Тема 9. Детерминированные модели управления запасами

Управление запасами должно давать ответ на два основных вопроса: когда размещать заказ на пополнение запаса и как много ресурса (товара, продукта, предметов производства) заказывать?

Рассмотрим основные положения управления запасами на идеальной модели которая строится исходя из следующих предположений:

1) интенсивность (скорость) потребления ресурса (товара, продукта, предметов производства) из запаса известна и постоянна;

2) потребление осуществляется мелкими партиями или поштучно, а пополнение (возобновление) запаса – крупной партией;

3) пополнение запаса происходит мгновенно при снижении его уровня до нуля.

Пусть $n_{пост}$ – партия поставки; $R_{пост}$ – ритм поставки, тогда интенсивность потребления может быть рассчитана как: $I = n_{пост}/R_{пост}$. На идеальной модели аналитически решается лишь один вопрос из двух, поставленных ранее, а именно: определяется величина оптимальной партии поставки ресурса. Графическое представление идеальной модели показано на рисунке 1. В данной модели сделано одно важное допущение: ступенчатая линия потребления ресурса аппроксимирована прямой (поскольку партия поставки существенно больше партии потребления). Тогда, тангенс угла наклона (α**)** этой прямой к временной оси будет равен интенсивности потребления ресурса (т.е. $tg\,\alpha = I$).

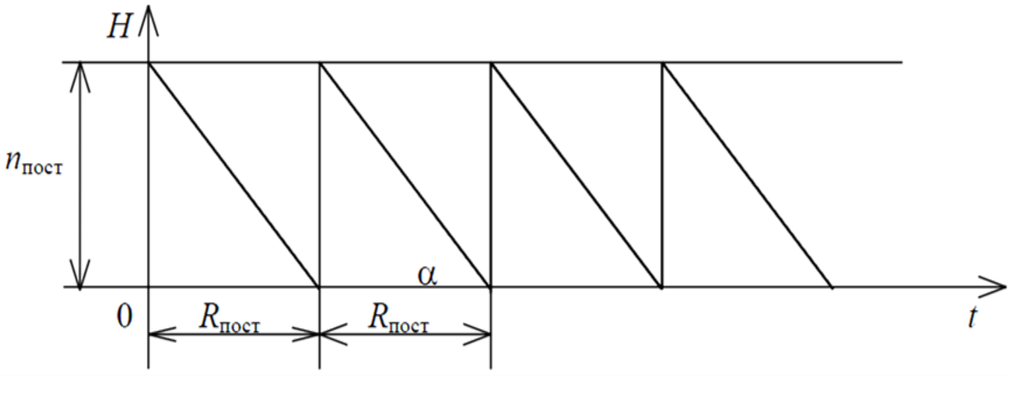

Рисунок 1 – Идеальная модель управления запасом

На идеальной модели аналитически определяется величина оптимальной партии поставки ресурса. При этом исходят из минимизации суммарных затрат на пополнение и хранение ресурса (см. рис. 2):

$$C_{\Sigma} = \frac{DC_0}{n_{пост}} + \frac{n_{пост}C_h}{2} \tag{1}$$

где D – годовой объем потребления ресурса;

C_0 – затраты, обусловленные поставкой очередной партии;

C_h – затраты на хранение единицы запаса в течение года;

Тогда:

$D/ n_{пост}$ – количество партий, получаемых за год;

$(DC_0)/ n_{пост}$ – затраты на поставку ресурса за год;

$n_{пост} /2$ – средний объем хранения;

$(n_{пост}\ C_h)/2$ – средние затраты на хранение запаса за год.

