

Глава 1. Элементы теории вероятностей

В настоящей главе предлагаются читателю познакомиться с основными методами решения задач по элементам теории вероятностей.

Занятие 1. События, операции над событиями

Произвольное подмножество A пространства элементарных исходов Ω называется *событием* $A \subseteq \Omega$. Совокупность всех тех элементарных исходов ω , которые влекут осуществление события A , полностью последнее характеризуют. Обратно: произвольное множество A элементов $\omega \in \Omega$ можно рассматривать как событие A , которое происходит или нет в зависимости от того, принадлежит или нет множеству A элементарное событие ω , представляющее данный исход эксперимента.

Свойства операций над событиями

- 1 Коммутативность $A \cup B = B \cup A \quad A \cap B = B \cap A.$
- 2 Ассоциативность $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$
 $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- 3 Дистрибутивность $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C);$
 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- 4 $\overline{\overline{A}} = A, \quad \overline{\overline{A}} = \Omega \setminus A, \quad A \setminus B = A \cap \overline{B} = \overline{B} \setminus \overline{A}.$
- 5 Принцип двойственности 1). $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \quad 2). \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
сти 3). $A \subset B \Leftrightarrow \overline{A} \supset \overline{B}$

Пусть пространство элементарных исходов Ω есть произвольное множество, а $\mathfrak{F}$ – некоторая система подмножеств множества Ω .

$\mathfrak{F}$ называется *алгеброй*, если выполнены следующие аксиомы:

A1. $\Omega \in \mathfrak{F}$

A2. Если $A \in \mathfrak{F}$ и $B \in \mathfrak{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathfrak{F}$ ($A \cap B \in \mathfrak{F}$)

A3. Если $A \in \mathfrak{F} \Rightarrow \bar{A} \in \mathfrak{F}$.

События $A_1, A_2, \dots, A_n$ образуют *полную группу попарно*

несовместных событий, если $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$ и $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$.

Пример1. Монета подбрасывается три раза подряд. Необходимо: а). Построить пространство элементарных исходов и описать событие A , состоящее в том, что выпало не менее двух гербов.

б). Является ли алгеброй следующая система подмножеств: $\mathfrak{F} = \{\emptyset; \Omega; \{\text{ГГГ, ГРГ, ГТР, ГРР}\}; \{\text{РГГ, РРГ, РГР, РРР}\}\}$?

Решение: а) пространство элементарных исходов: $\Omega = \{\text{ГГГ, ГРГ, ГТР, ГРР, РГГ, РРГ, РГР, РРР}\}$, событие A есть подмножество Ω , образованное элементарными исходами, содержащими не менее двух букв «Г»: $A = \{\text{ГГГ, ГТР, ГРГ, РГГ}\}$.

б) Система подмножеств $\mathfrak{F}$ является алгеброй, т.к. удовлетворяет всем условиям в определении алгебры (проверьте самостоятельно)

Пример2. Эксперимент состоит в раскладывании наудачу трёх пронумерованных шаров по трём ящикам. В каждый ящик может поместиться любое число шаров. Наблюдаемый результат – тройка чисел $\{i, j, k\}$, где i, j, k – номера ящиков, в которые попали соответственно первый, второй и третий шары. События: $A = \{\text{первый ящик пустой}\}$, $B = \{\text{в каждый ящик попало по од-$

ному шару}, $C = \{\text{все шары попали в один ящик}\}$. Построить множество элементарных исходов по описанию эксперимента и подмножества, соответствующие указанным событиям.

Решение: Общее число исходов эксперимента будет равно 3^3 , а именно:

$$\Omega = \{\{1,1,1\}, \{2,2,2\}, \{3,3,3\}, \{1,2,1\}, \{1,1,2\}, \{1,1,3\}, \{1,3,1\}, \dots, \{3,2,3\}\}, \quad \text{или}$$

$$\Omega = \{(i, j, k) \mid 1 \leq i \leq 3; 1 \leq j \leq 3; 1 \leq k \leq 3\},$$

$$A = \{(i, j, k) \mid 2 \leq i \leq 3, 2 \leq j \leq 3, 2 \leq k \leq 3\},$$

$$B = \{(i, j, k) \mid 1 \leq i \leq 3; 1 \leq j \leq 3; 1 \leq k \leq 3; i \neq j \neq k\},$$

$$C = \{(i, i, i) \mid 1 \leq i \leq 3\}.$$

Задачи

1.1 В пекарне выпекается n -булок хлеба. $A_i = \{i\text{-тая булка хлеба подгорела}\}$. Записать события:

- а) ни одна из булок хлеба не подгорела;
- б) хотя бы одна подгорела;
- в) ровно одна булка хлеба подгорела.

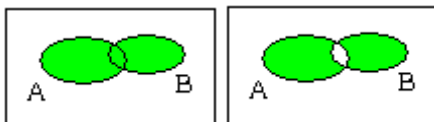
Решение:

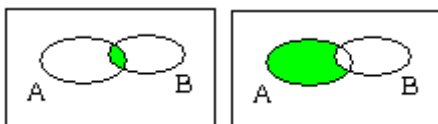
а) $\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \dots \cap \bar{A}_n = \bigcap_i \bar{A}_i$

б) $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n = \bigcup_i A_i$

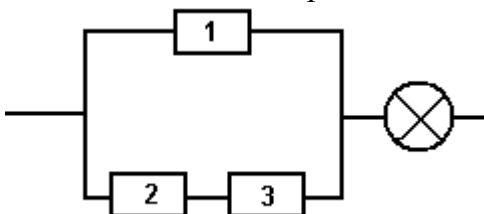
в) $(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \dots \cap \bar{A}_n) \cup (\bar{A}_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3 \cap \dots \cap \bar{A}_n) \cup \dots \cup (\bar{A}_1 \cap \dots \cap \bar{A}_{n-1} \cap A_n)$

1.2 Опишите «словесно», изображённые на рисунке события (выполнены штриховкой). Представьте событие $A + B$ в виде суммы несовместных событий.





- 1.3 Электрическая цепь (блок-схема) составлена из некоторых элементов по схеме, приведённой на рисунке.



Разрыв цепи (событие A) может произойти вследствие выхода из строя элементов 1, 2, 3 (события A_1, A_2, A_3).

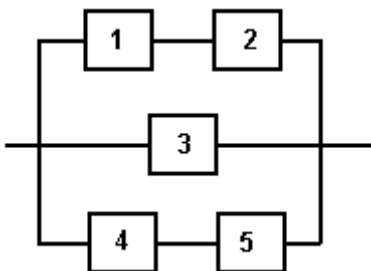
Выразить событие A через события A_1, A_2, A_3 .

- 1.4 При движении автомобиля под его левые и правые колёса попадают препятствия. Пусть событие A – попадание препятствия под левое колесо, событие B – попадание препятствия под правое колесо. Какой смысл имеют события: а) $\bar{A}$; б) $\bar{B}$; в) $A + B$; г) $\overline{A + B}$; д) $\bar{A}\bar{B}$.
- 1.5 Пусть события A, B, C – попадание случайной точки в соответствующие круги A, B, C на плоскости (возможны их пересечения). Изобразить события $A + B + C$; ABC ; $\overline{ABC}$; $ABC = \emptyset$; $\bar{A}$. Представить событие $A + B + C$ в виде суммы несовместных событий.
- 1.6 Среди студентов, собравшихся на лекцию, наудачу отбирают одного. Пусть событие A заключается в том, что выбранный студент оказался юношей. Событие B – выбранный студент не курит, событие C – он живёт в общежитии. Опишите событие ABC ; при каком условии будет иметь тождество $ABC = A$?

- 1.7 В условии предыдущей задачи: когда будет верно равенство $A = B$; будет ли оно иметь место, если все юноши курят?
- 1.8 Событие A – хотя бы одно из четырёх изделий бракованное, событие B – бракованных изделий не менее двух. Что означают события $\bar{A}$ и $\bar{B}$?
- 1.9 Когда возможно равенство $AB = A$? Проиллюстрировать геометрически на схеме.
- 1.10 Доказать, что события $A, \bar{A}B$ и $\overline{A+B}$ образуют полную группу.
- 1.11 Доказать, что событие $(A + \bar{B})(\bar{A} + B) + (A + B)(\bar{A} + \bar{B})$ – достоверно.
- 1.12 Монета подбрасывается три раза подряд. Построить пространство Ω элементарных исходов и описать событие A , состоящее в том, что выпало не менее двух гербов; является ли алгеброй следующая система подмножеств: $\mathfrak{A} = \{\emptyset, \Omega, \{ГГГ, ГРГ, ГГР, ГРР\}, \{РГГ, РРГ, РГР, РРР\}\}$?
- 1.13 Рабочий изготовил n деталей. Пусть событие A_i , состоит в том, что i -тая изготовленная им деталь имеет дефект. Записать событие, заключающееся в том, что: а) ни одна деталь не имеет дефектов; б) хотя бы одна деталь имеет дефект; в) ровно одна деталь имеет дефект; г) не более двух деталей имеют дефект; д) по крайней мере две детали имеют дефект; е) точно две детали с дефектом.
- 1.14 К механизмам управления некоторого агрегата относятся рулевое управление и две тормозные системы. Событие A – исправно рулевое управление, события B_1 и B_2 – исправны первая и вторая тормозные системы. Событие C означает работоспособность агрегата в том случае, если исправно рулевое управление и хотя бы одна из тормозных систем. Выразить событие C и $\bar{C}$ через события A ,

B_1 и B_2 .

