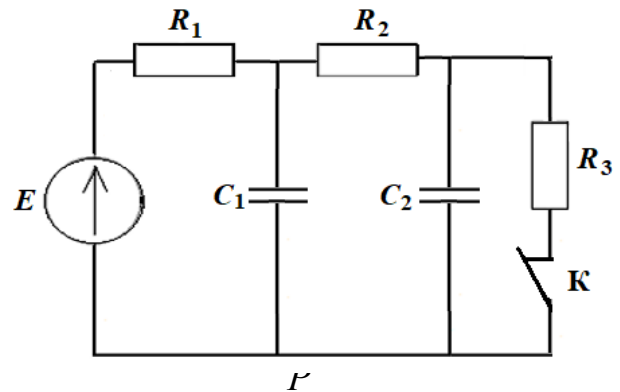


Пример 1.

В схеме электрической цепи (рис. 1):

$E = 50 \text{ В}$, $R_1 = 20 \text{ Ом}$, $R_2 = 30 \text{ Ом}$,
 $R_3 = 35 \text{ Ом}$, $C = 5 \text{ мкФ}$.

Определить законы изменения токов
 в ветвях схемы после размыкания
 ключа.



ис. 1

Решение.

1. Составляем операторную схему замещения цепи для после коммутационного состояния (рис.2).

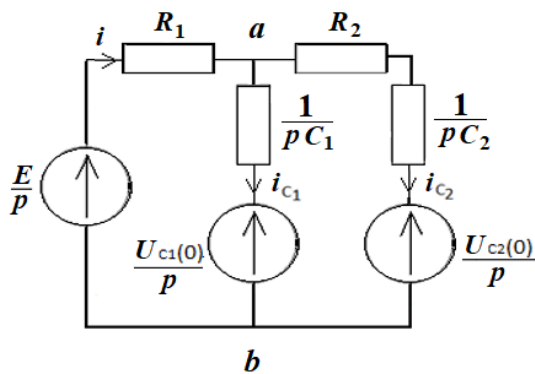


Рис. 2

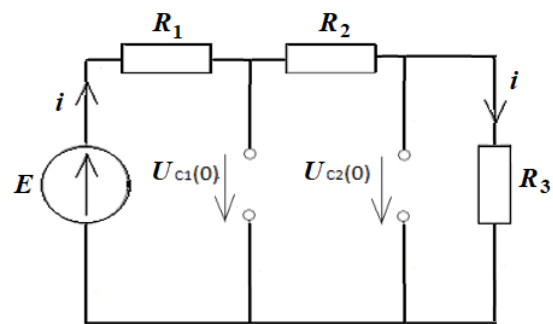


Рис. 3

2. Определим напряжения на емкостях в цепи до коммутации, расчетная схема представлена на рис.3. В цепи действует источник постоянного тока, поэтому сопротивление емкостных элементов равно бесконечности, заменяем их разрывами цепи. Рассчитываем данную схему. Ток в цепи и напряжения на её элементах равны:

$$i = \frac{E}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{50}{85} = 0.6 \text{ (A)}; \quad U_{C_2}(0) = U_{R_3} = iR_3 = 20.6 \text{ (В)};$$

$$U_{C_1}(0) = U_{R_2} + U_{R_3} = 39 \text{ (В)},$$

$$U_{R_1} = iR_1, \quad U_{R_2} = iR_2.$$

3. Для расчета операторной схемы замещения используем метод двух узлов. Напряжение между точками а и б находим по формуле:

$$U_{ab} = \frac{\frac{U_{C_1}(0)}{p} pC_1 + \frac{U_{C_2}(0)}{p} \frac{1}{\left[\frac{1}{pC_2} + R_2\right]} + \frac{E}{pR_1}}{\frac{1}{R_1} + pC_1 + \frac{1}{\left[\frac{1}{pC_2} + R_2\right]}}$$

Упростив выражение, и подставив значения параметров цепи, получим выражение изображения напряжения между точками a и b :

$$U_{ab} = \frac{5.734 \cdot 10^{-3} p^2 + 133.81 p + 5 \cdot 10^5}{0.15 \cdot 10^{-3} p^3 + 3.5 p^2 + 10^4 p}.$$

4. Далее, определяем оригинал напряжения, воспользовавшись теоремой разложения.