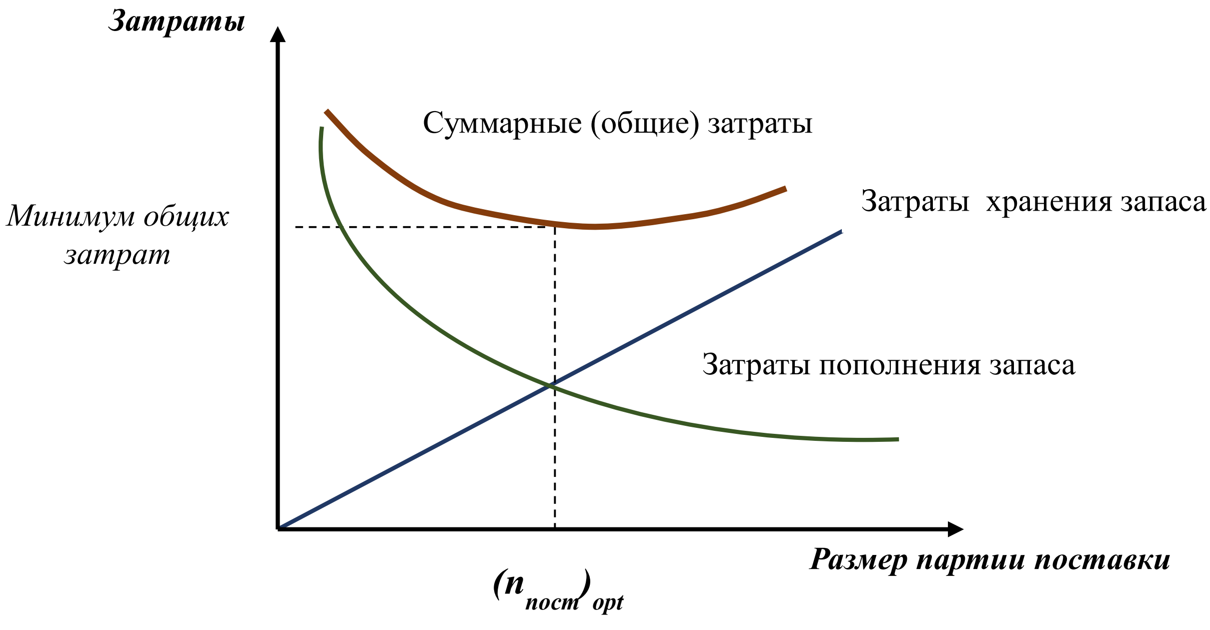

Рисунок 2 – Зависимость затрат от размера партии поставки

Взяв первую производную от функции суммарных затрат (1) и приравняв ее к нулю, получим размер оптимальной партии поставки:

$$(n_{пост})_{opt} = \sqrt{\frac{2DC_0}{C_h}} \tag{2}$$

Либо:

$$(n_{пост})_{opt} = \sqrt{\frac{2DC_0}{C_n f}}\ , \tag{3}$$

где f – доля закупочной цены единицы запаса, приходящаяся на затраты по хранению (содержанию) запаса, %;

C_n – закупочная цена единицы запаса.

Нахождение оптимальной партии поставки автоматически ведет к определению количество поставок и оптимального ритма поставки (продолжительности цикла поставки (времени между поставками)):

$$N=D/\ n_{пост}, \tag{4}$$

где N – количество поставок (количество партий, получаемых за год).

$$R_{пост} = n_{пост}\ /\ I=T/N, \tag{5}$$

где T – количество рабочих дней в году.

В свою очередь минимальные общие затраты могут быть рассчитаны на основе использования формулы (1), либо:

$$C_{\Sigma} = \sqrt{2DC_0C_n f} \tag{6}$$

Использование формул (2), (3) дает устойчивое решение, поскольку допустимы значительные отклонения размера партии от найденного оптимума без существенного роста суммарных затрат (см. рис.2), что используется для корректировки $(n_{пост})_{opt}$ в целях учета ряда факторов, не вошедших в данную модель. Данная модель получила название – модель EOQ (Economic Order Quantity, или модель Уилсона – Харриса).

Классические формулы (2), (3) расчета оптимального размера заказа имеют множество различных модификаций, позволяющих учесть разнообразные варианты работы с запасом в условиях современного бизнеса. Рассмотрим некоторые из них более подробно.

Будем считать, что исполнение заказа на поставку очередной партии происходит не мгновенно, а за конечное время $T_{пост}$> 0. Это время требуется для оформления документации, на изготовление или закупку партии, ее доставку на склад, входной контроль и т.п. Будем считать, что оно практически не зависит от размера партии поставки.

Простейшей моделью, соответствующей этому условию, является так называемая **модель производственного запаса** (отличается от EOQ тем, что пополнение запаса происходит не скачком, а постепенно, по мере изготовления партии поставки) см. рис. 3. Пунктирная прямая показывает, как нарастал бы запас, если бы одновременно с пополнением он не потреблялся. Тангенс угла наклона (β) этой прямой к оси времени равен интенсивности производства ресурса и пополнения запаса, т.е. $tg\,\beta = P$.

