

ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКА

Контрольные вопросы

1. Что называется передаточной функцией?
2. Какие комплексные передаточные функции вы знаете? Запишите выражения этих передаточных функций.
3. Что называется амплитудно-частотной характеристикой?
4. Что называется фазо-частотной характеристикой?
5. Какие способы определения передаточных характеристик вы знаете?
6. Как передаточные функции связаны с параметрами четырехполюсников?

Типовые задачи

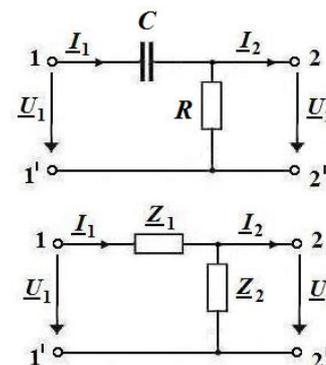
Задача 1.

Определить передаточные функции делителя напряжения (Г-образного четырехполюсника).

Решение.

В режиме холостого хода, $I_1 = U_1 / (Z_1 + Z_2) = U_2 / Z_2$.

Комплексная передаточная функция по напряжению:



$$\underline{K}_U(j\omega) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{Z_2}{(Z_1 + Z_2)} = \frac{R}{(R + 1/j\omega C)} = \frac{j\omega RC}{(1 + j\omega RC)}.$$

$$\underline{K}_U(j\omega) = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}.$$

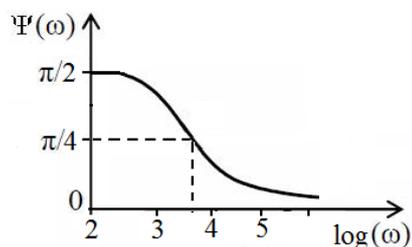
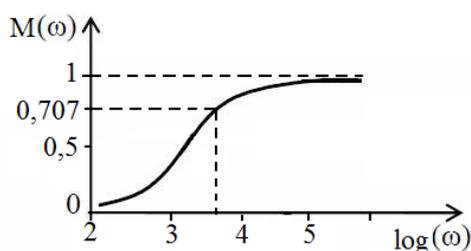
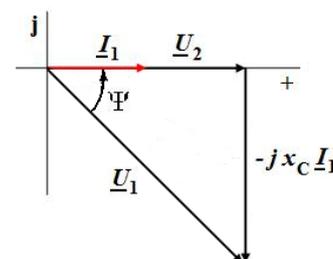
Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ): $M(\omega) = |\underline{K}_U(j\omega)| = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}.$

Фазо-частотная характеристика (ФЧХ):

$$\Psi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \text{arctg} \left(\frac{\omega RC}{1} \right).$$

Построим АЧХ и ФЧХ, если: $R = 2 \text{ Ом}; C = 100 \text{ мкФ};$

$0 < \omega < 10^5 \text{ рад / с.}$



При $\omega = 0$: $M(0) = 0$; $\Psi(0) = \pi/2$. При $\omega \rightarrow \infty$: $M(\infty) = 1$; $\Psi(\infty) = 0$.

Граница полосы пропускания:

$M(\omega_\Gamma) = 0,707$, $\log \omega_\Gamma = 3,7 \rightarrow \omega_\Gamma = 10^{3,7}$ рад/с; $\Psi(\omega_\Gamma) = \pi/4$ (см. векторную диаграмму).

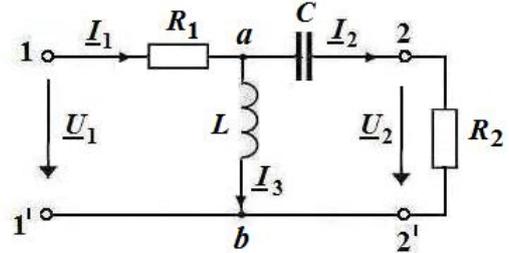
Задача 2.

Рассчитать и построить частотные характеристики четырехполюсника, если:

$R_1 = 100$ Ом; $R_2 = 200$ Ом; $L = 20$ мГн;

$C = 1$ мкФ.

Решение.