- 1.15 Пусть события A и B – случайные события. Доказать, что события A , $\overline{AB}$, $\overline{A+B}$ образуют полную группу.
- 1.16 Найти случайное событие X из равенства:
 $(A + \overline{X})(\overline{A} + \overline{X}) + (\overline{X + \overline{A}}) + (\overline{X + A}) = B$.
- 1.17 Эксперимент состоит в двукратном подбрасывании игровой кости. Построить пространство элементарных событий. Описать события: A – оба раза выпало число очков, кратное трём; B – произведение очков делится на шесть. Найти соотношения между этими событиями.
- 1.18 Пусть A, B – произвольные события. Упростить выражение: $(A + B)(A + \overline{B})(\overline{A} + B)$.
- 1.19 Пусть A и B наблюдаемые события в эксперименте. Показать, что событие $A + B$ можно разложить на сумму несовместных событий следующими способами:
- а). $A + B = A + (B - AB)$; б). $A + B = AB + A\overline{B} + \overline{A}B$;
в). $A + B = A + B\overline{A}$.
- 1.20 Электрическая цепь составлена по схеме, представленной на рисунке.



Событие $A_k = \{\text{элемент с номером } k \text{ вышел из строя}\}$, событие $B = \{\text{разрыв цепи}\}$. Выразить событие B через события A_k .

- 1.21 Два баскетболиста по очереди бросают мяч в корзину до первого попадания. Выигрывает тот, кто первый забросит мяч. События:

$A_k = \{\text{первый попадает при } k\text{-том броске}\},$

$B_k = \{\text{второй попадает при } k\text{-том броске}\},$

$A = \{\text{первый выигрывает}\}, B = \{\text{второй выигрывает}\}$. Первый баскетболист бросает первым. Определить состав множества элементарных исходов и записать события A, B в алгебре событий.

Занятие 2. Классическая вероятность

Пусть Ω – пространство элементарных исходов, $\mathfrak{F}$ – σ – алгебра событий. *Вероятностью события A* называют числовую функцию $P(A)$, определённую на σ – алгебре событий $\mathfrak{F}$. Эта функция отображает множество, состоящее из событий, в множество действительных чисел $P: \mathfrak{F} \rightarrow R^1$, и удовлетворяет следующим аксиомам:

A1. Для любого события $A \in \mathfrak{F}: P(A) \geq 0$.

A2. Вероятность достоверного события равна: $P(\Omega) = 1$.

А3. Если $A_i \cap A_j = \emptyset$ (т.е. события A_i и A_j – несовместны), $\forall i \neq j$, то $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

Пусть пространство элементарных исходов $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$, каждый из исходов ω_i равновероятен, т.е. $P(\omega_i) = p$, $i = \overline{1, n}$, свершение события **A** есть свершение элементарных исходов: $\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots, \omega_{i_k}$, т.е. событие **A** состоит из k элементарных исходов $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots, \omega_{i_k}\}$. Тогда, согласно классической схеме вероятность события **A** есть число, являющееся отношением числа исходов, благоприятствующих свершению события **A** к общему числу исходов эксперимента: $P(A) = \frac{k}{n}$.

Гипергеометрическое распределение (урновая схема).

Пусть дана совокупность из n объектов, среди которых n_1 объектов первого типа и n_2 объектов второго типа ($n_1 + n_2 = n$) (например, бракованные изделия и годные изделия). Выбирается наугад $k \leq n$ объектов. Какова вероятность того, что среди них окажется k_1 объектов первого типа и k_2 объектов второго типа ($k_1 + k_2 = k$)?

Выбрать k объектов из n можно C_n^k способами. Выбрать k_1 объектов первого типа из имеющихся n_1 объектов можно $C_{n_1}^{k_1}$ способами, аналогично выбрать k_2 объектов второго типа

из n_2 имеющихся можно $C_{n_2}^{k_2}$ способами. Тогда искомая веро-

ятность:
$$P(A) = \frac{C_{n_1}^{k_1} \cdot C_{n_2}^{k_2}}{C_n^k}.$$

Задачи

- 2.1 В ящике 10 одинаковых деталей, помеченных номерами 1, 2,...,10. Наудачу извлечены шесть деталей. Найти вероятность того, что среди извлеченных деталей окажутся: а) деталь № 1; б) детали № 1 и № 2.

Решение. а) Общее число возможных элементарных исходов испытания равно числу способов, которыми можно извлечь шесть деталей из десяти, т. е. C_{10}^6 .

Найдем число исходов, благоприятствующих интересующему нас событию: среди отобранных шести деталей есть деталь №1 и, следовательно, остальные пять деталей имеют другие номера. Число таких исходов, очевидно, равно числу способов, которыми можно отобрать пять деталей из оставшихся девяти, т.е. C_9^5 . Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих рассматриваемому событию, к общему числу возможных элементарных исхо-

дов:
$$P = \frac{C_9^5}{C_{10}^6} = \frac{3}{5};$$

б) Число исходов, благоприятствующих интересующему нас событию (среди отобранных деталей есть детали №1 и № 2, следовательно, четыре детали имеют другие номера), равно числу способов, которыми можно извлечь четыре детали из оставшихся восьми, т. е. C_8^4 .

Искомая вероятность $P = \frac{C_8^4}{C_{10}^6} = \frac{1}{3}$.

2.2 Кусок сыра $7 \times 7 \times 7$ см в красной пластиковой оболочке разрезается на 125 кусочков одинакового размера и конфигурации для приготовления салата, кладётся в салатницу и тщательно перемешивается.

Найти вероятности:

- Сколько всего кусочков сыра можно случайным образом извлечь из салатницы с красной оболочкой, покрывающей три грани
- Две грани
- Одну грань
- Ни одной
- 4 грани

2.3 В коробке 15 шоколадных и 12 жележных конфет, которые имеют различную форму. Из коробки берут конфету и съедают её – она оказалась шоколадной. Какова вероятность, что вторая конфета, взятая из коробки, тоже будет шоколадной?

Решение: $n(A) = 15 - 1 = 14$, $N = 15 + 12 - 1 = 26$,
 $P(A) = n(A)/N = 14/26 = 7/13$.

2.4 В столовую привезли 60 пирожков с капустой и 50 с картошкой. Пирожки неотличимы по внешнему виду и цене. Студент наудачу покупает 1 пирожок. Какова вероятность того, что этот пирожок оказался с картошкой?

2.5 В бильярд играют два человека. Через некоторое время на столе осталось 8 шаров. Найти вероятность того, что на этот момент времени счет игры ничейный, учитывая, что все варианты забивания шаров игроками равновозможные. Изначально количество шаров на столе составляло 16.

2.6 В кафе имеется 6 свободных столов по два места за каждым столом, 3 стола из которых являются столами для само-

обслуживания. Найдите вероятность того, что две пришедшие пары займут столы, которые обслуживаются официантами.

- 2.7 Из теста спекли кубик. Верхнюю и нижнюю грани облили черным шоколадом, а боковые – белым. Затем разделили на тысячу одинаковых пирожных. Найти вероятность того, что наудачу взятое пирожное:

- а) имеет одну грань с черным шоколадом (событие A);
- в) имеет одну грань с белым шоколадом (событие B);
- с) имеет две грани с белым шоколадом (событие C);
- д) не имеет ни одной грани с шоколадом (событие D).

Решение.

$$P(A) = 2 \cdot 100 / 1000 = 0,2$$

$$P(B) = 10 \cdot 8 \cdot 4 / 1000 = 0,32$$

$$P(C) = 10 \cdot 4 / 1000 = 0,04.$$

$$P(D) = 8^3 / 1000 = 0,512.$$

- 2.8 Для приготовления компота хозяйка купила 24 абрикоса и 23 сливы. Дома девушка не удержалась и съела какой-то один фрукт, причем неизвестно, какой. После этого наудачу она извлекла из сумки еще два фрукта для младшего брата, которые оказались абрикосами. Найти вероятность того, что съеденный фрукт был:

- а) абрикос
- б) слива.

- 2.9 Составляя список гостей, которые будут приглашены на день рождения, хозяйка составила список из 14 человек. Забыв про список, наудачу она набрала номера 9 друзей. Найти вероятность того, что в составе приглашённых оказались:

- а) №9 и №13 б) №1, №5 и №14.

- 2.10 Монета брошена 2 раза. Найти вероятность, что хотя бы один раз появится герб.

- 2.11 (Г6) Куб, все грани которого окрашены, распилен на 1000 кубиков одного размера. Определить вероятность того, что наудачу извлечённый кубик будет иметь ровно две окрашенные грани.
- 2.12 (Б2.2) В лотерее разыгрывается 1000 билетов. Среди них два выигрыша по 50 руб., 5 — по 20 руб., 10 — по 10 руб. и 25 — по 5 руб. Некто покупает один билет. Найти вероятность: а) выигрыша не менее 20 руб.; б) какого-либо выигрыша.
- 2.13 (Б2.4) Ребёнок играет с 10 буквами разрезной азбуки: А, А, А, Е, И, К, М, М, Т, Т. Какова вероятность того, что при случайном расположении букв в ряд он получит слово МАТЕМАТИКА?
- 2.14 (Б2.5) В лифт 9-этажного дома на первом этаже вошли 5 человек. Известно, что каждый из них с равной вероятностью может выйти на любом из этажей, начиная со второго. Найти вероятность того, что:
- а) все пятеро выйдут на пятом этаже;
 - б) все пятеро выйдут одновременно (на одном и том же этаже);
 - в) все пятеро выйдут на разных этажах;
 - г) на первых трёх этажах не выйдет ни один человек;
 - д) все пассажиры выйдут на первых шести этажах;
 - е) на одном этаже выйдут три пассажира, а на другом два?
- 2.15 (Б2.6) Какова вероятность того, что в четырёхзначном номере случайно выбранного в большом городе автомобиля:
- а) все цифры разные;
 - б) две пары одинаковых цифр;
 - в) только две одинаковые цифры;
 - г) только три одинаковые цифры;
 - д) все цифры одинаковые;
 - е) сумма двух первых цифр равна сумме двух последних

цифр?

