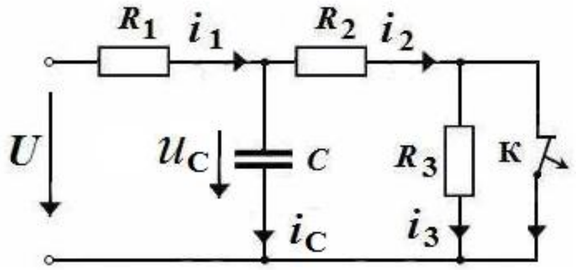
АНАЛИЗ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ
В ЦЕПЯХ ПОСТОЯННОГО ТОКА

Задача 1.

Определить законы изменения напряжения на конденсаторе и токов ветвей цепи в переходном режиме.



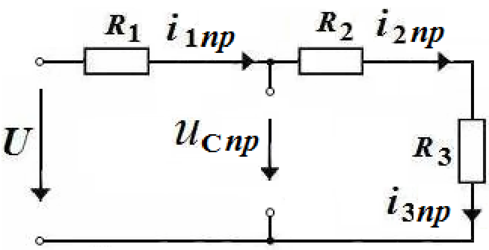
Параметры схемы:

U = 75 В; R_1 = 50 Ом; $R_2 = R_3$ = 25 Ом; C = 10 мкФ.

Решение.

В цепях первого порядка переходная величина определяется в виде:

$$f(t) = f_{пр}(t) + f_{св}(t) = f_{пр}(t) + A\,e^{pt} =$$
$$= f_{пр}(t) + A\,e^{-1/\tau\ t}.$$



Принужденные составляющие токов и напряжения на емкости. Так как для постоянного тока представляет разрыв, то $i_{C\,пр}(t) = 0$, и:

$$i_{1пр}(t) = i_{2пр}(t) = i_{3пр}(t) = U / (R_1 + R_2 + R_3) = 75 / (50 + 25 + 25) = 0{,}75 \text{ А}.$$

Принужденная составляющая напряжения на емкости:

$$u_{C\,пр}(t) = i_{2пр}(t) \cdot (R_2 + R_3) = 0{,}75\,(25 + 25) = 37{,}5 \text{ В}.$$

Начальные условия.

Независимое начальное условие: $u_C(0) = u_C(-0)$.

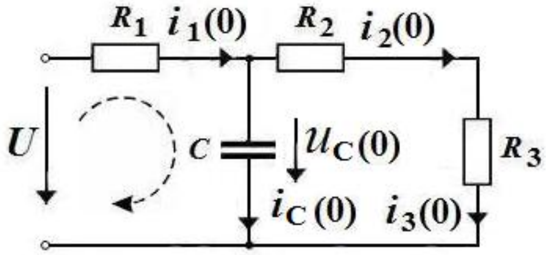
В схеме до коммутации, ключ К замкнут. При замкнутом ключе резистор R_3 закорочен, и ток через него не протекает. Ток в цепи до коммутации протекает по контуру: источник питания, резистор R_1, резистор R_2, ключ. Величина тока в контуре:

$$i_1(-0) = i_2(-0) = U / (R_1 + R_2) = 75 / (50 + 25) = 1 \text{ А}.$$

Значение независимого начального условия, напряжения на емкости:

$$u_C(0) = u_C(-0) = R_2 \cdot i_2(-0) = 25 \cdot 1 = 25 \text{ В}.$$

Зависимые начальные условия определяем по схеме цепи после коммутации, с учетом независимого начального условия. После размыкания ключа К, резисторы R_2 и R_3 образуют ветвь последовательно соединенных элементов, и эта ветвь включена параллельно емкости С, поэтому:



$$i_2(0) = i_3(0) = u_C(0) / (R_2 + R_3) = 25 / (25 + 25) = 0{,}5 \text{ А}.$$

Запишем второй закон Кирхгофа для входного контура:

