

## Символический метод расчета линейных цепей синусоидального тока.

### Баланс мощности

#### Цель.

Изучить методику расчёта символическим методом линейных цепей синусоидального тока. Получить практические навыки действий с комплексными числами. Научится определять показания приборов, составлять баланс мощности цепей синусоидального тока.

### Типовые задачи

#### Задача 1.

Записать закон изменения напряжений во времени, если известны их комплексные значения:

$$\underline{U}_{m1} = 10 e^{-j30^\circ}; \quad \underline{U}_{m2} = (5 + j7); \quad \underline{U}_3 = (-5 + j7).$$

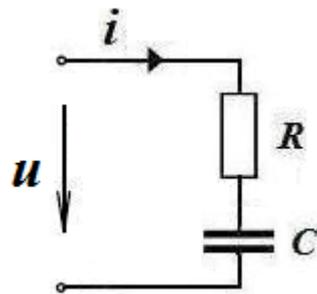
#### Ответы:

$$u_1(t) = 10 \sin(\omega t - 30^\circ) \text{ В}; \quad u_2(t) = 8,6 \sin(\omega t + 54,46^\circ) \text{ В};$$

$$u_3(t) = 8,6\sqrt{2} \sin(\omega t + 126,14^\circ) \text{ В}.$$

#### Задача 2.

Ток на входе пассивного двухполюсника, сопротивление которого имеет емкостной характер, при напряжении  $u = 1 \sin 5000t$  В; равен  $i = 0,5 \sin(5000t + \pi/6)$  А.



Как изменится ток, если частоту напряжения уменьшить вдвое?

#### Решение:

$$\underline{Z} = \underline{U}_m / \underline{I}_m = 1 e^{j0^\circ} / 0,5 e^{j30^\circ} = 2 e^{-j30^\circ} = (1,73 - j) \text{ Ом},$$

$$R = 1,73 \text{ Ом}; \quad X_C = 1 \text{ Ом}.$$

$$\text{При } \omega' = 2500 \text{ рад/с } R' = 1,73 \text{ Ом}; \quad X_C' = 2 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}' = R' - jX_C' = 1,73 - j2 = 2,644 e^{-j49^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{I}_m' = \underline{U}_m / \underline{Z}' = 1 e^{j0^\circ} / 2,644 e^{-j49^\circ} = 0,378 e^{j49^\circ} \text{ А}.$$

$$\text{Ответ: } i' = 0,378 \sin(2500t + 49^\circ) \text{ А}.$$

### Задача 3.

Определить активную, реактивную и полную мощность пассивного двухполюсника, если напряжение и ток на его входе равны:

$$u = 14,1 \sin(314 t + 80^\circ) \text{ В}; \quad i = 14,1 \sin(314 t + 20^\circ) \text{ А.}$$

#### Решение:

$$\underline{S} = \underline{U} \tilde{\underline{I}} = UI \cos \varphi + j UI \sin \varphi = P + j Q = 10 e^{j80^\circ} 10 e^{-j20^\circ} = 100 e^{j60^\circ} = (50 + j 86,6) \text{ ВА. } \varphi = \psi_u - \psi_i = 80^\circ - 20^\circ = 60^\circ.$$

$$S = UI = 100 \text{ ВА}; \quad P = UI \cos \varphi = 50 \text{ Вт}; \quad Q = UI \sin \varphi = 86,6 \text{ Вар.}$$

$$\text{Ответ: } S = UI = 100 \text{ ВА}; \quad P = 50 \text{ Вт}; \quad Q = 86,6 \text{ Вар.}$$

### Задача 4.

Ток катушки, напряжение на входе которой  $u = 120 \sin 1000 t$  В, равен  $i = 8 \sin(1000 t - 53^\circ)$  А.

Как изменится ток, если частоту напряжения уменьшить вдвое? Определить активную, реактивную и полную мощность цепи в этом случае.

