $z_{2,3}=\pm 2$ - устранимые особые точки и $\operatorname*{res}\limits_{z=\pm 2} f(z)=0$ (п.39).

П р и м е р 37. Найти вычеты функции $f(z)=\dfrac{z-\pi}{\sin^2 z}$ в точках а) $z=0$ и б) $z=\pi$.

Р е ш е н и е. В примере 32 д) было установлено, что $z=0$ - полюс второго порядка, а $z=\pi$ - простой полюс для данной функции. Находим вычеты в этих точках. а) По формуле (2)

$$\underset{z=0}{res}\, f(z)=\frac{1}{1!}\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left(\frac{z^2(z-\pi)}{\sin^2 z}\right)=\lim_{z\to 0}\left(\frac{2z(z-\pi)(\sin z - z\cos z)+z^2\sin z}{\sin^3 z}\right)=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\textit{разложим } \sin z \textit{ и } \cos z \textit{ по степеням } z: \\ \textit{формулы } 2),\ 3) \textit{ приложения } 1\end{array}\right|=$$

$$=\lim_{z\to 0}\left(\frac{2z(z-\pi)\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots-z\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\ldots\right)\right)+z^2\left(z-\frac{z^3}{3!}+\ldots\right)}{\left(z-\frac{z^3}{3!}+\ldots\right)^3}\right)=$$

$$=\lim_{z\to 0}\left(\frac{2z(z-\pi)\left(\frac{z^3}{3}-\frac{z^5}{30}+\ldots\right)-z^3\left(1-\frac{z^2}{6}+\ldots\right)}{z^3\left(1-\frac{z^2}{6}+\ldots\right)^3}\right)=$$

$$=\lim_{z\to 0}\left(\frac{2z(z-\pi)\left(\frac{1}{3}-\frac{z^2}{30}+\ldots\right)-\left(1-\frac{z^2}{6}+\ldots\right)}{\left(1-\frac{z^2}{6}+\ldots\right)^3}\right)=-1.$$

б) По формуле (3) $\underset{z=\pi}{res}\, f(z)=\lim\limits_{z\to\pi}\left(\frac{(z-\pi)^2}{\sin^2 z}\right)=\left|\begin{array}{c}\textit{неопределённость } \{0/0\} \text{ -} \\ \textit{применяем правило Лопиталя}\end{array}\right|=$

$$=\lim_{z\to\pi}\frac{\left((z-\pi)^2\right)'}{\left(\sin^2 z\right)'}=\lim_{z\to\pi}\frac{2(z-\pi)}{\sin 2z}=\left|\begin{array}{c}\textit{и еще} \\ \textit{один раз}\end{array}\right|=\lim_{z\to\pi}\frac{2(z-\pi)'}{\left(\sin 2z\right)'}=\lim_{z\to\pi}\frac{2}{2\cos 2z}=1.$$

О т в е т. а) $\underset{z=0}{res}\, f(z)=-1$; б) $\underset{z=\pi}{res}\, f(z)=1$.

Упражнения

Найти вычеты функций в изолированных особых точках.

а) $f(z)=\frac{e^{1/z^2}}{1+z^4}$, б) $f(z)=\frac{\cos z}{z^3-\frac{\pi}{2}z^2}$, в) $f(z)=\cos\frac{z}{z-1}$.

Ответы: а) $\underset{z=0}{res}\, f(z)=0$, $\underset{z=z_k}{res}\, f(z)=0$, где z_k $(k=1,\ldots,4)$ - корни уравнения $z^4+1=0$; б) $\underset{z=0}{res}\, f(z)=-\frac{4}{\pi^2}$, $\underset{z=\pi/2}{res}\, f(z)=0$; в) $\underset{z=1}{res}\, f(z)=-\sin 1$.

9. Вычисление интегралов по замкнутому контуру с помощью вычетов функций

40. Имеет место

Т е о р е м а (основная о вычетах). **Если $f(z)$ аналитическая функция в $\bar{D}$ за исключением конечного числа особых точек $a_1, a_2, \ldots, a_k$, лежащих внутри D, то**

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{k} \underset{z=a_i}{res} f(z), \qquad (1)$$

где C - граница области D.

