

☞ Под **числовой последовательностью** $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ понимается функция

$$x_n = f(n), \quad (15.1)$$

заданная на множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел. Кратко последовательность обозначается в виде $\{x_n\}$ или $x_n, n \in \mathbb{N}$. Число x_1 называется первым членом (элементом) последовательности, x_2 — вторым, ..., x_n — **общим** или **n -м членом последовательности**.

$$v_n = n^2 + 1, \quad z_n = (-1)^n \cdot n, \quad y_n = \frac{1}{n}, \quad u_n = \frac{n-1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

☞ Последовательность $\{x_n\}$ называется **ограниченной**, если существует такое число $M > 0$, что для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$|x_n| \leq M.$$

В противном случае последовательность называется неограниченной.

☞ Последовательность $\{x_n\}$ называется **возрастающей** (**неубывающей**), если для любого n выполняется неравенство $x_{n+1} > x_n$ ($x_{n+1} \geq x_n$). Аналогично определяется убывающая (невозрастающая) последовательность.

☞ Все эти последовательности называются **монотонными** последовательностями. Последовательности v_n, y_n и u_n монотонные, а z_n — не монотонная.

Предел числовой последовательности

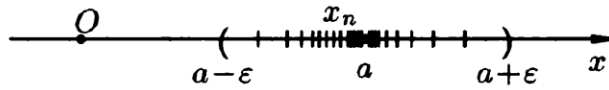
☞ Число a называется **пределом последовательности** $\{x_n\}$, если для любого положительного числа ε найдется такое натуральное число N , что при всех $n > N$ выполняется неравенство

$$|x_n - a| < \varepsilon. \quad (15.2)$$

Коротко определение предела можно записать так:

$$(\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon) \iff \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

Неравенство (15.2) равносильно неравенствам $-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$ или $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$, которые показывают, что элемент x_n находится в ε -окрестности точки a .



Отсюда следует, что **сходящаяся последовательность имеет только один предел**. Последовательность, не имеющая предела, называется **расходящейся**. Таковой является, например, последовательность v_n (см. с. 128).

Теорема 15.1. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ и, начиная с некоторого номера, выполняется неравенство $x_n \leq y_n$, то $a \leq b$.

Теорема 15.2. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$ и справедливо неравенство $x_n \leq z_n \leq y_n$ (начиная с некоторого номера), то $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$.

Теорема 15.3 (Вейерштрасс). Всякая монотонная ограниченная последовательность имеет предел.

В качестве примера на применение этого признака рассмотрим последовательность $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

По формуле бинома Ньютона

$$(a + b)^n = a^n + \frac{n}{1} \cdot a^{n-1} \cdot b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + \dots$$

$$\dots + \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n - (n-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} \cdot b^n.$$

Полагая $a = 1$, $b = \frac{1}{n}$, получим

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + \frac{n}{1} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{n^3} + \dots \\ &\quad \dots + \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-(n-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \cdot \frac{1}{n^n} = \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots \\ &\quad \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots \\ &\quad \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right). \quad (15.3) \end{aligned}$$

Из равенства (15.3) следует, что с увеличением n число положительных слагаемых в правой части увеличивается. Кроме того, при увеличении n число $\frac{1}{n}$ убывает, поэтому величины $\left(1 - \frac{1}{n}\right)$, $\left(1 - \frac{2}{n}\right)$, ... возрастают.

Поэтому последовательность $\{x_n\} = \left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$ — *возрастающая*, при этом

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > 2. \quad (15.4)$$

Покажем, что она ограничена. Заменим каждую скобку в правой части равенства (15.3) на единицу; правая часть увеличится, получим неравенство

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}.$$

Усилим полученное неравенство, заменив числа 3, 4, 5, ..., стоящие в знаменателях дробей, числом 2:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right).$$

Сумму в скобке найдем по формуле суммы членов геометрической прогрессии:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1 \cdot (1 - (\frac{1}{2})^n)}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) < 2.$$

Поэтому

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + 2 = 3. \quad (15.5)$$

Итак, последовательность *ограничена*, при этом для $\forall n \in \mathbb{N}$ выполняются неравенства (15.4) и (15.5):

$$2 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3.$$

Следовательно, на основании теоремы Вейерштрасса последовательность $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$, имеет предел, обозначаемый обычно буквой e :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e. \quad (15.6)$$