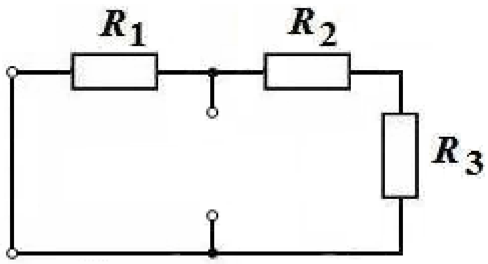
$$U = R_1 \cdot i_1(0) + u_C(0).$$

Из последнего уравнения определяем значение тока $i_1(0)$:

$$i_1(0) = (U - u_C(0)) / R_1 = (75 – 25) / 50 = 1 \text{ А}.$$

Из уравнения записанного по первому закону Кирхгофа для узла, определяем значение тока через емкость: $i_C(0) = i_1(0) - i_2(0) = 1 – 0{,}5 = 0{,}5$ А.

Постоянная времени переходного процесса для цепи, содержащей емкость:



$$\tau = C\, R_Э ,$$

где $R_Э$ – входное сопротивление цепи относительно зажимов емкости, при устранении из цепи источников питания.

$$R_Э = R_1 (R_2 + R_3) / (R_1 + R_2 + R_3) = 50\,(25 + 25) / (50 + 25 + 25) = 25 \text{ Ом}.$$

Постоянная времени: $\tau = C\, R_Э = 10 \cdot 10^{-6} \cdot 25 = 0{,}25$ мс.

Корень характеристического уравнения – $p = - 1/\tau$.

Постоянная интегрирования для цепи с одним реактивным элементом, и равна значению свободной составляющей при t = 0:

$$A_i = f(0) - f_{пр}(0).$$

Постоянная интегрирования свободной составляющей напряжения на емкости: $A = u_C(0) - u_{C\,пр}(0) = 50 – 37{,}5 = 12{,}5$ В.

Постоянные интегрирования свободных составляющих токов (индекс постоянной составляющей соответствует индексу тока):

$$A_1 = i_1(0) - i_{1пр}(0) = 1 – 0{,}75 = 0{,}25 \text{ (А)};$$

$$A_2 = i_2(0) - i_{2пр}(0) = 0{,}5 – 0{,}75 = - 0{,}25 \text{ (А)};$$

$$A_3 = i_3(0) - i_{3пр}(0) = 0{,}5 – 0{,}75 = - 0{,}25 \text{ (А)};$$

$$A_C = i_C(0) - i_{C\,пр}(0) = 0{,}5 – 0 = 0{,}5 \text{ (А)}.$$

Переходные функции искомых величин:

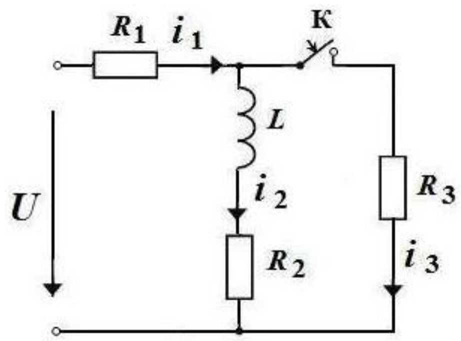
$$u_C(t) = 37{,}5 + 12{,}5\, e^{-4000\,t} \text{ (В)};$$

$$i_1(t) = 0{,}75 + 0{,}25\, e^{-4000\,t} \text{ (А)};$$

$$i_2(t) = i_3(t) = 0{,}75 - 0{,}25\, e^{-4000\,t} \text{ (А)};$$

$$i_C(t) = 0{,}5\, e^{-4000\,t} \text{ (А)}.$$

Задача 2.

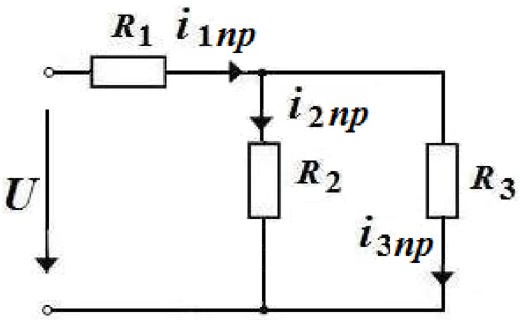


Определить законы изменения токов схемы и напряжения на индуктивности в переходном режиме, если:

U = 12 В; $R_1 = R_2 = R_1$ = 4 Ом; L = 0,1 Гн.