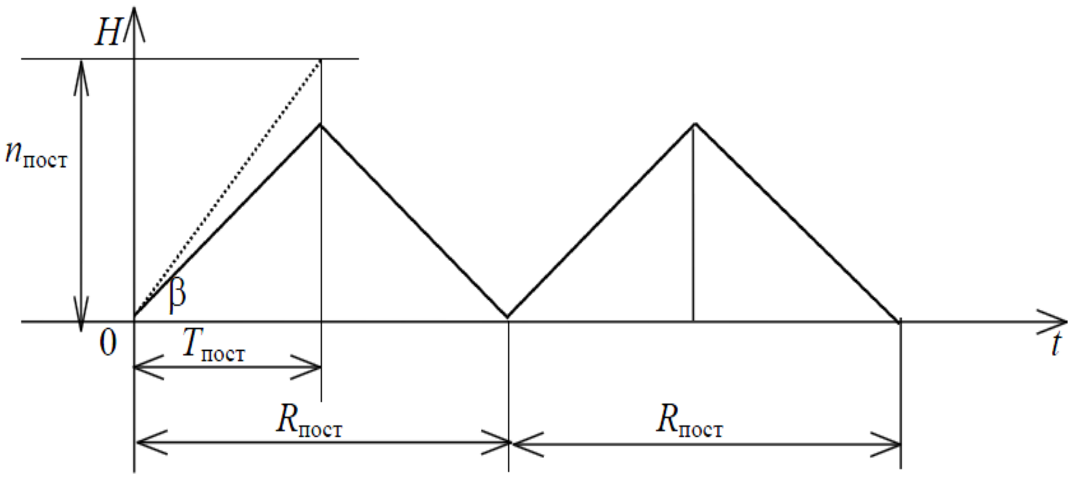

Рисунок 3 – Модель производственного запаса

Пусть $T_{пост}$ – срок изготовления и поставки очередной партии,

P – интенсивность изготовления (пополнения запаса), тогда:

$$P = n_{пост} / T_{пост} \tag{7}$$

Таким образом:

$$n_{пост} = \sqrt{\frac{2DC_0}{C_h(1-\frac{I}{P})}} \tag{8}$$

$$C_\Sigma = \frac{DC_0}{n_{пост}} + \frac{n_{пост}C_h(P-I)}{2P} \tag{9}$$

Данная модель называется моделью производственного запаса, поскольку она как правило встречается в условиях производства, где запас изделий создается между двумя смежными рабочими местами, участками и т.д. При этом затраты, обусловленные поставкой очередной партии, в данном случае, трактуются как затраты на переналадку производящего подразделения, а интенсивность P – как его производительность.

На практике часто используется еще один тип моделей, получаемый расширением модели EOQ. Суть модели − **в учете скидки (дисконта) с цены закупаемого ресурса** при увеличении объема партии.

Среди различного вида скидок в управлении запасами наиболее часто используются оптовые скидки. Применение оптовых скидок означает, что цена единицы продукции зависит от объема закупаемой партии, при этом соблюдается правило, чем больше объем партии поставки, тем меньше цена единицы продукции. Следует отметить, что иногда могут предоставляться дифференциальные скидки, при использовании которых скидки для каждой партии товара учитываются раздельно в каждом ценовом диапазоне.

При расчетах параметров модели EOQ с учетом оптовых скидок возможны различные ситуации. Наиболее часто встречается первая ситуация, когда затраты на содержание (хранение) запаса не зависят от цены приобретения.

Вторая ситуация, когда вместе с изменением цены приобретения продукции пропорционально изменяются и затраты на содержание (хранение) запаса.

Третья ситуация при которой между изменениями цены приобретения продукции и затратами на хранение не наблюдается однозначной зависимости.

Рассмотрим последовательность расчета параметров модели EOQ для первой ситуации.

Снижение цены на продукцию предприятия-поставщика (учет оптовых скидок) может быть представлено в виде дискретной зависимости (см. рис. 4).