- 2.16 (Б2.7) В ящике 10 красных и 6 синих пуговиц. Какова вероятность того, что две наудачу вынутые пуговицы будут одноцветными?
- 2.17 (Б2.8) Из колоды карт (52 листа) наудачу вынимаются три карты. Найти вероятность того, что:
- а) среди них окажется ровно один туз;
 - б) среди них окажется хотя бы один туз;
 - в) это будут тройка, семёрка и туз (в любом порядке).
- 2.18 (Б2.11) Из 28 костей домино случайно выбирают две. Найти вероятность того, что из них можно составить “цепочку” согласно правилам игры.
- 2.19 (Б2.15) Бросается 6 игральные кости. Найти вероятности следующих событий: $A = \{\text{выпадут 3 единицы, две тройки и одна шестёрка}\}$, $B = \{\text{выпадут разные цифры}\}$, $C = \{\text{выпадут три одинаковые цифры}\}$.
- 2.20 (Г3) Задумано двузначное число. Найти вероятность того, что задуманным числом окажется: а) Случайно названное двузначное число; б) Случайно названное двузначное число, цифры которого различны.
- 2.21 (Г5) Брошены две игральные кости. Найти вероятность следующих событий: а) сумма выпавших очков равна семи; б) сумма выпавших очков равна восьми, а разность – четырем; в) сумма выпавших очков равна восьми, если известно, что их разность равна четырем; г) сумма выпавших очков равна пяти, а произведение – четырем.
- 2.22 В первом ящике находятся шары с номерами от 1 до 5, а во втором – с номерами от 6 до 10. Из каждого ящика вынули по одному шару. Какова вероятность того, что сумма номеров на вынутых шарах: а) не меньше 7; б) равна 11; в) не больше 11.

- 2.23 В коробке шесть одинаковых, занумерованных кубиков. Наудачу по одному извлекают все кубики. Найти вероятность того, что номера извлеченных кубиков появятся в возрастающем порядке.
- 2.24 Найти вероятность того, что при бросании трех игральных костей шестерка выпадет на одной (безразлично какой) кости, если на гранях двух костей выпадут числа очков, не совпадающие между собой (и не равных шести).
- 2.25 (Г10) В пачке 20 карточек, помеченных номерами 101, 102,...,120 и произвольно расположенных. Наудачу извлекаются две карточки. Найти вероятность того, что извлечены карточки с номерами 101 и 120.
- 2.26 (Г12) В ящике имеется 15 деталей, среди которых 10 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает три детали. Найти вероятность того, что извлеченные детали окажутся окрашенными.
- 2.27 (Г13) В конверте среди 100 фотокарточек находится одна разыскиваемая. Из конверта наудачу извлечены 10 карточек. Найти вероятность того, что среди них окажется нужная.
- 2.28 (Г14) В ящике 100 деталей, из них 10 бракованных. Наудачу извлечены четыре детали. Найти вероятность того, что среди извлеченных деталей: а) нет бракованных; б) нет годных.
- 2.29 (Г15) Устройство состоит из пяти элементов, из которых два окрашены. При включении устройства включаются случайным образом два элемента. Найти вероятность того, что включенными окажутся неокрашенные элементы.
- 2.30 (Г19) На складе имеется 15 мониторов, причем 10 из них изготовлены фирмой №1. Найти вероятность того, что среди пяти взятых наудачу мониторов окажутся три монитора фирмы №1.
- 2.31 (Г20) В группе 12 студентов, среди которых 8 отличников. По списку наудачу отобраны 9 студентов. Найти вероятность

того, что отобранных студентов пять отличников.

- 2.32 В коробке пять одинаковых изделий, причем три из них окрашены. Наудачу извлечены два изделия. Найти вероятность того, что среди двух извлеченных изделий окажутся: а) одно окрашенное изделие; б) два окрашенных изделий; в) хотя бы одно окрашенное изделие.
- 2.33 (Г22) В «секретном» замке на общей оси имеются четыре диска, каждый из которых разделён на пять равных секторов, на каждом из секторов написаны различные цифры. Замок открывается только в том случае, если диски установлены так, что цифры на них составляют определённое четырёхзначное число. Найти вероятность того, что при произвольной установке дисков замок будет открыт.
- 2.34 (Г25) При испытании партии приборов относительная частота годных приборов оказалась равной 0,9. Найти число годных приборов, если всего было проверено 200 приборов.
- 2.35 (Е72) Наудачу выбирается пятизначное число. Какова вероятность следующих событий: а) выбранное число одинаково читается как слева направо, так и справа налево; б) выбранное число, кратное 5; в) выбранное число состоит из нечётных цифр?
- 2.36 (Е76) На шахматную доску случайным образом ставят две ладьи: белую и чёрную. Какова вероятность того, что ладьи не побьют друг друга?
- 2.37 (Е78) Из полного набора домино (28 штук) наудачу выбирают 7 костей. Какова вероятность, что среди них окажется по крайней мере одна кость с шестью очками?
- 2.38 (Е89) Числа $1, 2, \dots, 9$ записываются в случайном порядке. Вычислить вероятность событий: а) на чётных местах будут стоять чётные числа; б) сумма каждых двух чисел, стоящих на одинаковом расстоянии от концов, равна 10.

- 2.39 (Е97) Двенадцать студентов, среди которых Иванов и Петров, случайным образом занимают очередь за учебниками в библиотеку. Какова вероятность, что между Ивановым и Петровым в образовавшейся очереди окажется ровно 5 человек?

Занятие 3. Задачи на применение формул комбинаторики

Перестановками называются наборы, состоящие из одного и того же числа (n) элементов, отличающихся друг от друга только порядком их расположения (обозначение: P_n).

Число всех возможных перестановок из n элементов равно $P_n = n!$

Сочетаниями называются наборы, составленные из n различных элементов по m элементов (обозначение « C_n^m »), которые отличаются хотя бы одним элементом, порядок же следования не важен. Число сочетаний из n элементов по m элементов равно $C_n^m = n!/(m!(n-m)!)$.

Схема выбора, приводящая к сочетаниям с повторениями: если опыт состоит в выборе с возвращением m элементов множества $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ из n элементов, но без последовательного упорядочивания, то различными исходами такого опыта будут всевозможные m -элементные наборы, отличающиеся лишь составом элементов. При этом отдельные наборы могут содержать повторяющиеся элементы. Например, при $m = 4$ наборы $\{e_1, e_1, e_2, e_1\}$ и $\{e_2, e_1, e_1, e_1\}$ не различимы для данного эксперимента, а набор $\{e_1, e_1, e_3, e_1\}$ отличен от любого из предыдущих. Получающиеся в результате данного опыта комбинации называются *сочетаниями с повторениями*, а их общее число определяется формулой $N = C_{n+m-1}^m$.

выборки различаются как составом элементов, так и порядком их следования (размещение с возвратом).

Число всех разбиений группы из n элементов на подгруппы, состоящие из n_1, n_2, n_3 и т.д. элементов вычисляется по

формуле: $N = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3!}$. Упорядоченные наборы, состоящие из

m различных элементов, выбранных из совокупности данных n элементов, называются *размещениями* из n элементов по m (обозначение « A_n^m »). Такие наборы могут отличаться друг от друга как элементами, так и порядком их следования. Число размещений из n элементов по m элементов равно

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1) = \frac{P_n}{(n-m)!}.$$

Выборкой объёма k из генеральной совокупности называется упорядоченная последовательность $\{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}\}$. Эту последовательность можно образовывать следующим образом: первый элемент a_{i_1} выберем из генеральной совокупности; следующий элемент a_{i_2} из генеральной совокупности выбираем без элемента a_{i_1} ; элемент a_{i_3} выбираем без элементов a_{i_1} и a_{i_2} и так далее. Полученная таким образом выборка называется *выборкой без возвращения*. Ясно, что в этом случае $k \leq n$. Число таких выборок объёма k совпадает с числом размещений из n элементов по k , то есть

$$(n)_k = A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

В случае, если вынутый из урны шар запоминается, затем шар возвращается в урну и снова производится выбор шара. Номер каждого следующего выбранного шара опять запоминается и возвращается в урну и так далее k раз. Полученная таким образом выборка называется *выборкой с возвращением (повторной выборкой) объёма k из совокупности элементов количества n* . Таким образом, один и тот же элемент может быть

выбран несколько раз. Таких выборок делается k раз (при этом не обязательно, чтобы $k < n$), поэтому, их число будет $B_n^k = n^k$ (см. комбинации, в которых $n_1 = n_2 = \dots = n_r = n$). Такие

Пример1. Сколько можно составить сигналов из 2 флажков, имея в наличии 6 флажков различного цвета?

Решение. Так как данные наборы различаются составом элементов и порядком их следования (так как сигналы: "левый флажок–красный, правый–синий" и "левый флажок–синий, правый–красный" относятся к различным сигналам), то число таких комбинаций равно числу размещений из шести элементов по два, т.е. $A_6^2 = 6 \cdot 5 = 30$.

Пример2. Сколько двузначных чисел можно составить из трёх различных цифр 1,2,3 (каждая цифра входит в число один раз)?