#### Решение:

$$\underline{Z}_K = \underline{U}_m / \underline{I}_m = 120 e^{j0^\circ} / 8 e^{-j53^\circ} = 15 e^{j53^\circ} = (9 + j12) \text{ Ом,}$$

$$R_K = 9 \text{ Ом}; \quad X_{LK} = 12 \text{ Ом.}$$

$$\text{При } \omega' = 500 \text{ рад/с } R_K' = 9 \text{ Ом}; \quad X_{LK}' = \omega' L = \omega L / 2 = 6 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_K' = R_K' - j X_{LK}' = 9 - j 6 = 10,8 e^{j33,7^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{I}_m' = \underline{U}_m / \underline{Z}_K' = 120 e^{j0^\circ} / 10,8 e^{j33,7^\circ} = 11 e^{-j33,7^\circ} \text{ А.}$$

$$i' = 11 \sin(500 t - 33,7^\circ) \text{ А.}$$

$$\underline{S}_K' = \underline{U} \tilde{\underline{I}} = 120 \cdot 11/2 \cdot e^{j0^\circ} e^{j33,7^\circ} = 660 e^{j33,7^\circ} \text{ ВА};$$

$$P_K' = \text{Re}[\underline{S}'] = 544,5 \text{ Вт}; \quad Q_{LK}' = \text{Im}[\underline{S}'] = 363 \text{ Вар.}$$

$$\text{Ответ: } i' = 11 \sin(500 t - 33,7^\circ) \text{ А}; \quad P_K' = 544,5 \text{ Вт}; \quad Q_{LK}' = 363 \text{ Вар.}$$

### Задача 5.

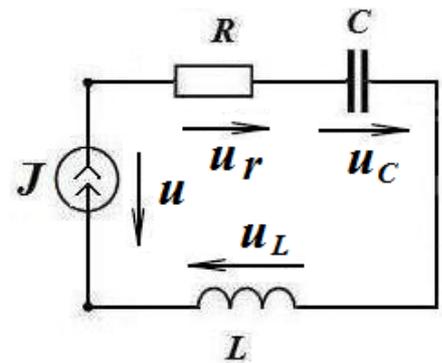
Цепь подключена к источнику тока

$J = 2 \sin(\omega t + 30^\circ)$  А с частотой  $f = 200$  Гц.

Параметры цепи:  $R = 100$  Ом;  $L = 0,01$  Гн;

$C = 80$  мкФ.

Найти  $u$ ,  $u_R$ ,  $u_L$ ,  $u_C$ , построить векторную диаграмму напряжений.



### Решение:

$$i = 2 \sin(\omega t + 30^\circ) \text{ А}; \quad \underline{I}_m = 2 e^{j30^\circ};$$

$$\underline{U}_{mR} = R \underline{I}_m = 100 \cdot 2 e^{j30^\circ} = 200 e^{j30^\circ} \text{ В};$$

$$u_R = 200 \sin(\omega t + 30^\circ) \text{ В};$$

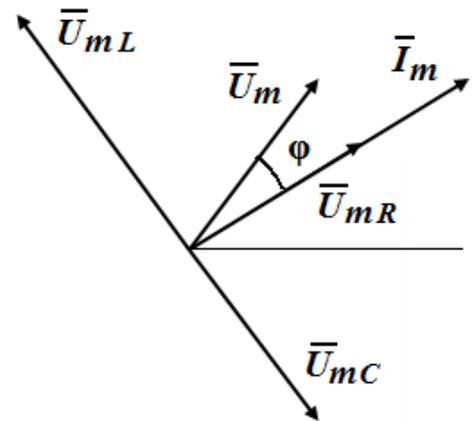
$$\underline{U}_{mC} = -j X_C \underline{I}_m = (-j / 2\pi f C) \cdot \underline{I}_m = (-j / 6,28 \cdot 200 \cdot 80 \cdot 10^{-6}) \cdot 2 e^{j30^\circ} =$$

$$= 20 e^{-j60^\circ} \text{ В}; \quad u_C = 20 \sin(\omega t - 60^\circ) \text{ В};$$

$$\underline{U}_{mL} = j X_L \underline{I}_m = j 2\pi f L \cdot \underline{I}_m = j 6,28 \cdot 200 \cdot 0,01 \cdot 2 e^{j30^\circ} = 25,12 e^{j120^\circ} \text{ В};$$

$$u_L = 25,12 \sin(\omega t + 120^\circ) \text{ В};$$

$$\underline{U}_m = \underline{U}_{mR} + \underline{U}_{mC} + \underline{U}_{mL} = 200 e^{j30^\circ} + 20 e^{-j60^\circ} + 25,12 e^{j120^\circ} = 206 e^{j44^\circ} \text{ В}; \quad u = 206 \sin(\omega t + 44^\circ) \text{ В}.$$



По вычисленным значениям комплексов искомых величин строим векторную диаграмму.