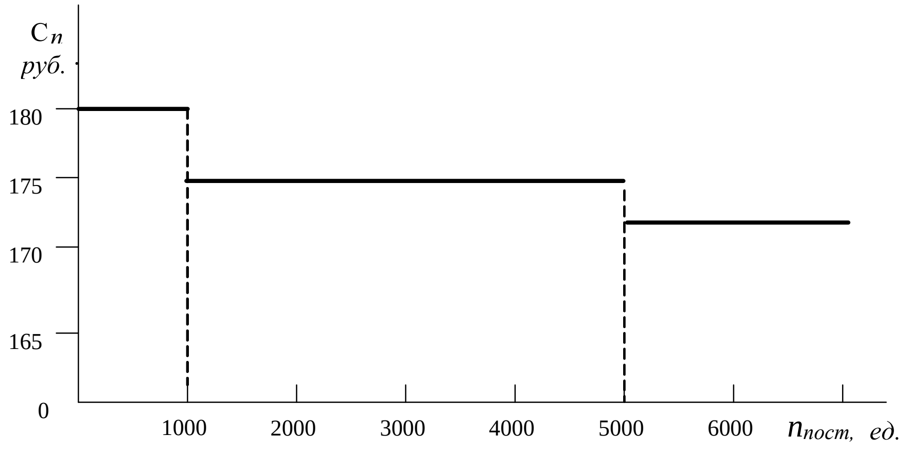

Рисунок 4 – Зависимость оптовой цены продукции от объема заказа

На данном рисунке показана ситуация, когда при величине заказа $n_{пост}$ $\leq$1000 ед. продукции цена единицы товара C_{n1} =180 руб.; при величине заказа от 1000 до 5000 ед. цена единицы товара C_{n2} =175 руб.; и, наконец, при величине заказа больше 5000 ед. цена единицы товара C_{n3} =172 руб. Допустим, что затраты на заказ у предприятия-потребителя данной продукции составляют 400 руб., а текущие затраты на хранение единицы данной продукции – 20 руб./ед. год, величина годовой потребности в продукции данного наименования – 10000 ед. Необходимо найти размер оптимальной партии закупки данной продукции с учетом предлагаемых скидок.

Использование формулы (2) позволяет найти размер оптимальной партии поставки:

$$(n_{пост})_{opt} = \sqrt{\frac{2 \times 10000 \times 400}{20}} = 632 \text{ ед.}$$

Что позволяет сделать вывод о том, что оптимальная партия попадает в первый ценовой интервал. Это значит, что меньшие суммарные затраты могут быть только на границах – в начале второго или третьего ценовых интервалов. Проверим эти точки: рассчитав в них суммарные затраты на закупку, пополнение и содержание (хранение) запаса (см. формулу 4 темы 3).

При закупке продукции оптимальными партиями по 632 ед., суммарные затраты составят:

$$C_{\Sigma} = 10000 \times 180 + \frac{10000 \times 400}{632} + \frac{632 \times 20}{2} = 1812649 \text{ руб.}$$

При закупке партиями по 1000 ед. (нижняя граница второго интервала):

$$C_{\Sigma} = 10000 \times 175 + \frac{10000 \times 400}{1000} + \frac{1000 \times 20}{2} = 1764000 \text{ руб.}$$

При закупке партиями по 5000 ед. (нижняя граница третьего интервала):

$$C_{\Sigma} = 10000 \times 172 + \frac{10000 \times 400}{5000} + \frac{5000 \times 20}{2} = 1770800 \text{ руб.}$$

Следовательно, при закупках продукции оптимальными партиями, рассчитанными на основе использования формулы (2), суммарные затраты окажутся выше, чем при закупках партиями большего размера (ввиду того, что скидки оказывают существенное влияние на данную величину). Проведенный расчет показывает, что из двух граничных точек необходимо выбрать минимальный размер партии равный 1000 ед. (т.е. второй ценовой интервал).

Модель планирования дефицита. В некоторых случаях затраты хранения являются очень высокими. Поэтому имеет смысл допустить регулярные интервалы времени когда товар на складе отсутствует. В этом случае возможны два подхода:

1) полученная новая продукция не идет на выполнение заявок на товар во время его отсутствия;

2) часть полученной новой продукции идет на погашение всех заявок, оставленных во время отсутствия запасов.

Рассмотрим эти случаи подробнее.

Случай невыполнения заявок (см. рис. 5). На графике периоды дефицита условно изображены ниже оси времени, а величина S – максимальный размер дефицита (максимально возможное число единиц товара (продукта и т.д.), которое могло быть реализовано за время его отсутствия в каждом цикле).