Решение. $A_3^2 = 3 \cdot (3 - 2 + 1) = 6$. В действительности, такими числами будут числа, составленные из следующих пар цифр: (1,2); (1,3); (2,1); (2,3); (3,1); (3,2) (то есть числа 12, 13, 21, 23, 31 и 32).

Пример3. Сколькими способами можно выбрать 2 детали из ящика, содержащего 10 деталей?

Решение. В данном случае не важен состав деталей, поэтому число таких вариантов равно $C_{10}^2 = 10!/(2! \cdot 8!) = 45$.

Пример4. Игральную кость бросают дважды. Какова вероятность свершения события $A = \{\text{сумма выпавших очков равна } 6\}$?

Решение. Общее число исходов равно $B_6^2 = 6^2 = 36$. Исходами, благоприятствующими событию A , являются: (1;5), (5;1), (2;4), (4;2), (3;3), то есть их число равно 5. Тогда $P(A) = \frac{5}{36}$.

Пример5. Набирая номер телефона, абонент забыл последние две цифры и, помня лишь, что эти цифры различные, набрал их наудачу. Найти вероятность того, что набранные цифры оказались правильными.

Решение. Пусть $A = \{\text{набраны нужные цифры}\}$. Всего можно набрать столько различных цифр, сколько может быть составлено размещений из 10 цифр по 2, то есть $A_{10}^2 = 10 \cdot 9 = 90$. Таким образом общее число элементарных исходов равно 90. Событию A благоприятствует лишь один исход, тогда имеем: $P(A) = 1/90$.

Задачи

- 3.1 В магазине имеется 20 наименований пирожных. Готовясь к Новому году, администрация магазина решила сделать подарок каждому покупателю: набор из пяти разных пирожных. Сколько возможных вариантов наборов существует?
- 3.2 Студентка решила отпраздновать свой День рождения в кафе и пригласила 23 человека. Сколькими возможными вариантами студентка может рассадить гостей (и сесть сама), если за каждым столом должно сидеть по 4 человека:
а) с учётом возможности пересадки гостей за одним столом
б) без учёта возможности пересадки ?
- 3.3 На прилавке 20 пирожков с картошкой и 7 с повидлом. Какова вероятность, что 2 наугад выбранных пирожка будут с одинаковой начинкой?
- 3.4 В коробке 5 леденцов разного цвета: красного, оранжевого, желтого, зеленого, розового. Какова вероятность вытащить леденцы именно в таком порядке, если после каждого вынимания их возвращают обратно в коробку.
- 3.5 Имеется 6 видов бокалов и рюмок, которые ставятся на стол на званном ужине: бокал для шампанского, лафитная рюмка, рейнвейная рюмка, модерна рюмка, фужер, водочная рюмка. Все бокалы и рюмки устанавливают в один ряд. Сколько способов их постановки существует? (правилами этикета - пренебречь).
- 3.6 В меню санатория 11 наименований блюд, из которых можно выбирать на свой вкус по 3 блюда каждый день. Сколько дней человеку понадобится пробыть в санатории, чтобы ни одно из сочетаний блюд не повторилось?

- 3.7 В коробке 15 конфет. Среди них 10 шоколадных. Мальчик наугад взял из коробки 12 конфет. Какова вероятность того, что среди них окажется 8 шоколадных?
- 3.8 В ресторан устроился человек, который абсолютно не знает, как сервируется стол. Он получил 10 приборов, из которых 3 десертных, для сервировки одного стола. Какова вероятность того, что 3 десертных прибора окажутся на своих местах, если учесть, что при сервировке стола все приборы имеют четко определенное место.
- 3.9 Кате подарили две коробки конфет с разными начинками (коньяком и ванилью), в которых содержатся по 20 конфет. Какова вероятность того, что девушка с гостями за чаем съедят 16 конфет с коньяком и 17 с ванилью.
- 3.10 В упаковке 10 тарелок, среди которых 4-бракованные. Наудачу из упаковки взяли 6 тарелок. Найти вероятность того, что среди них три окажутся бракованными.
- 3.11 В баре имеется 15 различных столов и 10 мест для них. Сколькими способами можно поставить столы, чтобы изменить обстановку бара?
- 3.12 Брошено 4 четыре игральные кости. Какова вероятность того, что:
- а) все числа различные;
 - б) выпало две шестерки;
 - в) не выпало ни одной единицы;
 - г) выпала одна шестерка и три пятерки;
 - д) сумма выпавших очков равна 24.
- 3.13 Старосте поручили проверить посещаемость лекций группой. Ей известно, что 7 из 20 человек на лекции не были. Староста наудачу подходит к пяти студентам. Найти вероятность того, что хотя бы 2 человека, выбранных из этой «пятерки», оказались прогульщиками.
- 3.14 Из трёх инженеров и девяти экономистов должна быть

- составлена комиссия в составе 7 человек. Какова вероятность, что при случайном выборе членов комиссии в ней окажется хотя бы один инженер?
- 3.15 Из колоды в 32 карты берётся наугад 10 карт. Найти вероятность того, что среди них будут 8 одномастных.
- 3.16 В киоске продаётся пиво 10 сортов. Сколькими способами можно купить 12 бутылок?
- 3.17 Сколько словарей надо иметь, чтобы можно было непосредственно выполнить переводы текста с любого из пяти различных языков: русского, немецкого, английского, французского, итальянского? (считается, например, русско–английский и англо–русский—это различные словари)
- 3.18 В стену здания вмонтированы 8 гнезд для флажков. В каждое гнездо вставляется либо голубой, либо красный. Сколько существует случаев распределение флажков на здании?
- 3.19 На билете мини-лотереи находится 5 окошек. Под защитным слоем, каждого из которых может быть один из десяти рисунков. Найти вероятность того, что в случайно взятом билете во всех окошках окажется один и тот же рисунок.
- 3.20 Пароль доступа к счету в швейцарском банке составляет 12 символов, причем используются 10 арабских цифр (0, 1, 2, ..., 8, 9) и 26 букв латинского алфавита. Найти вероятность, что случайным образом набранный пароль окажется верным, если считать, что пароль состоит из неповторяющихся букв и цифр.
- 3.21 Повар, сделав сдобное тесто, положил в него 10 изюминок. Затем тщательно перемешав, разделил тесто на 5 булочек. Найти вероятность того, что в каждую из 5 булочек попадёт по две изюминки.
- 3.22 (E100) Бросается 10 игральных костей. Вычислить веро-

ятности следующих событий: ни на одной кости не выпадет 6 очков; хотя бы на одной выпадет 6 очков; ровно на 3 костях выпадет 6 очков.

- 3.23 (E102) В подъезде дома установлен замок с кодом. Дверь открывается, если набран код из трёх различных цифр. Некто вошёл в подъезд и, не зная кода, стал наудачу набирать различные комбинации из трёх цифр. На каждую попытку он тратит 20 секунд. Какова вероятность того, что удастся открыть дверь за один час.
- 3.24 (E128) Семь яблок, три апельсина и пять лимонов раскладываются случайным образом в три пакета, но так, чтобы в каждом было одинаковое число фруктов. Найти вероятности следующих событий: а) в каждом из пакетов по одному апельсину; б) случайно выбранный пакет не содержит апельсинов.
- 3.25 (E129) Из множества чисел $E = \{1, 2, \dots, n\}$ выбираются два числа. Какова вероятность, что второе число больше первого, если выбор осуществляется: а) без возвращения; б) с возвращением.
- 3.26 (E132) Путём жеребьёвки разыгрывается шесть подписных изданий среди десяти участников. Сколько различных распределений подписок возможно, если каждое очередное наименование разыгрывается между всеми участниками? Найти вероятность того, что первые шесть человек получат каждый по одной подписке.

Занятие 4. Теоремы сложения и умножения вероятностей

Теорема сложения вероятностей:

$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ или для случая трёх событий:

$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$

Следствия: 1. $P(A + B) = P(A) + P(B)$, если $AB = \emptyset$,

$$2. \quad P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i), \quad \text{если}$$

$$A_i A_j = \emptyset, \quad i \neq j,$$

$$3. \quad P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

Теорема умножения вероятностей:

$P(AB) = P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B)$, где $P(A/B)$ – вероятность свершения события A при условии, что B свершилось.

Следствие: $P(AB) = P(A)P(B)$, если A и B – независимые события.

Пусть события $A_1, A_2, \dots, A_n$ – независимые в совокупности, причём вероятность появления каждого равна $P(A_i) = p_i$. Пусть в результате эксперимента могут наступить все события, либо часть из них, либо ни одного из них. Вероятность появления хотя бы одного из событий равна $P(A) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_n$, где $q_i = 1 - p_i$.

Задачи

4.1 Доказать, что если событие A влечет за собой событие B , то $P(B) \geq P(A)$.

Решение. Событие B можно представить в виде суммы несовместных событий A и $\bar{A}B$: $B = A + \bar{A}B$. По теореме сложения вероятностей несовместных событий получим $P(B) = P(A + \bar{A}B) = P(A) + P(\bar{A}B)$. Так как $P(\bar{A}B) \geq 0$, то $P(B) \geq P(A)$.

4.2 Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,7, а для второго – 0,8. Найти вероятность того, что при одном залпе в мишень попадет только один из стрелков.