Решение.

По схеме после коммутации, в установившемся режиме, определяем принужденные составляющих токов напряжения на индуктивности.



Из схемы следует:

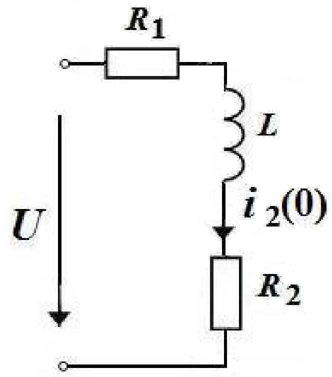
$i_{1пр} = U / (R_1 + R_{23}) = 12 / (4 + 2) = 2$ (А) ,

где $R_{23} = R_2 \cdot R_3 / (R_2 + R_3) = 2$ Ом.

Токи в параллельных ветвях, по формуле разброса:

$$i_{2пр} = i_{1пр}\, R_3 / (R_2 + R_3) = 2 \cdot 4 / (4 + 4) = 1 \text{ (А)};$$

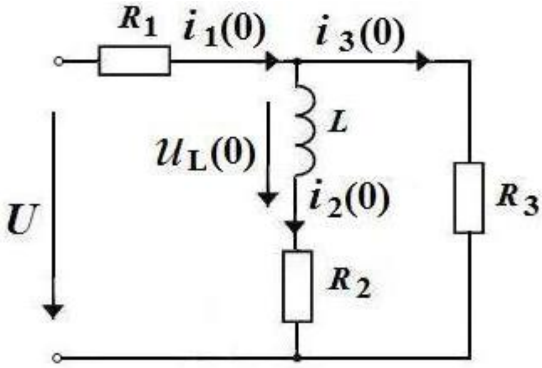
$$i_{3пр} = i_{1пр} - i_{2пр} = 2 – 1 = 1 \text{ (А)}.$$



Из схемы до коммутации, ключ К разомкнут, определяем независимое начальное условие – ток через индуктивность:

$$i_2(0) = i_2(-0) = U / (R_1 + R_2) = 12 / (4+4) = 1{,}5 \text{ (А)}.$$

Из схемы после коммутации, при t = 0, определяем зависимые начальные условия.



Для данной схемы запишем систему уравнений по законам Кирхгофа:

$i_1(0) = i_2(0) + i_3(0)$;

$R_1 \cdot i_1(0) + R_3 \cdot i_3(0) = U$;

$u_L(0) + R_2 \cdot i_2(0) - R_3 \cdot i_3(0) = 0$.

Подставим во второе уравнение выражение тока $i_1(0)$ из первого уравнения, в результате получаем:

$$R_1\ [i_2(0) + i_3(0)] + R_3 \cdot i_3(0) = U.$$

Из уравнения следует:

$$i_3(0) = [U - R_1 \cdot i_2(0)] / (R_1 + R_3) = [12 - 4 \cdot 1{,}5] / (4 + 4) = 0{,}75 \text{ (А)}.$$

Из первого уравнения системы определяем ток $i_1(0)$:

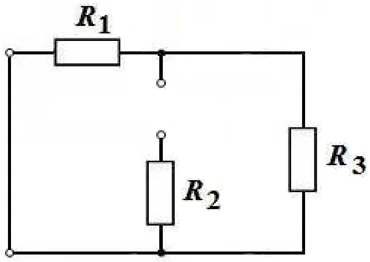
$$i_1(0) = i_2(0) + i_3(0) = 1{,}5 + 0{,}75 = 2{,}25 \text{ (А)}.$$

Из третьего уравнения системы:

$$u_L(0) = R_3 \cdot i_3(0) - R_2 \cdot i_2(0) = 4 \cdot 0{,}75 - 4 \cdot 1{,}5 = -3 \text{ (В)}.$$

Постоянная времени переходного процесса:

$\tau = L / R_Э = 0{,}1 / 60 = 0{,}0167$ (с),



где $R_Э$ эквивалентное входное сопротивление относительно зажимов индуктивности, в схеме после коммутации, после устранения источника напряжения:

$$R_Э = R_2 + R_1 \cdot R_3 / (R_1 + R_3) = 4 + 4 \cdot 4 / (4 + 4) = 6 \text{ (Ом)}.$$

Корень характеристического уравнения: $p = -1 / \tau = -1 / 0{,}0167 = 60$ (с$^{-1}$).