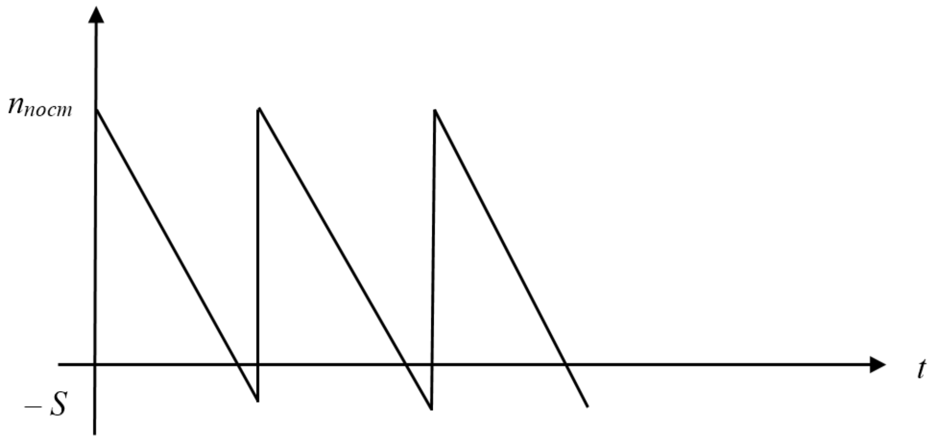

Рисунок 5 – Модель планирования дефицита. Случай невыполнения заявок

Формула для расчета размера оптимальной партии поставки:

$$n_{пост} = \sqrt{\frac{2DC_0}{C_h}} \times \sqrt{\frac{C_b}{C_h + C_b}}, \quad (10)$$

где C_b –годовая стоимость отсутствия единицы продукции в запасе (потеря доверия клиентов, нереализованная продукция и т.д.).

Максимальный размер дефицита может быть определен как:

$$S = \sqrt{\frac{2DC_0}{C_b}} \times \sqrt{\frac{C_h}{C_h + C_b}} \quad (11)$$

В свою очередь:

$$C_\Sigma = \frac{DC_0}{n_{пост} + S} + \frac{n_{пост}^2 C_h}{2(n_{пост} + S)} + \frac{S^2 C_b}{2(n_{пост} + S)} \quad (12)$$

Случай выполнения заявок.

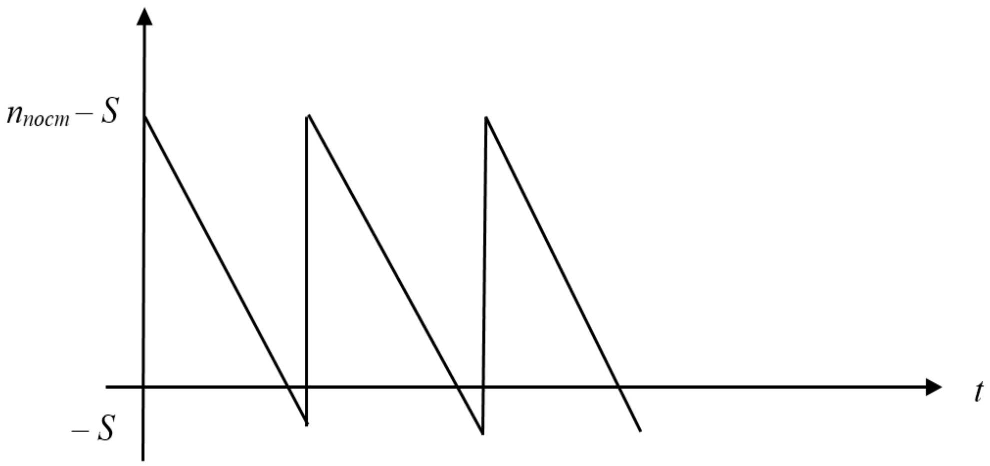

Рисунок 6 – Модель планирования дефицита. Случай выполнения заявок

В данном варианте (см рис.6) максимальный уровень запасов будет равен величине $n_{пост}$ – S. А решение задачи сводится к следующим формульным выражениям:

$$n_{пост} = \sqrt{\frac{2DC_0}{C_h}} \times \sqrt{\frac{C_h + C_b}{C_b}} \quad (13)$$

$$S = \sqrt{\frac{2DC_0}{C_b}} \times \sqrt{\frac{C_h}{C_h + C_b}} \quad (14)$$

$$C_\Sigma = \frac{DC_0}{n_{пост}} + \frac{(n_{пост} - S)^2 C_h}{2n_{пост}} + \frac{S^2 C_b}{2n_{пост}} \quad (15)$$

В свою очередь, реальные модели управления запасами в зависимости от изменения интенсивности потребления ресурса делятся на две группы:

1.Детерминированные (интенсивность потребления ресурса может с равной вероятностью принимать любые значения в заданном интервале);

2. Стохастические (интенсивность потребления ресурса – величина случайная, распределенная по нормальному закону)

В зависимости от способа управления запасом:

1. С фиксированной партией поставки.
2. С фиксированным ритмом поставки.