- 4.3 Вероятность одного попадания в цель при одном залпе из двух орудий равна 0,38. Найти вероятность поражения цели при одном выстреле первым из орудий, если известно, что для второго орудия эта вероятность равна 0,8.
- 4.4 Вероятность того, что при одном измерении некоторой физической величины будет допущена ошибка, превышающая заданную точность. Равна 0,4. Произведены три независимых измерения. Найти вероятность того, что только в одном из них допущенная ошибка превысит заданную точность.
- 4.5 Из партии изделий товаровед отбирает изделия высшего сорта. Вероятность того, что наудачу взятое изделие окажется высшего сорта, равна 0,4. Найти вероятность того, что из трех проверенных изделий только два изделия высшего сорта.
- 4,6 В читальном зале имеется шесть учебников по теории вероятностей, из которых три в жёстком переплёте. Библиотекарь наудачу взял два учебника. Найти вероятность того, что оба учебника окажутся в жёстком переплёте.
- 4,7 Среди 100 лотерейных билетов есть 5 выигрышных. Найти вероятность того, что 2 наудачу выбранные билета окажутся выигрышными.
- 4,8 В ящике 10 деталей, среди которых шесть окрашенных. Сборщик наудачу извлекает четыре детали. Найти вероятность того, что все извлеченные детали окажутся окрашенными.
- 4.9 (Г69) Студент знает 20 из 25 вопросов программы. Найти вероятность того, что студент знает предложенный ему экзаменатором три вопроса.
- 4.10 Определить вероятность того, что партия из 100 изделий, среди которых 5 бракованных, будет принята при испытании, если условиями приёма допускается не более одного

бракованного изделия из 50.

- 4.11 По железнодорожному мосту, независимо один от другого, производят серийное бомбометание три самолёта. Каждый самолёт сбрасывает одну серию бомб. Вероятность попадания хотя бы одной бомбы из серии для первого самолёта равна 0,2, для второго – 0,3, для третьего – 0,4. Найти вероятность того, что мост будет разрушен, если для разрушения достаточно хотя бы одного попадания.
- 4.12 (Г68) В урне имеется пять шаров с номерами от 1 до 5. Наудачу по одному извлекают три шара без возвращения. Найти вероятности следующих событий: а) последовательно появятся шары с номерами 1,4,5; б) извлечены шары с номерами 1,4,5 независимо от их последовательности.
- 4.13 В ящике находятся 4 белых шара и 7 чёрных. Из этого ящика вынимают два раза последовательно по одному шару без возвращения. Найти вероятность того, что оба шара окажутся белыми.
- 4.14 Определить, какова вероятность, что все члены группы, состоящей из трёх лиц разного возраста, проживут ближайшие 10 лет, если вероятность прожить 10 лет для первого лица равна 0,95, вероятность для второго лица – 0,93 и для третьего – 0,89.
- 4.15 Найти вероятность того, что наудачу взятое двузначное число окажется кратным либо двум, либо пяти, либо тому и другому одновременно.
- 4.16 Имеются два ящика с шарами. В первом ящике 3 чёрных и 2 белых; во втором 2 чёрных и 3 белых. Из каждого ящика вынимаются по одному шару. Найти вероятность того, что оба шара окажутся разноцветными.
- 4.17 Из 60 вопросов, входящих в экзаменационные билеты, студент подготовил 50. Какова вероятность того, что вытянутые последовательно два вопроса будут содержать подго-

товленный материал.

- 4.18 В урне 10 белых, 15 чёрных, 20 синих и 25 красных шаров. Вынули один шар. Найти вероятность того, что вынутый шар: а) белый или чёрный; б) синий или красный; в) белый, чёрный или синий.

Решение. Имеем всего шаров $N = 10 + 15 + 20 + 25 = 70$.

$$P(B) = 10/70 = 1/7,$$

$$P(Ч) = 15/70 = 3/14,$$

$$P(C) = 20/70 = 2/7, \quad P(K) = 25/70 = 5/14.$$

Применив теорему сложения вероятностей, получим:

$$P(B + Ч) = P(B) + P(Ч) = 5/14,$$

$$P(C + K) = P(C) + P(K) = 9/14, \quad P(B + Ч + C) = 1 - P(K) = 9/14.$$

- 4.19 Три стрелка независимо друг от друга стреляют по цели. Вероятность попадания в цель для первого стрелка равна 0,75, для второго 0,8, для третьего 0,9. Определить вероятность того, что все три стрелка одновременно попадут в цель.
- 4.20 При одном цикле обзора радиолокационной станции, следящей за космическими объектами, объект обнаруживается с вероятностью p . Обнаружение объекта в каждом цикле происходит независимо от других. Найти вероятность обнаружения объекта за n циклов.
- 4.21 Вероятность выхода из строя одной из систем для самолётов, отслуживших ресурс, равна: для системы управления—0,01; для планера—0,02; для шасси—0,03. Какова вероятность того, что на случайно выбранном самолёте не будет аварийной посадки.
- 4.22 Мастер обслуживает пять станков. 20% рабочего времени он провёл у первого станка, 10—у второго, 15—у третьего, 25—у четвёртого, 30—у пятого. Найти вероятность того, что в наудачу выбранный момент времени он находился: 1) у первого или третьего станков; 2) у второго или пятого; 3) у первого или четвёртого; 4) у первого или второго, или

третьего; 5) у четвёртого или пятого.

- 4.23 Вероятность хотя бы одного попадания в цель при четырёх выстрелах равна 0,9984. Найти вероятность попадания в цель при одном выстреле.
- 4.24 Вероятность выиграть по билету одной лотереи равна 0,08, по другой 0,09. Какова вероятность лицу, купившему по одному билету каждой лотереи, выиграть по обеим, если розыгрыш лотерей производится независимо друг от друга.

Занятие 5. Геометрическая вероятность

Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ – некоторая ограниченная область n -мерного пространства. Предполагается, что область G имеет меру $\mu(G)$ (например, объём, площадь, длину), такую, что $0 < \mu(G) < \infty$. В эксперименте, связанным со случайным выбором только одной точки из области G , множество G служит пространством элементарных исходов. Случайными событиями в этом эксперименте можно считать различные подмножества $g \subset G$, для которых также определена мера. Будем говорить, что событие A наступило, если случайно выбранная точка принадлежит подобласти g области G .

Возникает вопрос, какова вероятность свершения события A ? Предполагаем, что выбор любой точки в области G является равновероятным, то есть шансы выбрать точки из любых двух подмножеств (множества G) одинаковой меры равны между собой и не зависят от их расположения в G и формы. Представим область G в виде n частей одинаковой меры. Пусть событие A соответствует попаданию точки в k таких частей (подобласть g области G). Тогда эксперимент случайного выбора может быть описан с помощью классической схемы. Исходом здесь служит выбор точки из той или иной выделенной

части. Всего n равновозможных исходов. При этом вероятность события A равна отношению числа частей, составляющих A , к общему числу частей: $P = \frac{\mu(g)}{\mu(G)}$. Вероятность попасть в подобласть $g \subset G$, вычисленная данным способом, удовлетворяет всем аксиомам и свойствам вероятностей и носит название *геометрической вероятности*.

Задачи

- 5.1 Хозяйка для приготовления пиццы раскатала пласт теста радиусом 18 см. Сверху распределила тонким слоем томатный соус в форме круга радиусом 16 см. Затем распределяет шампиньоны, предварительно разрезав их на небольшие пластики. Найдите вероятность того, что пластик шампиньона, наудачу размещённый в круг из теста, попадет также и в малый круг из томатного соуса.
- 5.2 Имениннику подарили круглый торт. В этот торт были запечены 3 горошины черного перца – на счастье. Торт разрезали на сектора по 30° . Какова вероятность, что все три горошины окажутся в одном из этих отрезанных кусочков?

Решение.

$$P_1 = \frac{\mu(g)}{\mu(G)} = \frac{\pi R^2}{12\pi R^2} = \frac{1}{12};$$

$$P = P_1^3 = \left(\frac{1}{12}\right)^3 = \frac{1}{1728}; \text{ т.к. } \mu(g) = \frac{\pi R^2}{12}; \mu(G) = \pi R^2;$$

Ответ: $\frac{1}{1728}$.

- 5.3 В одной из популярных в Америке игр игрок бросает монету с достаточно большого расстояния на поверхность стола, разграфлённого на одно дюймовые квадраты. Если

монета ($3/4$ дюйма в диаметре) попадает полностью внутрь квадрата, то игрок получает награду, в противном случае он теряет свою монету. Каковы шансы выиграть при условии, что монета упала на стол?

- 5.4 Пекарь изготовил прямоугольный торт со сторонами a и b , затем случайным образом разместил кружки из глазури разного цвета радиусом r ($2r < a$, $2r < b$) на поверхности торта. Найти вероятности событий: а) первый круг попадет целиком внутрь прямоугольного торта; б) первый кружок пересечет не более одной стороны торта.
- 5.5 Имеются два треугольника: прямоугольный равнобедренный и равносторонний. Площадь прямоугольного треугольника 20 (см²), и она в два раза больше площади равностороннего. В каждый из треугольников вписана окружность. В каждый из треугольников случайным образом ставятся две материальные точки. Что вероятнее: обе точки, поставленные в прямоугольный треугольник, попадут в окружность или одна из двух точек, установленных в равносторонний треугольник, попадет и в окружность?
- 5.6 (Б4.14) Какова вероятность, не целясь, попасть бесконечно малой пулей (точка, не имеющая размеров) в прутья квадратной решётки, если толщина прутьев равна s , а расстояние между их осями равно L ($L > s$) ?
- 5.7 (Е158) Из отрезка $[-1; 2]$ наудачу взяты два числа. Какова вероятность того, что их сумма больше единицы, а произведение меньше единицы?
- 5.8 (Г30) На бесконечную шахматную доску со стороной квадрата a падает наудачу монета диаметра $2r < a$. Найти вероятности событий: а) монета попадёт целиком внутрь квадрата; б) монета пересечёт не более одной стороны квадрата.