Постоянные интегрирования свободных составляющих токов:

$$A_1 = i_1(0) - i_{1пр}(0) = 2{,}25 – 2 = 0{,}25 \text{ (А)};$$

$$A_2 = i_2(0) - i_{2пр}(0) = 1{,}5 – 1 = 0{,}5 \text{ (А)};$$

$$A_3 = i_3(0) - i_{3пр}(0) = 0{,}75 – 1 = -0{,}25 \text{ (А)}.$$

Постоянная интегрирования свободной составляющей напряжения на индуктивности, учитывая, что $u_{L\,пр}(0) = 0$: $A = u_L(0) - u_{L\,пр}(0) = -3$ (В).

Выражения токов в переходном режиме:

$$i_1(t) = 2 + 0{,}25\, e^{-60\,t}\ (\text{А});$$

$$i_2(t) = 1 + 0{,}5\, e^{-60\,t}\ (\text{А});$$

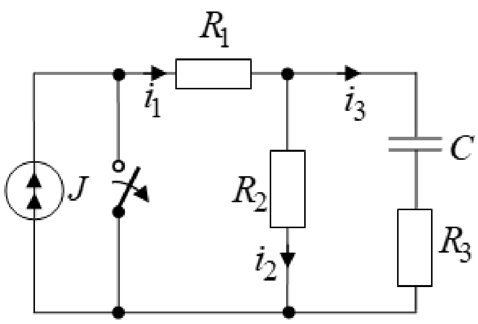
$$i_3(t) = 1 - 0{,}25\, e^{-60\,t}\ (\text{А}).$$

Выражение напряжения на индуктивности: $u_L(t) = -3\, e^{-60\,t}$ (В).

Задача 3.

Найти выражения токов ветвей и напряжения на конденсаторе в переходном режиме, если:

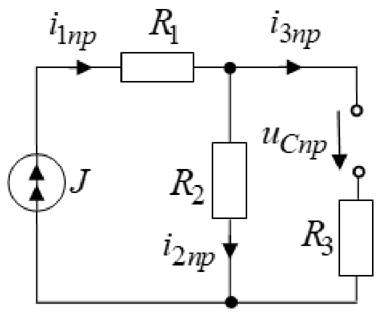
J = 6 А, R_1 = 10 Ом, R_2 = 12 Ом,
R_3 = 24 Ом, C = 9.25 мкФ



Расчет принужденных составляющих токов ветвей и напряжения конденсатора в установившемся режиме после коммутации.

На постоянном токе конденсатор эквивалентен разрыву, с учетом этого расчетная схема имеет вид (рис. 8.2).

Следовательно,



$$i_{1пр} = i_{2пр} = J = 6\ \text{А},\ i_{3пр} = 0,$$
$$u_{Cпр} = i_{2пр} \cdot R_2 = 72\ \ \text{В}.$$

Определение корня характеристического уравнения.

В цепи первого порядка с конденсатором $p = -\delta = -1/\tau$, где $\tau = CR_э$, а $R_э$ – входное сопротивление пассивной схемы после коммутации относительно зажимов конденсатора. В рассматриваемой цепи $R_э = R_2 + R_3$, соответственно $p = -(R_2 + R_3)/C = -3 \cdot 10^3$ с$^{-1}$.