**Ответ:**  $u = 206 \sin(\omega t + 44^\circ)$  В;  $u_R = 200 \sin(\omega t + 30^\circ)$  В;

$u_C = 20 \sin(\omega t - 60^\circ)$  В;  $u_L = 25,12 \sin(\omega t + 120^\circ)$  В.

### Задача 6.

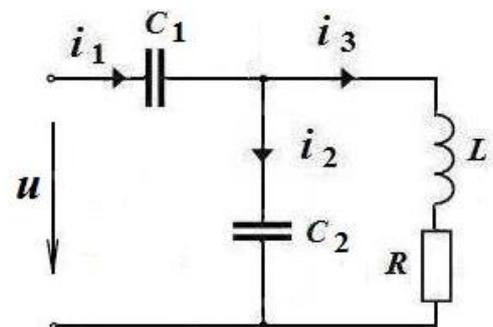
Напряжение на конденсаторе  $C_1$  равно

$$u = 5\sqrt{2} \sin 10^5 t \text{ В}.$$

Определить  $\underline{U}$ ,  $\underline{I}_1$ ,  $\underline{I}_2$ ,  $\underline{I}_3$ ,

если:  $C_1 = 10$  мкФ;  $C_2 = 5$  мкФ;

$R = 1$  Ом;  $L = 0,02$  мГн.



**Решение:**

$$\underline{U}_1 = 5 e^{j0^\circ} \text{ В}; \quad X_{C1} = 1 / \omega C_1 = 1 / 10^5 \cdot 10 \cdot 10^{-6} = 1 \text{ Ом};$$

$$X_{C2} = 1 / \omega C_2 = 2 \text{ Ом}; \quad X_L = \omega L = 10^5 \cdot 0,02 \cdot 10^{-3} = 2 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_2 = -j X_{C2} = -j 2 \text{ Ом}; \quad \underline{Z}_3 = R + j X_L = 1 + j 2 \text{ Ом};$$

$$\underline{I}_1 = \underline{U}_1 / -j X_{C1} = 5 - j 1 = 5 e^{j90^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_1 \underline{Z}_3 / (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) = 5 e^{j90^\circ} \cdot (1 + j 2) / (-j 2 + 1 + j 2) = 11,18 e^{j153^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_1 \underline{Z}_2 / (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) = 5 e^{j90^\circ} \cdot (-j 2) / (-j 2 + 1 + j 2) = 10 \text{ А};$$

$$\underline{U} = (-j X_{C1}) \cdot \underline{I}_1 + (-j X_{C2}) \cdot \underline{I}_2 = 25 e^{j53^\circ} \text{ В}.$$

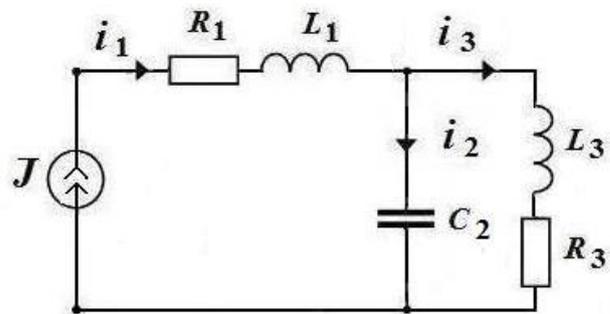
**Задача 7.**

Определить:  $\underline{I}_1, \underline{I}_2, \underline{I}_3$ , если:

$$R_1 = 2 \text{ Ом}; \quad X_1 = 26 \text{ Ом};$$

$$X_2 = 10 \text{ Ом}; \quad R_3 = 10 \text{ Ом};$$

$$X_3 = 10 \text{ Ом}; \quad P_r = 1,2 \text{ кВт}.$$

**Решение:**

$$\underline{Z}_{ab} = (-j X_2) (R_3 + j X_3) / (-j X_2 + R_3 + j X_3) =$$

$$= (-j 10) (10 + j 10) / (-j 10 + 10 + j 10) = (10 - j 10) \text{ Ом};$$

$$R_{\text{экв}} = R_1 + R_{ab} = 2 + 10 = 12 \text{ Ом};$$

$$\underline{I}_1 = \sqrt{\frac{P_r}{R_{\text{экв}}}} = \sqrt{\frac{1,2 \cdot 10^{-3}}{12}} = 10 \text{ А}; \quad \underline{I}_1 = 10 e^{j0^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_1 (R_3 + j X_3) / (-j X_2 + R_3 + j X_3) =$$

$$= 10 e^{j0^\circ} \cdot 10\sqrt{2} e^{j45^\circ} / 10 = 10\sqrt{2} e^{j45^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_1 (-j X_2) / (-j X_2 + R_3 + j X_3) = 10 \cdot 10\sqrt{2} e^{-j90^\circ} / 10 = 10\sqrt{2} e^{-j90^\circ} \text{ А}.$$

Проверка:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 10 + j 10 - j 10 = 10 \text{ А}.$$

$$\text{Ответ: } \underline{I}_1 = 10 e^{j0^\circ} \text{ А}; \quad \underline{I}_2 = 10\sqrt{2} e^{j45^\circ} \text{ А}; \quad \underline{I}_3 = 10\sqrt{2} e^{-j90^\circ} \text{ А}.$$

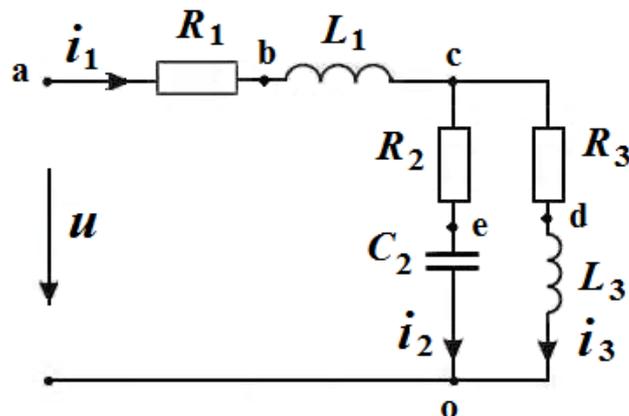
**Задача 8.** Рассчитать токи в ветвях электрической цепи синусоидального тока показанной на рисунке, если:

$$U = 120 \text{ В}, \quad R_1 = 10 \text{ Ом},$$

$$R_2 = 24 \text{ Ом}, \quad R_3 = 15 \text{ Ом},$$

$$L_1 = 19,1 \text{ мГн}, \quad L_3 = 63,5 \text{ мГн},$$

$$C_2 = 455 \text{ мкФ}, \quad f = 50 \text{ Гц}.$$



Проверить баланс мощностей.

Построить топографическую диаграмму.

**Решение.** Комплексные сопротивления ветвей схемы:

$$\underline{Z}_1 = R_1 + jX_1 = 10 + j2\pi \cdot 50 \cdot 19,1 \cdot 10^{-3} = 10 + j6 = 11,6 e^{j31^\circ} \text{ Ом}.$$

$$\underline{Z}_2 = R_2 - jX_2 = 24 - j10^6 / 2\pi \cdot 50 \cdot 455 = 24 - j7 = 25 e^{-j16^\circ 15'} \text{ Ом}.$$

$$\underline{Z}_3 = R_3 + jX_3 = 15 + j2\pi \cdot 50 \cdot 63,5 \cdot 10^{-3} = 15 + j20 = 25 e^{j53^\circ 05'} \text{ Ом}.$$

Комплексное эквивалентное сопротивление цепи относительно входных зажимов

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3 / (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) = \\ &= 10 + j6 + (24 - j7)(15 + j20) / (39 + j13) = \\ &= 24,4 + j10,8 = 26,7 e^{j23^\circ 55'} \text{ Ом}. \end{aligned}$$