Алгоритм вычисления интегралов $\oint_C f(z)dz$ с помощью вычетов:

1) найти все особые точки функции $f(z)$;
2) среди этих особых точек выделить те, которые принадлежат области D; проще всего это сделать с помощью чертежа, изобразив на нём контур C и особые точки;
3) вычислить вычеты функции в тех особых точках, которые лежат внутри области D;
4) записать результат интегрирования по формуле (1).

П р и м е р 38. Найти $\oint_C \frac{z-i}{z^3+i}dz$, если а) $C: |z-i|=1$; б) $C: |z|=3/2$.

Р е ш е н и е. 1) Особыми точками функции $f(z)=\frac{z-i}{z^3+i}$ являются нули знаменателя: $z_1 = i$, $z_{2,3} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$. Точка $z_1 = i$ - устранимая особая точка, так как

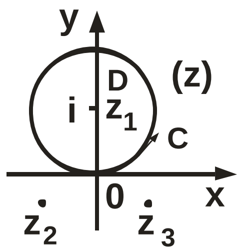


Рис. 23.

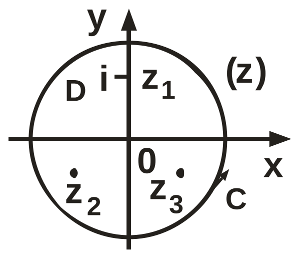


Рис. 24.

$$\lim_{z\to i}\frac{z-i}{z^3+i} = \lim_{z\to i}\frac{(z-i)'}{(z^3+i)'} = \lim_{z\to i}\frac{1}{3z^2} = -\frac{1}{3}.$$

Точки $z_{2,3} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$ - простые полюсы, так как $\lim\limits_{z\to\pm\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}}\frac{z-i}{z^3+i} = \infty$.

2) Строим чертежи (рис. 23 для случая а) и рис. 24 для б)) и помещаем на них особые точки. В случае а) внутри области D находится только точка $z_1 = i$, а в случае б) - все точки.

3) Находим вычеты: а) $\underset{z=i}{res} f(z) = 0$, так как $z_1 = i$ - устранимая особая точка;

б) $\underset{z=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}}{res}\frac{z-i}{z^3+i}=\left|\begin{matrix}\textit{формула (4)}\\ \textit{п.}39\end{matrix}\right|=\left.\frac{z-i}{(z^3+i)'}\right|_{z=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}}=\frac{\pm\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3i}{2}}{3\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)^2}=$

$$=\frac{\pm\sqrt{3}-3i}{3\left(1\mp\sqrt{3}i\right)}=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{1\mp\sqrt{3}i}{1\mp\sqrt{3}i}=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

4) Вычисляем интегралы: а) $\oint\limits_C\frac{z-i}{z^3+i}dz=2\pi i\underset{z=i}{res}\,f(z)=0$;

б) $\oint\limits_C\frac{z-i}{z^3+i}dz=2\pi i\left(\underset{z=i}{res}\,f(z)+\underset{z=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}}{res}\,f(z)+\underset{z=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}}{res}\,f(z)\right)=2\pi i\left(0+\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=0.$

П р и м е р 39. Вычислить $\oint\limits_C\frac{z}{e^z+2}dz$, если $C:|z|=4$.

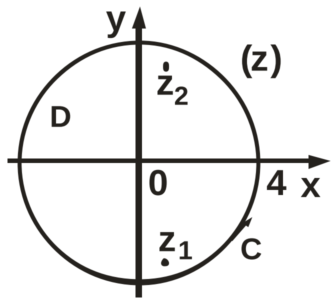


Рис. 25.

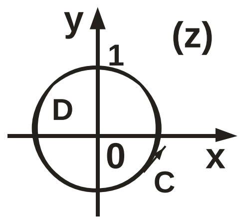


Рис. 26.

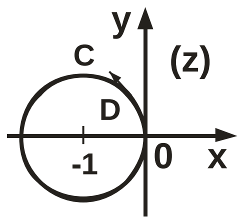


Рис. 27.