Общие выражения искомых величин:

$$i_1(t) = i_{1пр}(t) + i_{1св}(t) = 6 + Ae^{-3 \cdot 10^3 t}\ \text{А};$$

$$i_2(t) = i_{2пр}(t) + i_{2св}(t) = 6 + Be^{-3 \cdot 10^3 t}\ \text{А};$$

$$i_3(t) = i_{3пр}(t) + i_{3св}(t) = Ce^{-3 \cdot 10^3 t}\ \text{А};$$

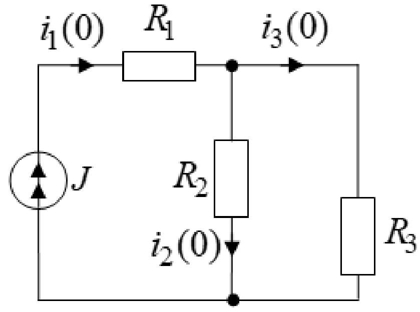
$$u_C(t) = u_{Cпр}(t) + u_{Cсв}(t) = 72 + D^{-3 \cdot 10^3 t}\ \text{В}.$$

Определение независимого начального условия.

Значение напряжения на конденсаторе в момент коммутации является независимым начальным условием. Для его определения рассмотрим установившийся режим работы схемы до коммутации. До срабатывания ключа источник тока был закорочен (шунтирован) и схема была обесточена, следовательно

$$u_C(0) = u_C(0_-) = 0\,.$$

Расчет зависимых начальных условий.



Для определения начальных значений токов ветвей $i_2(0)$ и $i_3(0)$ используем схему замещения для момента коммутации (t = 0, ключ разомкнут). Поскольку в рассматриваемой схеме $u_C(0) = 0$, то конденсатор заменен идеальным проводом (закороткой).

В результате расчета схемы получим

$$i_1(0) = J = 6\,\text{А}.$$

Токи $i_2(0)$ и $i_3(0)$ находим по формуле делителя токов:

$$i_2(0) = i_1(0)\cdot\frac{R_3}{R_2 + R_3} = 4\ \text{А};$$

$$i_3(0) = i_1(0)\cdot\frac{R_2}{R_2 + R_3} = 2\ \text{А}.$$

Определение постоянных интегрирования.

На основании (п. 3)

$$A = i_{св}(0) = i_1(0) - i_{1пр}(0) = 6 - 6 = 0\,,$$
$$B = i_{2св}(0) = i_2(0) - i_{2пр}(0) = 4 - 6 = -2\ \text{А},$$
$$C = i_{3св}(0) = i_3(0) - i_{3пр}(0) = 2 - 0 = 2\ \text{А},$$
$$D = u_{Cсв}(0) = u_C(0) - u_{Cпр}(0) = 0 - 72 = -72\ \text{В}.$$

Окончательное решение, как сумма принужденной и свободной составляющих.

$$i_1(t) = 6\ \text{А},$$

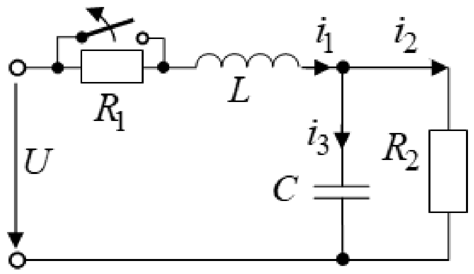
$$i_2(t) = 6 - 2e^{-3\cdot10^3 t}\ \text{А},$$

$$i_2(t) = 2e^{-3\cdot10^3 t}\ \text{А},$$

$$u_C(t) = 72 - 72e^{-3\cdot10^3 t}\ \text{В}.$$

Задача 4.

Найти закон изменения токов ветвей при размыкании ключа, если: $R_1 = R_2 = R = 100$ Ом, $L = 1$ Гн, С = 100 мкФ, входное напряжение постоянное $U = 2$ кВ. Построить кривую изменения тока в неразветвленной части цепи $i_1(t)$.



Предварительные замечания.

В данной схеме для определения токов ветвей достаточно определить только напряжение конденсатора $u_C(t)$.