3. Без фиксации ритма и партии поставки – комбинированный способ.

Рассмотрим основное содержание детерминированных моделей управления запасами.

Модель управления с фиксированной партией поставки. Пусть интенсивность потребления ресурса со склада изменяется, с равной вероятностью принимая любое значение в интервале (I_{min}, I_{max}); время исполнения заказа $T_{пост}$ и размер партии поставки $n_{пост}$ зафиксированы (например, договором с поставщиком ресурса).

Управляющим параметром в этой модели является остаточный уровень запаса на складе. Уровень запаса, при котором должен быть сделан заказ очередной партии, называется точкой заказа $H_{тз}$:

$$H_{тз} = T_{пост}\, I_{max}$$

Уровень запаса, который остается на складе к моменту поставки очередной партии при средней интенсивности потребления ресурса, но расходуется при интенсивности выше средней, называется резервным запасом $H_{рез}$:

$$H_{рез} = H_{тз} – T_{пост}\, I_{ср} = T_{пост}\, (I_{max} – I_{min})/2,$$

где $I_{ср} = (I_{max} + I_{min})/2$

Важным параметром управления является максимальная величина запаса, определяющая необходимую для хранения емкость склада:

$$H_{скл} = H_{тз} – T_{пост}\, I_{min} + n_{пост} = T_{пост}\, (I_{max} – I_{min}) + n_{пост.}$$

При этом, партия поставки не должна быть меньше точки заказа, т.е.:

$$n_{пост} \geq H_{тз} = T_{пост}\, I_{max}\ .$$

Кроме того, если размеры склада, отводимого под хранение данного ресурса, лимитированы, то на величину партии накладывается еще одно ограничение:

$$n_{пост} \leq H_{скл} – T_{пост}\, (I_{max} – I_{min}).$$

При необходимости размер партии поставки должен быть скорректирован. Если это невозможно, то корректируется срок поставки. Расчет оптимальной партии выполняется так же как и в модели EOQ. Пересчет ключевых параметров управления запасом выполняется только при устойчивом изменении параметров потребления ресурса со склада, или при заключении договора с поставщиком на новых условиях.

На рис. 7 на интервале срока поставки показаны три возможных варианта потребления ресурса, формирующие значения основных параметров управления данной модели.

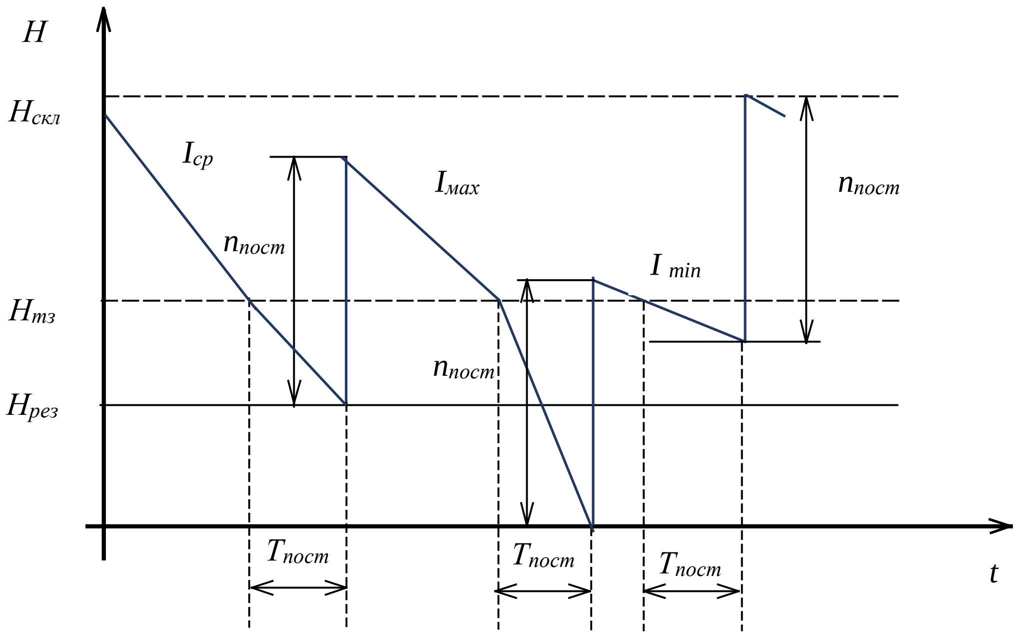

Рисунок 7 – Модель управления запасом с фиксированной партией поставки

Модель управления с фиксированным ритмом поставки. Пусть, как и в предыдущей модели, заданы: I_{min}, I_{max}, $T_{пост}$, а вместо партии поставки по условию договора с поставщиком зафиксирован ритм поставки $R_{пост}$

В такой модели управляющим параметром является время, т.е. заказ и получение очередных партий происходят через строго определенные промежутки времени.