- 5.9 (Б4.5) Стержень длины L делится на две части в двух наудачу выбранных точках. С какой вероятностью из полученных отрезков можно составить треугольник?
- 5.10 (Б4.10) На бесконечную шахматную доску со стороной клетки $2a$ «бросается» наудачу игла длины $2g < 2a$. Найти вероятность того, что игла попадёт целиком внутрь одной клетки.
- 5.11 (Г28) В круг радиуса R помещен меньший круг радиуса r . Найти вероятность того, что точка, наудачу «брошенная» в большой круг, попадает также и в малый круг.
- 5.12 (Г37) На отрезке OA длины L числовой оси наудачу поставлены две точки $B(x)$ и $C(y)$, причём $y \geq x$. Найти вероятность, что длина отрезка BC окажется меньше, чем $L/2$.
- 5.13 (Е144) Луч локатора перемещается в горизонтальной плоскости с постоянной угловой скоростью. Какова вероятность того, что цель будет обнаружена в угловом секторе α радиан, если появление цели по любому направлению одинаково возможно?
- 5.14 Внутри эллипса $x^2/25 + y^2/16 = 1$ расположен круг $x^2 + y^2 = 9$. Найти вероятность попадания точки в область, ограниченную эллипсом и окружностью.
Решение. Пусть событие A – попадание точки в искомую область. Тогда $P(A) = S_{\text{кольца}} / S_{\text{элл.}}$, где $S_{\text{кол.}} = S_{\text{элл.}} - S_{\text{кр.}} = \pi ab - \pi r^2$. Так как $a = 5$, $b = 4$, $r = 3$, то искомая вероятность равна:
 $P(A) = (20\pi - 9\pi) / (20\pi) = 11/20 = 0,55$.
- 5.15 (Г33) Внутри круга радиуса R наудачу поставлена точка. Найти вероятность того, что точка окажется внутри вписанного в круг: а) квадрата; б) правильного треугольника.

Предполагается, что вероятность попадания точки в часть круга пропорциональна площади этой части и не зависит от ее расположения относительно круга.

- 5.16 (Г34) Быстро вращающийся диск разделен на четное число равных секторов, попеременно окрашенных в белый и черный цвет. По диску произведен выстрел. Найти вероятность того, что пуля попадет в один из белых секторов.
- 5.17 (Г44) Наудачу взяты два положительных числа x и y , каждое из которых не превышает двух. Найти вероятность того, что произведение xy будет не больше единицы, а частное y/x не больше двух.
- 5.18 (Г45) Наудачу взяты два положительных числа x и y , каждое из которых не превышает единицы. Найти вероятность того, что сумма $x + y$ не превышает единицы, а произведение xy не меньше 0,09.
- 5.19 В круг радиуса R вписан правильный треугольник. Внутри круга наудачу поставлены четыре точки. Найти вероятность следующих событий: а) все четыре точки попадут внутрь треугольника; б) одна точка попадет внутрь треугольника и по одной точке попадет на каждый малый сегмент.
- 5.20 Случайная точка ставится в квадрат со стороной, равной единице. Найти вероятность следующих событий: а) расстояние от точки до фиксированной стороны квадрата не превосходит x ; б) расстояние от точки до центра квадрата не превосходит x .
- 5.21 (E139) Внутри квадрата с вершинами $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$ наудачу выбирается точка $M(x, y)$. Найти вероятность события $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq a^2, a > 0\}$.
- 5.22 (E140) В условии задачи 5.21 найти вероятность события $B = \{(x, y) \mid xy < a, a > 0\}$.

- 5.23 (E141) В условии задачи 5.21 найти вероятность события $C = \{(x, y) \mid \max(x, y) < a, a > 0\}$ и $D = \{(x, y) \mid \min(x, y) < a, 0 \leq a \leq 1\}$.
- 5.24 (E150) Два теплохода должны подойти к одному и тому же причалу. Время прихода обоих теплоходов независимо и равновозможно в течение данных суток. Определить вероятность того, что одному из теплоходов придётся ожидать освобождения причала, если время стоянки первого 1 час, а второго 2 часа.
- 5.25 (E146) На поверхности шара берут наудачу две точки и соединяют меньшей дугой большого круга. Найти вероятность того, что дуга не превзойдёт α радиан.
- 5.26 (E157) Даны две концентрические окружности радиусов $r_2 > r_1$. На большей окружности наудачу ставятся две точки A и B. Какова вероятность того, отрезок AB не пересечёт малую окружность?
- 5.27 (E158) Из отрезка $[-1; 2]$ наудачу взяты два числа. Какова вероятность того, что их сумма больше единицы, а произведение меньше единицы?
- 5.28 В прямоугольник вписан эллипс: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$. В прямоугольник ставятся наудачу пять точек. Найти вероятность того, что все пять точек попадут в эллипс.
- 5.29 В прямоугольник вписан эллипс: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$. В прямоугольник ставятся наудачу пять точек. Найти вероятность того, что каждая из точек попадёт в различную подобласть.
- 5.30 (E157) Даны две концентрические окружности радиусами $r_2 > r_1$. На большей окружности наудачу ставятся две

точки А и В. Какова вероятность того, что отрезок АВ не пересечёт малую окружность?

Занятие 6. Условная вероятность и независимость событий

Пусть задано вероятностное пространство $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ и пусть А и В – произвольные события. Если $P(B) > 0$, то *условной вероятностью* события А при условии, что В произошло, называется отношение: $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, где $A \cap B$ – произведение (пересечение) событий.

Последнюю формулу можно привести к виду: $P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B)$ (*формула умножения вероятностей*).

Пример. Пусть эксперимент состоит в троекратном подбрасывании симметрической монеты. Вероятность того, что «герб» выпадет ровно один раз, то есть произойдёт одно из событий: (грр); (ргр); (ррг) в классической схеме равна $3/8$, так как общее число исходов эксперимента равно 8: (грр); (ггр); (ггг); (ргр); (ррг); (ргг); (грг); (ррр).

Пусть событие $A = \{\text{«герб» выпадет ровно один раз}\}$ и об исходе эксперимента дополнительно известно, что произошло событие $B = \{\text{число выпавших гербов нечётно}\}$. Какова вероятность свершения события А при условии, что В произошло? То есть необходимо найти $P(A/B)$.

Событие В состоит из четырёх элементарных исходов: (грр); (ггг); (ргр); (ррг). Событие же $A \cap B$ состоит из трёх исходов: (грр); (ргр); (ррг). Согласно формуле условной вероятности получим, что $P(A/B) = 3/4$.

События А и В называются *независимыми*, если: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Свойства независимых событий:

1. Если $P(B) > 0$, то для независимых событий A и B верно равенство:

$P(A/B) = P(A)$ и аналогично $P(B/A) = P(B)$ ($P(A) > 0$). Верно и обратное: Если $P(B/A) = P(B)$, то события A и B – независимы.

2. Если A и B независимы, то $\bar{A}$ и B (аналогично A и $\bar{B}$) также независимы.

Задачи

6.1 В ведре 52 картофелины. Из них 7 испорченных. Какова вероятность, что вытасченные подряд 3 картофелины окажутся испорченными? хорошими?

Решение. $P = \frac{7}{52} \cdot \frac{6}{51} \cdot \frac{5}{50} \approx 0.0016$.

6.2 На кухне 20 тарелок, из них 6 новых. Два повара берут по одной тарелке. Какая вероятность того, что второй повар взял новую тарелку?

Решение. $A = \{\text{второй повар взял новую тарелку}\}$, $B = \{\text{первый взял какую-то тарелку}\}$, $P(AB) = P(B) \cdot P(A/B)$, $P(B) = 1$

$$P(A/B) = \frac{6}{20} \cdot \frac{5}{19} + \frac{14}{20} \cdot \frac{6}{19} = \frac{30 + 84}{20 \cdot 19} = \frac{114}{20 \cdot 19} = \frac{57}{190} = 0.3;$$

$$P(AB) = 1 \cdot 0.3 = 0.3.$$

6.3 В ящике: 12 красных, 10 зеленых и 8 желтых яблок. Вынимают 2 яблока. Какова вероятность того, что яблоки разного цвета, если среди них нет зеленого.

Решение. $A = \{\text{яблоки разного цвета}\}$; $B = \{\text{нет зеленых}\}$, т.е. $\{кк, жж, кж, жк\}$.

$$P(B) = \frac{12}{30} \cdot \frac{11}{29} + \frac{8}{30} \cdot \frac{7}{29} + \frac{12}{30} \cdot \frac{8}{29} + \frac{8}{30} \cdot \frac{12}{29} = \frac{380}{30 \cdot 29} \approx 0,44;$$

$$P(AB) = P\{\text{кж, жк}\} = 2 \cdot \frac{12 \cdot 8}{30 \cdot 29} = \frac{192}{30 \cdot 29};$$

$$P(A \setminus B) = \frac{192 \cdot 30 \cdot 29}{30 \cdot 29 \cdot 380} \approx 0,502.$$

- 6.4 В столовой испекли 150 пирожков с мясом, среди которых 15 с рисом. Человек покупает 2 пирожка. Какова вероятность того, что оба пирожка оказались с рисом?
- 6.5 Жюри состоит из трёх судей. Первый и второй судьи принимают правильное решение независимо друг от друга с вероятностью p , а третий судья для принятия решения бросает монету. Окончательное решение жюри принимает по большинству голосов. Какова вероятность того, что жюри примет правильное решение?
- 6.6 В цехе работают две мясорубки. Цех прекращает работу при поломке одной из мясорубок. Вероятность поломки мясорубок 0,2 и 0,3 соответственно. Найти вероятность того, что цех прекратит работу вследствие поломки мясорубки.
- 6.7 Для приготовления теста требуется 2 яйца. Хозяйка взяла из холодильника, в котором 5 яиц 1-го сорта и 4 – высшего, два яйца. Определить вероятность того, что она взяла яйца 1-го сорта?
- 6.8 На шахматную доску наудачу ставятся два слона: белый и чёрный. Какова вероятность того, что слоны не побьют друг друга, при условии, что белый слон попадёт на одно из крайних полей доски.
- 6.9 В коробке имеются карточки с 5 буквами: Б, Л, Ю, Д, О. Какова вероятность того, что буквы будут доставаться в

таком порядке, чтобы получилось слово БЛЮДО?