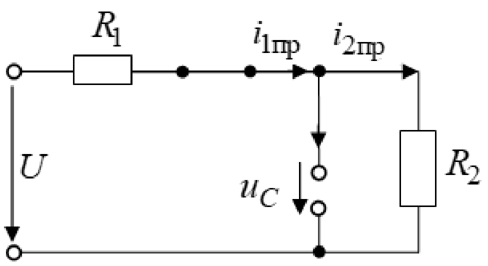
Тогда

$$i_3(t) = C\frac{du_C}{dt}; \quad i_2(t) = \frac{u_C}{R_2}; \quad i_1(t) = i_2(t) + i_3(t).$$

Поэтому на первом этапе определим в переходном режиме напряжение конденсатора, а на втором этапе искомые токи. Советуем для каждого этапа расчета обращаться к соответствующей ему схеме замещения.

Решение

Расчет принужденной составляющей напряжения. Схема замещения цепи, соответствующая данному режиму, приведена на рисунке. При построении схемы замещения учтено, что для цепи постоянного тока в установившемся режиме индуктивная катушка эквивалентна проводу, а конденсатор эквивалентен разъему, т.е. разрыву ветви.



Из данной схемы следует

$$i_{1пр} = i_{2пр} = I_{пр} = U/(R_1 + R_2) = 10 \text{ А}.$$

$$u_{Cпр} = R_2 i_{2пр} = R_2 I_{пр} = 1 \text{ кВ}.$$

Определяем корни характеристического уравнения. Для этого запишем выражение входного комплексного сопротивления схемы после коммутации:

$$Z(j\omega) = R_1 + j\omega L + \frac{R_2 / j\omega C}{R_2 + 1/j\omega C} = R_1 + j\omega L + \frac{R_2}{1 + R_2 j\omega C}.$$

Производим формальную замену $j\omega$ на p и приравниваем полученное выражение к нулю $Z(j\omega) \to Z(p) = 0$

$$Z(p) = R_1 + pL + \frac{R_2}{1 + R_2 pC} = 0.$$

Отсюда после несложных преобразований получаем характеристическое уравнение

$$R_2LCp^2 + (L + R_1R_2C)p + R_1 + R_2 = 0.$$

Подставляя численные значения, найдем его корни

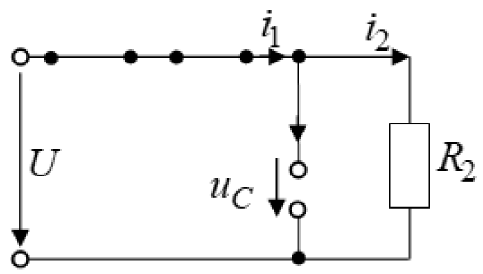
$$p_{1,2} = -100 \pm j100 = -\delta \pm j\omega_{св}.$$

Общее выражение искомого напряжения на конденсаторе

$$u_C = u_{Cпр} + u_{Cсв} = u_{Cпр} + e^{-\delta t}(A_1 \cos\omega_{св}t + A_2 \sin\omega_{св}t) =$$

$$= 1000 + e^{-100t}(A_1 \cos 100t + A_2 \sin 100t).$$

Определяем независимые начальные условия. Для этого рассчитываем установившийся режим работы схемы до коммутации. Находим ток в ветви с индуктивностью и напряжение на конденсаторе. Значения этих величин в момент коммутации (t = 0) являются независимыми начальными условиями. Схема замещения цепи, соответствующая данному режиму, приведена на рисунке.



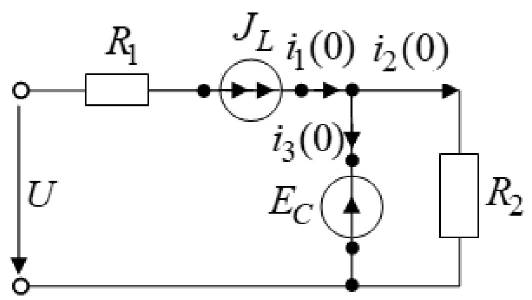
$$u_C(0) = u_C(0\_) = U = 2 \text{ кВ},$$

$$i_1(0) = i_1(0\_) = U / R_2 = 2000/100 = 20 \text{ А}.$$

Определение зависимого начального условия. В постановке данной задачи зависимым начальным условием является производная напряжения конденсатора в момент коммутации: $u'_C(0) = ?$

Из соотношения $i_3 = Cdu_C / dt$, следует $u'_C(0) = i_3(0)/C$.