Найдем корни характеристического уравнения, приравняв знаменатель выражения нулю:

$$0,15 \cdot 10^{-3} p^3 + 3,5 p^2 + 10^4 p = 0.$$

Корни уравнения: $p_0 = 0, p_1 = -2000, p_2 = -3333,3$.

Числитель выражения: $F_1 = 5,734 \cdot 10^{-3} p^2 + 133,81 p + 5 \cdot 10^5$.

Знаменатель выражения: $F_2 = 0,15 \cdot 10^{-3} p^3 + 3,5 p^2 + 10^4 p$

Производная выражения знаменателя: $F'_2 = 0,15 \cdot 10^{-3} 3p^2 + 3,5 \cdot 2p + 10^4$.

Подставим значения корней в числитель и производную знаменателя и рассчитаем эти величины: $F_1(0) = 5 \cdot 10^5, F'_2(0) = 10^4, F_1(p_1) = 117709, F'_2(p_1) = -8331, F_1(p_2) = 115800, F'_2(p_2) = -50000$.

Таким образом,

$$U_{ab}(t) = 50 - 14e^{-3333t} + 2.3e^{-20000t}.$$

Проверим, подставив нулевое значение времени:

$$U_{ab}(t) = 50 - 14e^0 + 2.3e^0 = 38.2 \text{ В.}$$

То же значение получено нами при анализе цепи до коммутации, а поскольку

$$U_{ab} = U_{C_1}(0),$$

то для этого напряжения действует закон коммутации, и его значение до коммутации равно значению в первый момент после нее.

Подставив же бесконечное время, получим $U_{ab} = 50 \text{ В}$, что также соответствует сделанному ранее анализу цепи после коммутации.

Определив оригинал данного напряжения, можно определить все остальные искомые величины:

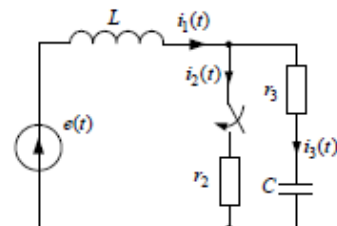
$$\begin{aligned}
 U_{C_1} &= U_{ab} = 50e^{0t} - 14e^{-3333t} + 2.3e^{-20000t}; \\
 i_{C_1} &= C_1 \frac{dU_{C_1}}{dt} = 0.23e^{-3333t} - 0.23e^{-20000t}; \\
 E &= U_1 + U_{ab}; \quad U_1 = E - U_{ab} = 14e^{-3333t} - 2.3e^{-20000t}; \\
 i_1 &= 0.7e^{-3333t} - 0.11e^{-20000t}; \\
 i_{C_2} &= i_1 - i_{C_1} = \\
 &= 0.7e^{-3333t} - 0.11e^{-20000t} - (0.23e^{-3333t} - 0.23e^{-20000t}) = \\
 &= 0.47e^{-3333t} + 0.12e^{-20000t}; \\
 U_{R_2} &= i_{C_2} R_2 = 14.1e^{-3333t} + 3.6e^{-20000t}; \\
 U_{C_2} &= U_{ab} - U_{R_2} = 50 - 28.1e^{-3333t} - 1.3e^{-20000t}.
 \end{aligned}$$

Задача 2.

В цепи $f = 50$ Гц, $e(t) = 400 \sin(\omega t - \varphi_e)$ В;
 $r_2 = 50$ Ом; $r_3 = 25$ Ом; $L = 0,25$ Гн; $C = 400$ мкФ.

Ключ замыкается в момент, когда синусоидальная ЭДС генератора имеет отрицательное максимальное значение ($\varphi_e = -90^\circ$).

Определить переходный ток $i_2(t)$ методом Богатырева.