1. Пусть $\underline{U}_1 = 1$ В.

$$\underline{K}(j\omega) = \frac{\underline{U}_2(j\omega)}{\underline{U}_1(j\omega)} = \frac{1}{R + \frac{j\omega L \cdot (R_2 + \frac{1}{j\omega C})}{R_2 + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}} \cdot \frac{j\omega L}{R_2 + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} \cdot R_2.$$

2. Используя А-параметры четырехполюсника.

$$\underline{K}(j\omega) = \frac{\underline{U}_2(j\omega)}{\underline{U}_1(j\omega)} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{A}\underline{U}_2 + \underline{B}\underline{I}_2} = \frac{1}{\underline{A} + \underline{B}/\underline{Z}_H}.$$

А-параметры четырехполюсника определяем используя справочные данные для типового Т-образного четырехполюсника:

$$\underline{A}(j\omega) = 1 + \frac{\underline{Z}_{1T}}{\underline{Z}_{2T}} = 1 + \frac{R_2}{j\omega L} = 1 + \frac{100}{j\omega 20 \cdot 10^{-3}} = 1 - j \frac{5 \cdot 10^3}{\omega};$$

$$\underline{B}(j\omega) = \underline{Z}_{1T} + \underline{Z}_{3T} + \frac{\underline{Z}_{1T}\underline{Z}_{3T}}{\underline{Z}_{2T}} = R - j \frac{1}{\omega C} - j \frac{R}{\omega L} = (100 - \frac{5 \cdot 10^9}{\omega^2}) - j \frac{10^6}{\omega}.$$

Подстановка значений А-параметров и сопротивления нагрузки $\underline{Z}_H = R_2$ в выражение передаточной функции позволяет определить последнюю.

3. Метод пропорционального пересчета.

Сделаем замену $p = j\omega$, введем оператор Хевисайда, и зададим $U_2(p) = 1$. Тогда:

$I_2(p) = U_2(p) / R_2$; $U_{ab}(p) = U_2(p) + I_2(p) / pC$; $I_3(p) = U_{ab}(p) / pL$; $I_1(p) = I_2(p) + I_3(p)$;

$$U_1(p) = U_{ab}(p) / pL + I_1(p)R.$$

$$K_U(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{R_2} \cdot \frac{1}{pC}\right) + R \left[\frac{1}{R_2} + \frac{1}{pL} \left(1 + \frac{1}{R_2} \cdot \frac{1}{pC}\right) \right]} = \frac{p^2 LCR_2}{p^2 LC(R+R_2) + p(RR_2C+L) + R}$$

После подстановки параметров и обратной замены $p = j\omega$, получаем:

$$\underline{K}(j\omega) = \frac{2\omega^2}{9\omega^4 + 10^8 \omega^2 + 2,5 \cdot 10^{15}} [(3\omega^2 - 5 \cdot 10^7) + j2 \cdot 10^4 \omega].$$

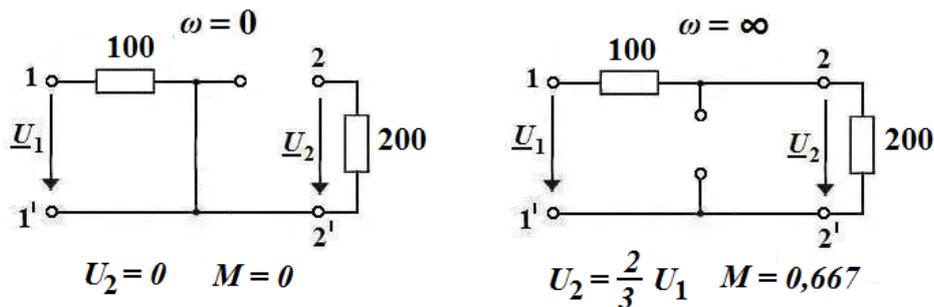
Выражение амплитудно-частотной характеристики имеет вид:

$$M(\omega) = \frac{2\omega^2}{\sqrt{9\omega^4 + 10^8 \omega^2 + 2,5 \cdot 10^{15}}}.$$