В момент заказа фиксируются текущий остаток ресурса на складе $H_{тек}$ и средняя интенсивность потребления за цикл $I_{тек}$ и на их основе рассчитывается величина текущей партии поставки $n_{тек}$, обеспечивающая заполнение склада емкостью $H_{скл}$:

$$n_{тек} = H_{скл} – H_{тек} + T_{пост}\, I_{тек}$$

Таким образом, размер партии поставки в этой модели – величина переменная, причем:

$$(n_{тек})_{max} = H_{скл} ,$$

$$(n_{тек})_{min} = R_{пост}\, I_{min}$$

Величину резервного запаса рассчитаем, ориентируясь на соотношение:

$$H_{скл}= R_{пост}\, I_{max}$$

которое означает, что емкости склада должно хватить на случай потребления ресурса с максимальной интенсивностью в течение всего цикла.

Тогда:

$$H_{рез} = H_{скл} – R_{пост}\, I_{ср} = R_{пост}\, (I_{max} – I_{ср})$$

Данная модель применима на практике, но имеет один существенный недостаток: в момент заказа прогнозируется интенсивность потребления ресурса на $T_{пост}$. Если прогноз ошибочен, то поступившая партия либо не заполнит склад полностью (что приведет к возникновению дефицита в следующем цикле), либо переполнит его (что также не допустимо).

Для устранения данного недостатка используется модифицированная модель.

В целях исключения переполнения склада будем ориентироваться на худший в этом смысле вариант – минимальное потребление ресурса в течение всего срока поставки. Тогда текущая партия составит:

$$n_{тек} = H_{скл} – H_{тек} + T_{пост}\, I_{min} .$$

Во избежание дефицита будем резервировать емкость склада как на весь следующий цикл потребления, так и на ближайший срок поставки.

Для этого рассчитаем $H^{*}_{скл}$ – условный максимальный запас, т.е. тот уровень, которого достиг бы запас, если бы заказанная партия поступила на склад мгновенно:

$$H^{*}_{скл} = (R_{пост} + T_{пост})\, I_{max} .$$

Емкость склада может быть меньше $H^{*}_{скл}$ на величину минимально возможного потребления ресурса за время $T_{пост}$:

$$H_{скл} = H^*_{скл} - T_{пост}\, I_{min} = (R_{пост} + T_{пост})\, I_{max} - T_{пост}\, I_{min} =$$
$$= R_{пост}\, I_{max} + T_{пост}\,(I_{max} - I_{min})$$

В этом случае размер текущей партии поставки пересчитывается по формуле:

$$n_{тек} = R_{пост} I_{max} + T_{пост}\,(I_{max} - I_{min}) - H_{тек} + T_{пост}\, I_{min} =$$
$$= (R_{пост} + T_{пост})\, I_{max} - H_{тек} = H^*_{скл} - H_{тек}\ ,$$

Причем

$$(n_{тек})_{max} = R_{пост}\, I_{max}\ ,$$
$$(n_{тек})_{min} = R_{пост}\, I_{min}$$

Резервный запас:

$$H_{рез} = H^*_{скл} - (R_{пост} + T_{пост})\, I_{ср} = (R_{пост} + T_{пост})\,(I_{max} - I_{ср}) =$$
$$= R_{пост}\,(I_{max} - I_{ср}) + T_{пост}\,(I_{max} - I_{ср})$$

При заключении договора с поставщиком на условиях фиксированного ритма поставки менеджер должен контролировать, достаточна ли емкость склада при выборе удобных ритма и срока поставки, а при ограниченной емкости требовать их корректировки.

В договор по инициативе поставщика могут быть включены также ограничения на минимальный $(n_{тек})_{min}$ и максимальный $(n_{тек})_{max}$ объемы текущей партии поставки, что также может повлиять на выбор величины $R_{пост}$:

$$R_{пост} \le (n_{тек})_{max} / I_{max}\ ,$$
$$R_{пост} \ge (n_{тек})_{min} / I_{min}$$

Необходимо отметить, что если в качестве $R_{пост}$ выбран месяц, то при изменяющемся количестве рабочих дней в нем, при работе с моделью возникают дополнительные трудности связанные с расчётом основных параметров управления.