Решение

$$i_2(t) = i_{2np} + i_{2св}.$$

1. Принужденная составляющая искомого тока (определяется с помощью символического метода):

$$\begin{aligned}
 \underline{I}_{2np} &= \frac{\underline{E}}{j\omega L + \frac{r_2(r_3 - j\frac{1}{\omega C})}{r_2 + r_3 - j\frac{1}{\omega C}}} \frac{r_3 - j\frac{1}{\omega C}}{r_2 + r_3 - j\frac{1}{\omega C}} = \\
 &= \frac{\frac{400}{\sqrt{2}} \angle -90^\circ (25 - j8)}{\left[j78,5 + \frac{50(25 - j8)}{75 - j8} \right] (75 - j8)} = \frac{1,81}{\sqrt{2}} \angle -178,8^\circ \text{ A}; \\
 i_{2np}(t) &= 1,81 \sin(\omega t - 178,8^\circ) \text{ A};
 \end{aligned}$$

2. Свободная составляющая переходного тока $i_2(t)$:

а) эквивалентная операторная схема для свободного режима представлена на рис. 1;

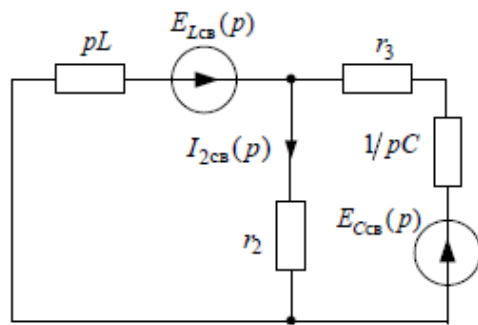


Рис. 1

б) ЭДС внутренних источников энергии свободного режима:

$$E_{Lcb}(p) = Li_{1cb}(0) = L[i_1(0) - i_{1np}(0)];$$

$$E_{Ccb}(p) = \frac{u_{Ccb}(0)}{p} = \frac{u_C(0) - u_{Cnp}(0)}{p}.$$

В соответствии с законами коммутации

$$i_1(0_+) = i_1(0_-); u_C(0_+) = u_C(0_-).$$

Значения тока в индуктивности и напряжения на емкости до коммутации ($t \leq 0$):

$$\underline{I}_1|_{t \leq 0} = \frac{\underline{E}}{r_3 + jx_L - jx_C} = \frac{400 \angle -90^\circ}{\sqrt{2}(25 + j78,5 - j8)} = \frac{5,4}{\sqrt{2}} \angle -160,35^\circ \text{ A};$$

$$\underline{U}_C|_{t \leq 0} = \underline{I}_1|_{t \leq 0} (-jx_C) = \frac{5,4}{\sqrt{2}} \angle -160,35^\circ \cdot 8 \angle -90^\circ = \frac{43}{\sqrt{2}} \angle 109,5^\circ \text{ B};$$

$$i_1(-t) = 5,4 \sin(\omega t - 160,35^\circ) \text{ A}; u_C(-t) = 43 \sin(\omega t - 109,5^\circ) \text{ B}.$$

К моменту коммутации:

$$i_1(0_-) = 5,4 \sin(-160,35^\circ) = -1,82 \text{ A}; u_C(0_-) = 43 \sin(109,5^\circ) = 40,5 \text{ B}.$$

Следовательно, $i_1(0_+) = i_1(0_-) = -1,82 \text{ A}; u_C(0_+) = u_C(0_-) = 40,5 \text{ B}.$

Принужденные значения тока в индуктивности и напряжения на емкости:

$$\begin{aligned} \underline{I}_{1np} &= \frac{\underline{E}}{jx_L + \frac{r_2(r_3 - jx_C)}{r_2 + r_3 - jx_C}} = \frac{400 \angle -90^\circ}{\sqrt{2} \left[j78,5 + \frac{50(25 - j8)}{75 - j8} \right]} = \\ &= \frac{5,23}{\sqrt{2}} \angle -167^\circ \text{ A}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{U}_{Cnp} &= \underline{I}_{1np} \frac{r_2}{r_2 + r_3 - jx_C} (-jx_C) = \frac{5,23 \angle -167^\circ \cdot 50 \cdot 8 \angle -90^\circ}{\sqrt{2}(75 - j8)} = \\ &= \frac{27,8}{\sqrt{2}} \angle 109^\circ \text{ B}; \end{aligned}$$

$$i_{1np}(t) = 5,23 \sin(\omega t - 167^\circ) \text{ A}; u_{Cnp}(t) = 27,8 \sin(\omega t + 109^\circ) \text{ B}; .$$