- 6.10 Продавец продает конфеты. Они могут быть просроченными с вероятностью равной 0,03. Из свежих в среднем 80% карамельки. Найти вероятность того, что конфеты оказались свежими карамельками.
- 6.11 В кафетерии продаются 18 глазированных сырков, причем на паковке не написано, темный шоколад или белый. Продавец знает, что 11 из них в белом шоколаде. Студенты и наудачу взяли 4. Найти вероятность, что все 4 окажутся в белом шоколаде.
- 6.12 Из полной колоды карт (52 листа) вынимают сразу две карты. Одну из них смотрят – она оказалась дамой; после этого две вынутые карты перемешивают и одну из них берут наугад. Найти вероятность того, что она окажется тузом.
- 6.13 Брошены две игральные кости. Чему равна вероятность того, что сумма выпавших на них очков равна 8, если известно, что эта сумма есть чётное число?
- 6.14 (Б5.4) Брошены две игральные кости. Какова вероятность того, что на первой кости выпало 4 очка, если известно, что на второй кости выпало больше очков, чем на первой?
- 6.15 (Б5.5) Известно, что при бросании 10 игровых костей выпала, по крайней мере, одна единица. Какова при этом вероятность того, что выпали две или более единицы?
- 6.16 (Б5.6) В ящике лежат 12 красных, 8 зелёных и 10 синих шаров. Наудачу вынимают два шара. Какова вероятность того, что вынуты шары разного цвета, если известно, что среди них нет синего?
- 6.17 (Б5.9) Бросаются две игральные кости. Рассмотрим три события: А – на первой кости выпало нечётное число очков, В – на второй кости выпало нечётное число очков, С

– сумма очков на обеих костях нечётна. Выяснить зависимости или нет события A , B и C : а) в совокупности; б) попарно.

- 6.18 (Б5.10) Игральная кость брошена два раза, X_1 и X_2 – числа очков, выпавших при этих испытаниях. Рассмотрим события:

$$A_1 = \{X_1 \text{ делится на } 2, X_2 \text{ делится на } 3\},$$

$$A_2 = \{X_1 \text{ делится на } 3, X_2 \text{ делится на } 2\},$$

$$A_3 = \{X_1 \text{ делится на } X_2\},$$

$$A_4 = \{X_2 \text{ делится на } X_1\},$$

$$A_5 = \{X_1 + X_2 \text{ делится на } 2\},$$

$$A_6 = \{X_1 + X_2 \text{ делится на } 3\}.$$

Найти все пары $\{A_i, A_j\}$, тройки $\{A_i, A_j, A_k\}$ и т.д. взаимно независимых событий.

- 6.19 (Б5.11) Среди 25 экзаменационных билетов 5 “хороших” и 10 “плохих”. Два студента по очереди берут по одному билету. Найти вероятность того, что:

а) первый студент взял “хороший” билет,

б) второй студент взял “плохой” билет,

в) оба студента взяли “хорошие” билеты.

- 6.20 (Б5.13) Из урны, содержащей три белых шара, 5 чёрных и 2 красных, два игрока поочерёдно извлекают по одному шару без возвращения. Выигрывает тот, кто первым вынет белый шар. Если появляется красный шар, то объявляется ничья. Пусть $A_1 = \{\text{выигрывает игрок, начавший игру}\}$, $A_2 = \{\text{выигрывает второй участник}\}$, $B = \{\text{игра закончилась вничью}\}$. Найти вероятности $P(A_1)$, $P(A_2)$, $P(B)$.

- 6.21 В ящике имеются 5 красных и 2 чёрных носка. Наудачу вынимаются последовательно два носка. Найти вероятность того, что из ящика достали два красных носка.

- 6.22 (Е163) Один раз бросается игральная кость. Рассмотрим события: $A = \{\text{выпало простое число очков}\}$, $B = \{\text{выпало}$

чётное число очков}. Найти вероятность $P(A/B)$.

- 6.23 (E165) Вероятность попасть в самолёт равна 0,4, а вероятность его сбить равна 0,1. Найти вероятность того, что при попадании в самолёт он будет сбит.
- 6.24 (E168) Из множества чисел $\{1, 2, \dots, N\}$ по схеме случайного выбора без возвращения выбирают три числа. Найти условную вероятность того, что третье число попадает в интервал, образованный первыми двумя, если известно, что первое число меньше второго.
- 6.25 Из урны, содержащей 3 белых и 7 красных шаров, наудачу последовательно и без возвращения извлекаются два шара. События: $A = \{\text{первый шар белый}\}$, $B = \{\text{второй шар белый}\}$, $C = \{\text{по крайней мере один из вынутых шаров белый}\}$. Вычислить вероятности событий: $P(B/A)$, $P(A/B)$, $P(A/C)$.
- 6.26 (E185) На шахматную доску наудачу ставят две ладьи. Вычислить вероятность события $P(A/B)$, где $A = \{\text{ладьи побьют друг друга}\}$, $B = \{\text{ладьи попали на клетки разного цвета}\}$.
- 6.27 (E179) Из 100 студентов, находящихся в аудитории, 50 человек знают английский язык, 40 – французский и 35 немецкий. Английский и французский языки знают 20 студентов, английский и немецкий – 8, французский и немецкий – 10. Все три языка знают 5 человек. Один из студентов вышел из аудитории. Рассмотрим следующие события: $E = \{\text{вышедший знает английский язык}\}$, $F = \{\text{вышедший знает французский язык}\}$, $D = \{\text{вышедший знает немецкий язык}\}$.
а) указать все пары независимых событий; б) установить, являются ли эти события независимыми в совокупности.

- 6.28 (Г85) Вероятность попадания в мишень каждым из двух стрелков равна 0,3. Стрелки стреляют по очереди, причём каждый должен сделать по два выстрела. Попавший в мишень первым получает приз. Найти вероятность того, что стрелки получают приз.
- 6.29 (Г84) Вероятность успешного выполнения упражнения для каждого из двух спортсменов равна 0,5. Спортсмены выполняют упражнения по очереди, причём каждый делает по две попытки. Выполнившим упражнение первым получает зачёт. Найти вероятность получения зачёта обоими спортсменами.
- 6.30 (Г80) В электрическую цепь последовательно включены три элемента, работающие независимо друг от друга. Вероятности отказов элементов соответственно равны: $p_1 = 0,1$, $p_2 = 0,15$, $p_3 = 0,2$. Найти вероятности того, что тока в цепи не будет.
- 6.31 В цехе работают семь мужчин и три женщины. По табельным номерам наудачу отобраны три человека. Найти вероятность того, что все отобранные лица окажутся мужчинами.
- 6.32 Серия послематчевых пенальти состоит из 10 ударов (по пять для каждой команды). На момент нанесения 7 ударов выигрывает 1-ая команда со счетом 3:2 (первый удар наносила 1-ая команда). Вероятность точно пробитого пенальти 1-ой командой – 0,6, 2-ой – 0,8. Найти вероятность того, что на момент нанесения 10 ударов 1-ая команда не проиграет.

Занятие 7. Формула полной вероятности и Байеса

Пусть события $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ образуют полную группу попарно несовместных событий и $P(A_i) > 0$. Тогда верно утверждение:

Для любого события B : $P(B) = \sum_{i=1}^n P(B / A_i) \cdot P(A_i)$ (Формула полной вероятности).

Пусть события $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ образуют полную группу попарно несовместных событий и $P(A_i) > 0$. Тогда для любого события $B \subseteq \Omega$, такого, что $P(B) > 0$, верно равенство:

$$P(A_j / B) = \frac{P(B / A_j) \cdot P(A_j)}{\sum_{i=1}^n P(B / A_i) \cdot P(A_i)}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \text{ которое на-}$$

зывается *формулой Байеса*.

Задачи

- 7.1 В городе 3 шоколадные фабрики. Первая выпускает 45% конфет, причем 15% из них в обертке. Вторая выпускает 35% конфет, из которых 23% в обертке. Третья выпускает 20% конфет, из них 48% в обертке. Какова вероятность, что купленная наугад конфета окажется без обертки?

Решение. $A = \{\text{конфета без обертки}\}$; $H_1 = \{\text{конфета с 1-й фабрики}\}$; $H_2 = \{\text{конфета со 2-й фабрики}\}$; $H_3 = \{\text{конфета с 3-й фабрики}\}$.

$$P(A) = \sum P(A/H_k) \cdot P(H_k) = P(A/H_1) \cdot P(H_1) + P(A/H_2) \cdot P(H_2) + P(A/H_3) \cdot P(H_3) = 0,85 \cdot 0,45 + 0,77 \cdot 0,35 + 0,52 \cdot 0,2 = 0,3825 + 0,2695 + 0,104 = 0,756.$$

- 7.2 На столе четыре пакета. В первом 4 шоколадные конфеты и 9 леденцов, во втором- 11 шоколадных и 2 леденца, в третьем- 20 леденцов, а в четвертом- 13 шоколадных.

Наугад выбирают один пакет и в нем конфету.