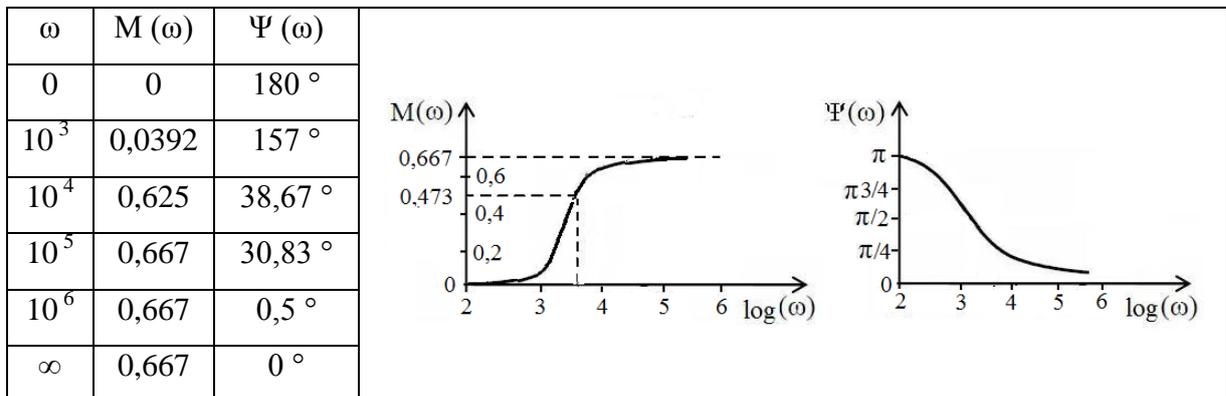
Выражение фазо-частотной характеристики ($\arg \underline{K}(j\omega)$):

$$\Psi(\omega) = \arctg \left(\frac{\omega}{1,5 \cdot 10^{-4} \omega^2 - 2,5 \cdot 10^3} \right).$$

Схемы электрической цепи при $\omega = 0$ и $\omega \rightarrow \infty$.



Передаточные характеристики.



Четырехполюсник является ФВЧ.

Полоса пропускания фильтра. $M_{\text{MAX}} = 0,667$, $M_{\text{ГР}} = 0,707$ $M_{\text{MAX}} = 0,472$. Частота соответствующая $M_{\text{ГР}}$ – граничная частота $\omega_{\text{Г}} = 4,817 \cdot 10^3$ рад / с.

Полоса пропускания фильтра: $4\,817 < \omega < \infty$ рад / с.

Задача 3.

Мост Вина.

$$R_1 = R_2 = R = 1000 \text{ Ом}; \quad C_1 = C_2 = C = 1 \cdot 10^{-6} \text{ Ф.}$$

Определить передаточные характеристики.

Эквивалентная схема замещения

(делитель напряжения).

Комплексная передаточная функция по напряжению:

$$\underline{K}_U(j\omega) = \underline{U}_2 / \underline{U}_1 = \underline{Z}_2 / (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2),$$

где $\underline{Z}_1 = R + 1/j\omega C$; $\underline{Z}_2 = (R/j\omega C) / (R + 1/j\omega C)$.

Введем оператор Хевисайда ($p = j\omega$), тогда:

$$\underline{Z}_1(p) = R + 1/pC; \quad \underline{Z}_2(p) = \frac{R}{R + \frac{1}{pC}} = \frac{R}{pRC + 1}.$$

$$\underline{K}(p) = \frac{\underline{Z}_2(p)}{\underline{Z}_1(p) + \underline{Z}_2(p)} = \frac{pRC}{p^2 R^2 C^2 + p3RC + 1}.$$

Проведя обратную замену ($p = j\omega$) и подставив значения параметров схемы, получим:

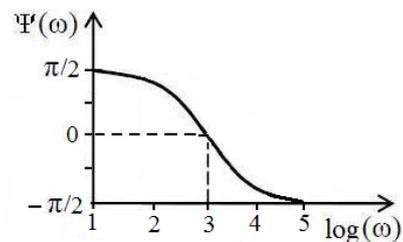
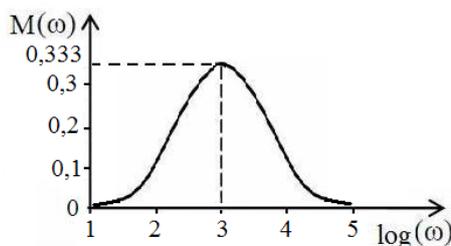
$$\underline{K}(j\omega) = \frac{1000 \omega}{\omega^4 + 7 \cdot 10^6 \omega^2 + 10^{12}} [3 \cdot 10^3 \omega - j(\omega^2 - 10^6)].$$