Для определения начального значения тока третьей ветви воспользуемся схемой замещения для момента коммутации (при t = 0, ключ разомкнут), которая приведена на рисунке. В данной схеме катушка заменена источником тока $J_L = i_1(0)$, а конденсатор – источником ЭДС: $E_C = u_C(0)$. Входное напряжение от времени не зависит, поэтому свое значение не изменяет. Из анализа схемы находим:



$$i_2(0) = E_C / R_2 = u_C(0)/R_2 = 2000/100 = 20 \text{ А}.$$

Ток ветви три определяем по первому закону Кирхгофа

$$i_3(0) = i_1(0) - i_2(0) = 0\,.$$

Следовательно, $$u'_C(0) = i_3(0)\,/\,C = 0\,.$$

Для вычисления постоянных интегрирования запишем приведенное в п.3 выражение, определяющее напряжение конденсатора, и его производную при t = 0.

$$u'_C = -\delta e^{-\delta t}(A_1 \sin\omega_{св} t + A_2 \cos\omega_{св} t) + e^{-\delta t}(A_1\omega_{св} \cos\omega_{св} t - A_2\omega_{св} \sin\omega_{св} t)$$

$$u_C(0) = u_{Cпр}(0) + A_1 = 1000 + A_1.$$

$$u'_C(0) = -\delta A_2 + A_1\omega_{св}\,.$$

Отсюда $A_1 = u_C(0) - u_{Cпр}(0) = 2000 - 1000 = 1000$ В.

$$A_2 = [A_1\omega_{св} - u'_C(0)]\,/\,\delta = A_1\omega_{св}\,/\,\delta = A_1 = A = 1000 \text{ В.}$$

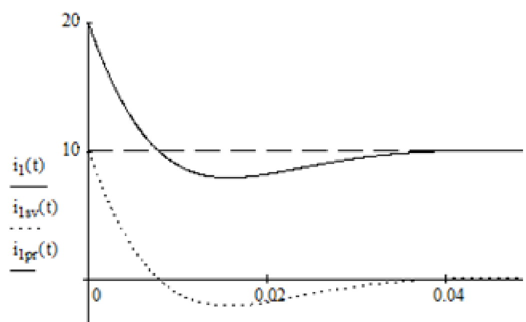
Для получения окончательного решения найденные принужденные и свободные составляющие суммируются.

$$u_C = 1000 + 1000e^{-100t}(\cos 100t + \sin 100t) =$$
$$= 1000 + 1000\sqrt{2}e^{-100t}\sin(100t + 45^o) \text{ В.}$$

$$i_3(t) = C\frac{du_C}{dt} = 10^{-4}u'_C = -10e^{-100t}(\sin 100t + \cos 100t) +$$
$$+10e^{-100t}(\cos 100t - \sin 100t) = -20e^{-100t}\sin 100t \text{ А.}$$

$$i_2(t) = \frac{u_C}{R_2} = 10 + 10e^{-100t}(\cos 100t + \sin 100t) = 10 + 10\sqrt{2}e^{-100t}\sin(100t + 45^o) \text{ А.}$$

$$i_1(t) = i_2(t) + i_3(t) = 10 + 10e^{-100t}(\cos 100t + \sin 100t) -$$
$$-20e^{-100t}\sin 100t = 10 + 10e^{-100t}(\cos 100t - \sin 100t) \text{ А.}$$



Графические зависимости полного тока в неразветвленной части цепи $i_1(t)$ и его принужденной и свободной составляющих приведены на рисунке.

Ответ:

$$i_1(t) = 10 + 10e^{-100t}(\cos 100t - \sin 100t) \text{ А;}$$

$$i_2(t) = 10 + 10e^{-100t}(\cos 100t + \sin 100t) \text{ А;}$$

$$i_3(t) = -20e^{-100t}\sin 100t \text{ A}.$$