Р е ш е н и е. В примере 33 было найдено, что функция $f(z)=\frac{z}{e^z+2}$ имеет простые полюсы в точках $z_k=ln2+i(2k-1)\pi,\ k=0,\ \pm1,\dots$. Нанесём на чертёж окружность $|z|=4$ и особые точки функции, лежащие внутри круга (рис. 25). Внутри оказались точки $z_1=ln2-i\pi$ (при $k=0$) и $z_2=ln2+i\pi$ (при $k=1$). Вычеты в этих точках также были вычислены в том же примере: $\underset{z=z_1}{res}\,f(z)=-\frac{1}{2}ln2+\frac{i\pi}{2}$ и $\underset{z=z_2}{res}\,f(z)=-\frac{1}{2}ln2-\frac{i\pi}{2}$. Из (1) находим

$$\oint\limits_C\frac{z}{e^z+2}dz=2\pi i\left(\underset{z=z_1}{res}\,f(z)+\underset{z=z_2}{res}\,f(z)\right)=2\pi i\left(-\frac{1}{2}ln2+\frac{i\pi}{2}-\frac{1}{2}ln2-\frac{i\pi}{2}\right)=-2\pi i\,ln2.$$

П р и м е р 40. Найти $\oint\limits_C(3z-1)e^{\frac{1}{z^2}}dz$, если $C:|z|=1$.

Р е ш е н и е. В примере 35 показали, что $z=0$ - существенно особая точка для функции $(3z-1)e^{\frac{1}{z^2}}$; она находится внутри круга $|z|<1$ (рис. 26) и вычет в ней равен $\underset{z=0}{res}\, f(z)=3$. Следовательно $\oint\limits_C (3z-1)e^{\frac{1}{z^2}}dz=6\pi i$.

П р и м е р 41. Вычислить $\oint\limits_C z\sin\frac{z}{z+1}dz$, если $C: |z+1|=1$.

Р е ш е н и е. Особая точка $z=-1$ функции $f(z)=z\sin\frac{z}{z+1}$ находится в области $D: |z+1|<1$ (рис. 27). Для определения её типа разложим функцию в ряд Лорана по степеням $(z+1)$. В примере 32 г) было получено разложение в ряд Лорана по степеням $(z+1)$ функции $\sin\frac{z}{z+1}$. Исходя из этого, имеем следующий ряд $f(z)=z\sin\frac{z}{z+1}=$

$$=\big((z+1)-1\big)\left(\sin 1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\cdot\frac{1}{(z+1)^{2n}}-\cos 1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{1}{(z+1)^{2n+1}}\right)=$$

$$=\left(\sin 1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\cdot\frac{1}{(z+1)^{2n-1}}+\cos 1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{1}{(z+1)^{2n+1}}\right)-$$

$$-\left(\sin 1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\cdot\frac{1}{(z+1)^{2n}}+\cos 1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{1}{(z+1)^{2n}}\right). \qquad (2)$$

Так как ряд Лорана содержит бесконечное число членов с отрицательными степенями $(z+1)$, то $z=-1$ - существенно особая точка для функции $z\sin\frac{z}{z+1}$. Для нахождения вычета в этой точке необходимо найти коэффициент c_{-1} при $\frac{1}{z+1}$. Вклад в коэффициент c_{-1} даст только первая скобка в (2): первое слагаемое при $n=1$ и второе слагаемое при $n=0$. В результате получим $c_{-1}=-\frac{\sin 1}{2}+\cos 1$ и $\oint\limits_C z\sin\frac{z}{z+1}dz=2\pi i\left(-\frac{\sin 1}{2}+\cos 1\right)=\pi i\big(2\cos 1-\sin 1\big)$.

Упражнения

Найти с помощью вычетов:

а) $\oint\limits_C \frac{z\sin z}{(z-1)^5}dz,\ C:\ \frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{9}=1$; б) $\oint\limits_{|z|=1}\left(\sin\frac{1}{z^2}+e^{z^2}\cos z\right)dz$.

Ответы: а) $\frac{\pi i}{12}(\sin 1-4\cos 1)$; б) 0.