Ток в неразветвленной части цепи (так как начальная фаза входного напряжения не задана, то принимаем ее равной нулю):

$$\underline{I}_1 = \underline{U} / \underline{Z}_1 = 120 / 26,7 e^{j23^\circ 55'} = 4,5 e^{-j23^\circ 55'} \text{ А}.$$

Токи  $\underline{I}_2$  и  $\underline{I}_3$  в параллельных ветвях можно выразить через ток в неразветвленной части цепи по «формуле разброса»:

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_1 \cdot \underline{Z}_3 / (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) = 4,5 e^{-j23^\circ 55'} \cdot (15 + j20) / (39 + j13) = 2,74 e^{j10^\circ 45'} \text{ А};$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_1 \cdot \underline{Z}_2 / (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) = 4,5 e^{-j23^\circ 55'} \cdot (24 - j7) / (39 + j13) = 2,74 e^{-j58^\circ 35'} \text{ А}.$$

Мощность источника напряжения:

$$\underline{S}_{\text{И}} = \underline{U} \underline{I}^* = P_{\text{И}} + jQ_{\text{И}} = 120 \cdot 4,5 e^{j23^\circ 55'} = 540 e^{j23^\circ 55'} = (494 + j219) \text{ ВА.}$$

Активная мощность потребителей:

$$P_{\text{П}} = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2 = 10 \cdot 4,5^2 + 24 \cdot 2,74^2 + 15 \cdot 2,74^2 = 494 \text{ Вт.}$$

Реактивная мощность потребителей:

$$Q_{\text{П}} = X_1 I_1^2 - X_2 I_2^2 + X_3 I_3^2 = 6 \cdot 4,5^2 - 7 \cdot 2,74^2 + 20 \cdot 2,74^2 = 219 \text{ Вар.}$$

Таким образом, баланс мощностей выполняется.

Построим векторную диаграмму токов и топографическую диаграмму напряжений для решенной задачи.

$$\underline{\varphi}_o = 0; \quad \underline{\varphi}_e = \underline{\varphi}_o - jX_2 \underline{I}_2 = -j7 \cdot 2,74 e^{j10^\circ 45'} = 19,8 e^{-j79^\circ 15'} = (3,7 - j19,45) \text{ В;}$$

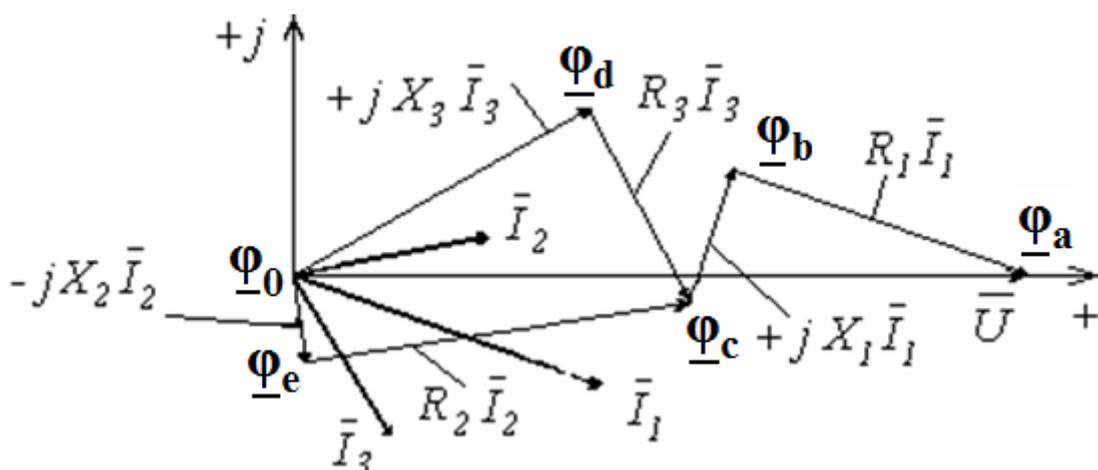
$$\underline{\varphi}_c = \underline{\varphi}_e + R_2 \underline{I}_2 = (3,7 - j19,45) + 24 \cdot 2,74 e^{j10^\circ 45'} = (68,3 - j7,18) \text{ В;}$$