Значения $i_{1\text{пр}}$ и $u_{C\text{пр}}$ в момент коммутации ($t = 0_+$):

$$i_{1\text{пр}}(0_+) = 5,23 \sin(-167^\circ) = -1,18 \text{ A};$$

$$u_{C\text{пр}}(0_+) = 27,8 \sin(109^\circ) = 26,29 \text{ В}.$$

Значения свободных составляющих тока в индуктивности и напряжения на емкости в момент коммутации ($t = 0$):

$$i_{1\text{св}}(0_+) = i_1(0_+) - i_{1\text{пр}}(0_+) = -1,82 - (-1,18) = -0,64 \text{ A};$$

$$u_{C\text{св}}(0_+) = u_C(0_+) - u_{C\text{пр}}(0_+) = 40,5 - 26,29 = 14,21 \text{ В}.$$

Следовательно,

$$E_{L\text{св}}(p) = L i_{1\text{св}}(0_+) = -0,16 \text{ В} \cdot \text{с};$$

$$E_{C\text{св}}(p) = \frac{u_{C\text{св}}(0_+)}{p} = \frac{14,21}{p} \text{ В} \cdot \text{с};$$

в) изображение свободной составляющей искомого тока:

– по методу двух узлов (рис. 19.9)

$$U_{ab\text{св}}(p) = \frac{\frac{E_{L\text{св}}(p)}{pL} + E_{C\text{св}}(p) \frac{1}{r_3 + 1/pC}}{\frac{1}{pL} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3 + 1/pC}} = -\frac{1,19p + 1066,67}{p^2 + 100p + 6666,67};$$

– по закону Ома

$$I_{2\text{св}}(p) = \frac{U_{ab\text{св}}(p)}{r_2} = -\frac{0,024p + 21,34}{p^2 + 100p + 6666,67} = \frac{F_1(p)}{F_2(p)};$$

г) оригинал свободной составляющей искомого тока. Корни характеристического уравнения $F_2(p) = 0$:

$$p^2 + 100p + 6666,67 = 0;$$

$$p_{1,2} = -50 \pm \sqrt{2500 - 6666,67} = -50 \pm j64,55 \text{ с}^{-1};$$

$$p_1 = -50 + j64,55 = 81,65 \angle 127,8^\circ \text{ с}^{-1};$$

$$p_2 = -50 - j64,55 = 81,65 \angle -127,8^\circ \text{ c}^{-1}.$$

По теореме разложения в случае комплексных корней

$$f(t) = L^{-1} \left\{ \frac{F_1(p)}{F_2(p)} \right\} = 2 \operatorname{Re} \left[\frac{F_1(p_1)}{F_2'(p_1)} e^{p_1 t} \right].$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} i_{2\text{св}}(t) &= 2 \operatorname{Re} \left[-\frac{0,024(-50 + j64,55) + 21,34}{2(-50 + j64,55) + 100} e^{(-50 + j64,55)t} \right] = \\ &= 2 \operatorname{Re} \left[0,157 e^{j94,36^\circ} e^{(-50 + j64,55)t} \right] = 2 \operatorname{Re} \left[0,157 e^{-50t} e^{j(64,55t + 94,36^\circ)} \right] = \\ &= 0,314 e^{-50t} \cos(64,55t + 94,36^\circ) \text{ A}. \end{aligned}$$

3. Общее решение для искомого переходного тока:

$$i_2(t) = i_{2\text{пр}} + i_{2\text{св}} = 1,81 \sin(\omega t - 178^\circ) + 0,314 e^{-50t} \cos(64,55t + 94,36^\circ) \text{ A}.$$

Ответ: $i_2(t) = 1,81 \sin(\omega t - 178^\circ) + 0,314 e^{-50t} \cos(64,55t + 94,36^\circ) \text{ A}.$