Амплитудно-частотная характеристика:

$$M(\omega) = \frac{\omega \cdot 10^3}{\sqrt{\omega^4 + \omega^2 \cdot 7 \cdot 10^6 + 10^{12}}}.$$

Фазо-частотная характеристика:

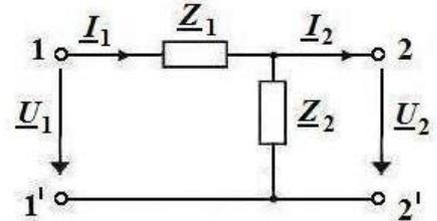
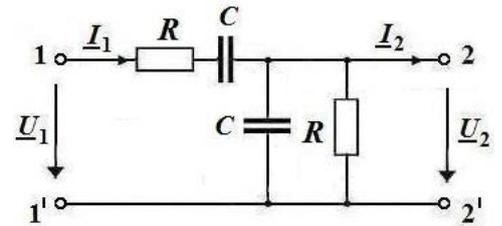
$$\Psi(\omega) = \text{arctg} \left(\frac{10^6 - \omega^2}{3 \cdot 10^3 \omega} \right).$$



Характеристики четырехполюсника.

Параметры частотных характеристик. Фильтр полосовой.

Частота соответствующая максимуму АЧХ: $\omega_M = 10^3$ рад/с, $M(\omega_M) = 0,333$, $\Psi(\omega_M) = 0^\circ$.



Полоса пропускания.

Граничные частоты соответствуют уровню $M(\omega_{ГР}) = 0.707 \cdot 0,333 = 0,235$.

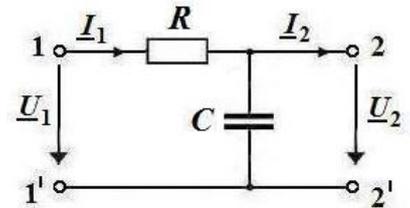
$\omega_H = 303,3$ рад/с, $\omega_B = 3,308 \cdot 10^3$ рад/с, полоса пропускания - $\omega_B - \omega_H = 3,005 \cdot 10^3$ рад/с.

Дополнительные задачи

Задача 1.

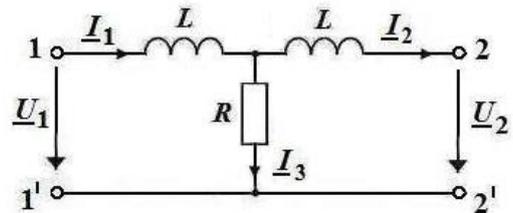
Для заданной схемы четырехполюсника:

1. определить передаточную функцию по напряжению для ненагруженного четырехполюсника;
2. определить модуль и аргумент передаточной функции четырехполюсника при подключении нагрузки $Z_H = R$.



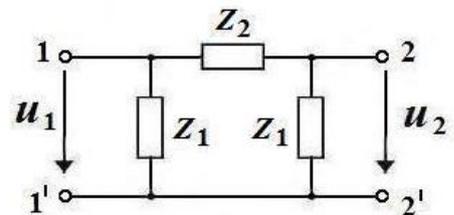
Задача 2.

Для T-образного четырехполюсника показанного на рисунке, определить передаточные функции: по напряжению в режиме холостого хода и по току в режиме короткого замыкания.



Задача 3.

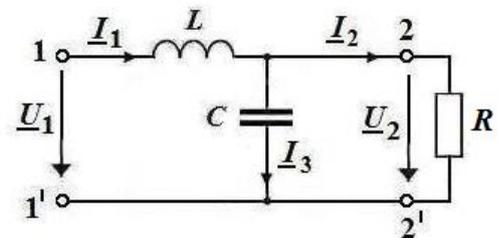
Для П-образного симметричного четырехполюсника показанного на рисунке, определить передаточные функции: по напряжению в режиме холостого хода и по току в режиме короткого замыкания.



Задача 4.

Г-образный четырёхполюсник, нагружен активным сопротивлением $R = 50$ Ом, определить выражение передаточной функции по напряжению, если:

$L = 0,5$ Гн, $C = 40$ мкФ.



Ответ: $K(j\omega) = \frac{1}{(1 + j\omega \cdot 0,98 \cdot 10^{-2})(1 + j\omega \cdot 0,02 \cdot 10^{-2})}$.