$$\underline{\varphi}_d = \underline{\varphi}_o + jX_{L3} \underline{I}_3 = j20 \cdot 2,74 e^{-j58^\circ 35'} = 54,8 e^{j31^\circ 25'} = (46,7 + j28,63) \text{ В;}$$

$$\underline{\varphi}_c = \underline{\varphi}_d + R_3 \underline{I}_3 = (46,7 + j28,63) + 15 \cdot 2,74 e^{-j58^\circ 35'} = (68,3 - j7,18) \text{ В;}$$

$$\underline{\varphi}_b = \underline{\varphi}_c + jX_1 \underline{I}_1 = (68,3 - j7,18) + j6 \cdot 4,5 e^{-j23^\circ 55'} = (79,3 + j17,5) \text{ В;}$$

$$\underline{\varphi}_a = \underline{\varphi}_b + R_1 \underline{I}_1 = (79,3 + j17,5) + 10 \cdot 4,5 e^{-j23^\circ 55'} = (120,3 - j0,5) \approx 120 \text{ В.}$$



### Задача 9.

Построить топографическую диаграмму цепи и составить баланс мощностей, если :

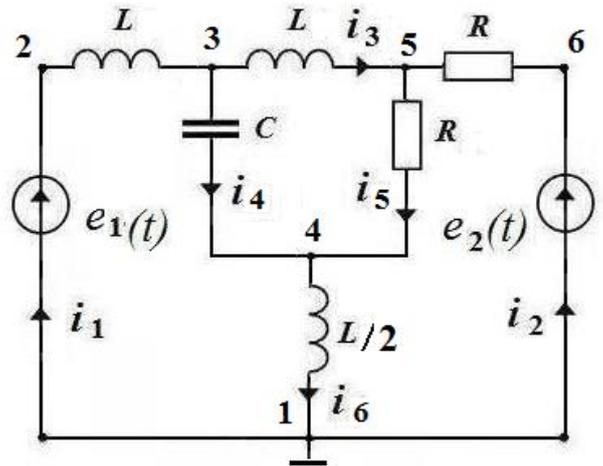
$$\underline{E}_1 = 6 \text{ В}; \quad \underline{E}_2 = 6 e^{j90^\circ} \text{ В};$$

$$R = X_L = X_C = 3 \text{ Ом};$$

$$\underline{I}_1 = 1 \text{ А}; \quad \underline{I}_2 = 2,24 e^{j63,4^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{I}_3 = 3,17 e^{-j108,25^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{I}_4 = 3,62 e^{j56,5^\circ} \text{ А}; \quad \underline{I}_5 = 1,02 e^{-j90^\circ} \text{ А}; \quad \underline{I}_6 = 2,83 e^{j45^\circ} \text{ А}.$$



### Решение:

Топографическая диаграмма;

$$\varphi_1 = 0; \quad \varphi_2 = \varphi_1 + \underline{E}_1 = 6 e^{j0^\circ} \text{ В}; \quad \varphi_3 = \varphi_2 - j X_L \underline{I}_1 = 6 - j 3 \cdot 1 = (6 - j 3) \text{ В};$$

$$\varphi_4 = \varphi_3 - (-j X_C \underline{I}_4) = 6 - j 3 + j 3 \cdot 3,62 e^{j56,5^\circ} = (-3,07 + j 3) \text{ В};$$

$$\varphi_5 = \varphi_4 + R \underline{I}_5 = (-3,07 + j 3) + 3 (-j 1,02) = (-3,07 - j 0,06) \text{ В};$$

$$\varphi_6 = \varphi_5 + R \underline{I}_2 = (-3,07 - j 0,06) + 3 \cdot 2,24 e^{j63,4^\circ} = j 6 \text{ В};$$

$$\varphi_1 = \varphi_6 - \underline{E}_2 = j 6 - j 6 = 0 \text{ В}.$$

В соответствии с полученными значениями потенциалов точек и выбранным масштабом на комплексной плоскости строится топографическая диаграмма, совмещенная с векторной диаграммой токов.