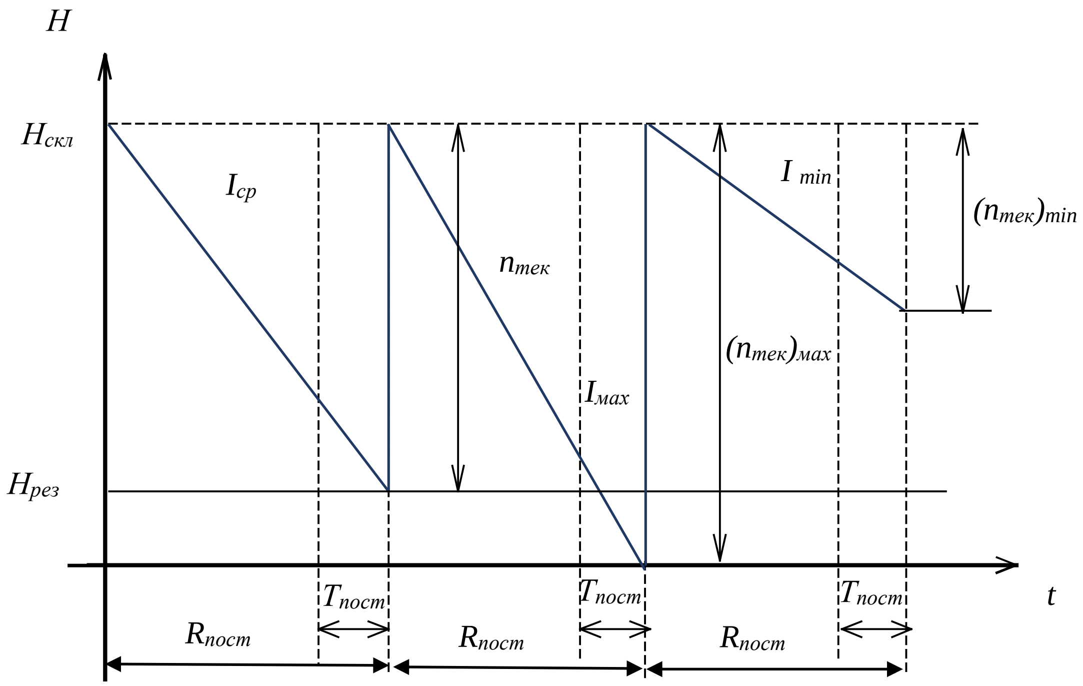

Рисунок 8 – Модель управления запасом с фиксированным ритмом поставки (упрощенный вариант)

Комбинированный способ управления запасом. Пусть, как и в предыдущих моделях, заданы I_{min} , I_{max} ,$T_{пост}$, а партия и ритм поставки не зафиксированы. Тогда управление осуществляется комбинированным способом. При этом: как в первой модели, управляющим параметром является уровень (остаток) запаса на складе, а для управления используются резервный запас и точка заказа; как во второй модели, в момент заказа рассчитывается величина текущей партии поставки, обеспечивающая заполнение склада емкостью $H_{скл}$.

Значения $H_{тз}$ и $H_{рез}$ рассчитываются по известным формулам, а расчет $n_{тек}$ выполняется по формуле:

$$n_{тек} = H_{скл} – H_{тз} + T_{пост}\, I_{тек} = H_{скл} – T_{пост}(I_{max} – I_{тек}).$$

Емкость склада здесь фиксируется на необходимом или имеющемся уровне. При этом под контролем менеджера при заключении договора должно находиться выполнение условия:

$$H_{скл} \geq H_{тз} \text{ или } T_{пост} \leq H_{скл} / I_{max} .$$

В договоре с поставщиком могут быть указаны также ограничения на максимальный и минимальный размеры текущей партии: если $(n_{тек})_{max} \geq H_{скл}$, то никаких изменений в управление это не вносит; если $(n_{тек})_{max} < H_{скл}$, то емкость склада иногда будет использоваться нерационально. При этом должно выполняться условие:

$$(n_{тек})_{max} \geq H_{тз} \text{ или } T_{пост} \leq (n_{тек})_{max} / I_{max},$$

$$T_{пост} \leq (H_{скл} - (n_{тек})_{min})/(I_{max} - I_{min}).$$