### Баланс мощностей:

$$\check{S}_\Gamma = \underline{E}_1 \check{I}_1 + \underline{E}_2 \check{I}_2 = 6 \cdot 1 + j 6 \cdot 2,24 e^{-j63,4^\circ} = (18,04 + j 6) \text{ ВА};$$

$$P_\Gamma = 18,04 \text{ Вт}; \quad Q_\Gamma = 6 \text{ ВАр}.$$

$$\begin{aligned} \check{S}_\Pi &= R \underline{I}_2^2 + R \underline{I}_5^2 + j X_L \underline{I}_1^2 + j X_L \underline{I}_3^2 + j X_L \underline{I}_6^2 / 2 - j X_C \underline{I}_4^2 = \\ &= 3 \cdot 2,24^2 + 3 \cdot 1,02^2 + j 3 \cdot 1^2 + j 3 \cdot 3,17^2 + j 1,5 \cdot 2,83^2 - j 3 \cdot 3,62^2 = \\ &= (18,1 + j 6) \text{ ВА}; \quad P_\Pi = 18,1 \text{ Вт}; \quad Q_\Pi = 6 \text{ ВАр}. \end{aligned}$$

## Дополнительные задачи

### Задача 1.

В последовательном контуре с реальной катушкой индуктивности ( $R = 50 \text{ Ом}$ ;  $L = 20 \text{ мГн}$ ) и конденсатором ( $C = 1 \text{ мкФ}$ ) задан ток  $i = 0,5 \cos 10^4 t \text{ А}$ .

Определить мгновенные значения напряжений на катушке и на входе цепи.

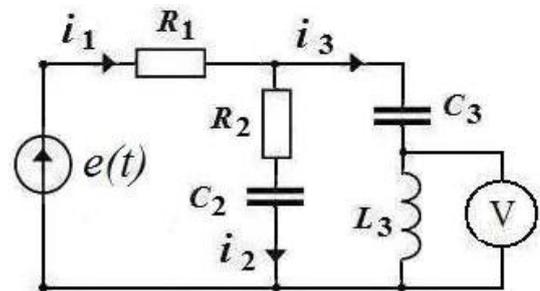
**Ответ:**  $u_K = 103 \cos (10^4 t + 76^\circ) \text{ В}$ ;  $u = 66 \cos (10^4 t + 63,5^\circ) \text{ В}$ .

### Задача 2.

В цепи с  $R_1 = 30 \text{ Ом}$ ;  $R_2 = 10 \text{ Ом}$ ;  
 $X_{C2} = 60 \text{ Ом}$ ;  $X_{L3} = 20 \text{ Ом}$ ;  
 $e = 30 \sin (314 t + 90^\circ) \text{ В}$ .

Определить показание вольтметра.

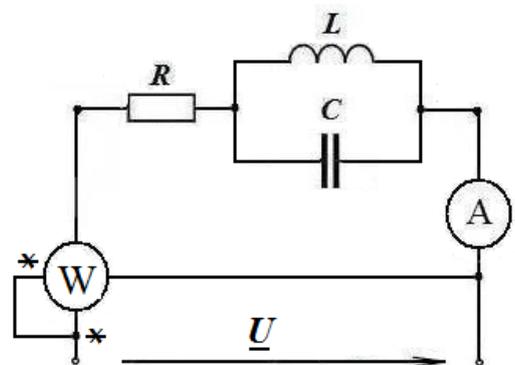
**Ответ:**  $U = 14,1 \text{ В}$ .



### Задача 3.

Определить показания приборов в цепи с  $R = X_L = 5 \text{ Ом}$ ;  $X_C = 2,5 \text{ Ом}$  при  $u = 100 \sin \omega t \text{ В}$ .

**Ответ:**  $I = 10 \text{ А}$ ;  $P = 500 \text{ Вт}$ .



### Задача 4.

Определить показание амперметра методом эквивалентного активного двухполюсника, если

$E = 10 \text{ В}$ ;  $X_1 = X_2 = 5 \text{ Ом}$ ;  
 $X_3 = R_4 = 10 \text{ Ом}$ ;  $R_5 = 2,5 \text{ Ом}$ .

**Ответ:**  $0,632 \text{ А}$ .