а) Какова вероятность того, что выберут шоколадную конфету?

б) Какова вероятность выбора шоколадной конфеты, если она из первого пакета (формула Байеса)?

Решение. а) $B = \{\text{выбор шоколадной конфеты}\}$; $A_i = \{\text{выбор пакета}\}$. $P(A_i) = 1/4$; $P(B/A_1) = 4/13$; $P(B/A_2) = 11/13$; $P(B/A_3) = 0$; $P(B/A_4) = 1$.

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B/A_i) P(A_i) = 1/4 (4/13 + 11/13 + 0 + 1) = 7/13.$$

$$\text{б) } P(A_1/B) = \frac{4}{13} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{13}{7} = \frac{1}{7}.$$

7.3 В первой чашке 2 пирожка с малиной и 4 с лимоном, во второй чашке- 5 пирожков с малиной и 5 с лимоном. Из первой чашки наудачу переложили во вторую 2 пирожка. Найти вероятность того, что потом взятый наудачу из второй чашки пирожок окажется с лимоном.

Решение.

$B = \{\text{взятый из второй чашки пирожок оказался с лимоном}\}$;
 $A_1 = \{\text{переложили два пирожка с малиной}\}$;
 $A_2 = \{\text{переложили один пирожок с малиной, второй – с лимоном}\}$;

$A_3 = \{\text{переложили два пирожка с лимоном}\}$.

$$P(A_1) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15}; \quad P(A_2) = \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} + \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{8}{15}; \quad P(A_3) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{5}.$$

$$P(B/A_1) = 5/12; \quad P(B/A_2) = 6/12 = 1/2; \quad P(B/A_3) = 7/12.$$

$$P(B) = \sum_{i=1}^3 P(B/A_i) P(A_i) = \frac{5}{12} \cdot \frac{1}{15} + \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{15} + \frac{7}{12} \cdot \frac{2}{5} = \frac{19}{36}.$$

- 7.4 Студент ждет автобус. В автопарке 25 автобусов с креслом кондуктора в передней части автобуса и 15 автобусов – с креслом кондуктора в задней части автобуса.

Найдите вероятность того, что студент может проехать «зайцем», если вероятность входа студента в заднюю дверь равна 0,95.

Решение.

$A_1 = \{ \text{студент заходит в заднюю дверь} \}; P(A_1) = 0,95$

$A_2 = \{ \text{студент заходит в переднюю дверь} \}; P(A_2) = 0,05$

Примечание: Студент проедет зайцем только в случае: 1) студент зашел в заднюю дверь в автобус с креслом кондуктора в передней части автобуса; 2) студент зашел в переднюю дверь в автобус с креслом кондуктора в задней части автобуса.

$D = \{ \text{студент проедет «зайцем»} \};$

$P(D/A_2) = 15/(15+25) = 15/40 = 3/8; P(D/A_1) = 25/40 = 5/8$

$P(D) = P(D/A_1) \cdot P(A_1) + P(D/A_2) \cdot P(A_2) =$

$= 5/8 \cdot 0,95 + 3/8 \cdot 0,05 = 0,6125.$

- 7.5 В условиях предыдущей задачи: студент проехал зайцем. Какова вероятность, что он зашел в переднюю дверь?

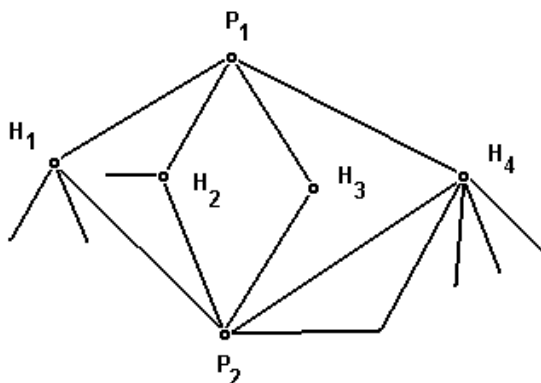
- 7.6 Серия послематчевых пенальти состоит из 10 ударов. После нанесения 7 ударов выигрывает первая команда со счетом 3:2 (первый удар наносила первая команда). Вероятность точно пробитого пенальти первой командой – 0,6, второй – 0,8. Найти вероятность того, что после нанесения 10 ударов первая команда не проиграет.

- 7.7 В условиях предыдущей задачи: найти вероятность того, что вторая команда хотя бы раз еще забила (после 7-го удара при счете 3:2 в пользу первой), если известно, что после нанесения 10 ударов первая команда не проигрывала.

- 7.8 (E235) Шесть шаров, среди которых 3 белых и 3 чёрных,

распределены по двум урнам. Наудачу выбирается урна, а из неё один шар. Как нужно распределить шары по урнам, чтобы вероятность вынуть белый шар была максимальной.

- 7.9 (E231) На рисунке изображена схема дорог, на которых нет указателей. Автомобиль выезжает из пункта P_1 , выбирая каждый раз на развилке дорог дальнейший путь наудачу. Какова вероятность, что он попадёт в пункт P_2 .



- 7.10 (E.241) Студент знает 10 из 25 экзаменационных билетов. В каком случае шансы студента получить знакомый билет выше: когда он подходит брать билет первым или вторым по счёту?
- 7.11 (E239) На шахматную доску ставят наудачу двух слонов: белого и чёрного. Какова вероятность того, что слоны побьют друг друга?
- 7.12 (E242) В урне лежит шар неизвестного цвета с равной вероятностью белый или чёрный. В урну опускается один белый шар и после тщательного перемешивания наудачу извлекается один шар. Он оказался белым. Какова вероятность того, что в урне остался белый шар?

- 7.13 (E252) Расследуются причины неудачного запуска ракеты, о котором можно высказать четыре гипотезы H_1, H_2, H_3, H_4 . По данным статистики $P(H_1) = 0,2$, $P(H_2) = 0,4$, $P(H_3) = 0,3$, $P(H_4) = 0,1$. В ходе расследования обнаружено, что при запуске произошла утечка топлива (событие A). Условные вероятности события A согласно той же статистике равны: $P(A/H_1) = 0,9$, $P(A/H_2) = 0$, $P(A/H_3) = 0,2$, $P(A/H_4) = 0,3$. Какая из гипотез наиболее вероятна при данных условиях?
- 7.14 В магазине 5 электрических и 6 механических соковыжималок. Вероятность неисправности электрической соковыжималки равна 0,2, и 0,1 для механической. Продавец наугад взяла одну соковыжималку. Найти: вероятность того, что: а) она исправна; б) она оказалась электрической, если известно, что она исправна.
- 7.15 В баре разливают 50% пива «Балтика», 30% пива «Золотая бочка» и 20% пива «Очаков». Вероятность того, что пиво «Балтика» окажется «свежим», равна 0,3. Для пива «Золотая бочка» и пива «Очаков» эти вероятности соответственно равны 0,1 и 0,2. Посетитель купил «свежее» пиво. Какова вероятность того, что ему налили пиво «Очаков»?
- 7.16 На складе имеется 2 мешка муки первого или второго сорта. Грузчик принес еще 1 мешок муки 1 сорта. Найти вероятность того, что взятый мешок окажется мешком муки 1 сорта, если равновозможны все возможные предположения о первоначальном сорте муки.
- 7.17 В супермаркет поступают в среднем 70% товаров N и 30% товаров Q . Вероятность полного поступления товаров N равна 0,7, товаров Q равна 0,8. Товар был доставлен в супермаркет. Найти вероятность того, что доставили товар N .

- 7.18 Перед Новым годом 4 ребенка написали письмо деду Морозу. Вероятности исполнения их желаний равны 0,95; 0,7; 0,53 и 0,03. Найти вероятность исполнения одного из наудачу прочитанных писем.
- 7.19 Вероятность того, что первая группа из 5 студентов помнит письмо Онегина Татьяне, равна 0,85; для второй группы из 10 студентов эта вероятность составляет 0,5; для третьей группы из 24 студентов она составляет 0,2. Наудачу выбранный студент получил за этот отрывок «отлично». Найти вероятность, что отвечал студент из второй группы.
- 7.20 (Б6.1) В первой урне находятся 1 белый шар и 9 чёрных шаров. Во второй урне 1 чёрный и 5 белых шаров. Из каждой урны удалили по одному шару, выбранному наугад, а оставшиеся шары ссыпали в третью урну.
- а) найти вероятность того, что шар, вынутый наугад из третьей урны, окажется белым.
 - б) если шар, вынутый из третьей урны, оказался белым, то какова вероятность того, что из первых двух урн были удалены чёрные шары?
- 7.21 (Б6.2) В первой урне находятся 1 белый шар и 4 красных, во второй 1 белый и 7 красных. В первую урну добавили два шара, выбранных наугад из второй урны.
- а) найти вероятность того, что шар, вынутый наугад из пополненной первой урны, окажется белым.
 - б) поставить вопрос, ответ на который можно найти с помощью формулы Байеса (и ответить на него).
- 7.22 (Б6.3) Имеется 5 урн следующего состава: в первой и второй урнах по 2 белых и 3 чёрных шара в каждой; в третьей и четвёртой урнах по 1 белому и 4 чёрных шара, в пятой урне 4 белых и 1 чёрный шар. Из одной наудачу выбранной урны взят шар. Он оказался белым. Чему равна вероятность того, что он вынут из пятой урны?

- 7.23 (Б6.4) В трёх урнах содержатся белые и чёрные шары: в первой урне 2 белых и 3 чёрных шара, во второй 2 белых и 2 чёрных шара, в третьей 3 белых и 1 чёрный шар. Из первой урны вынут наудачу шар и переложён во вторую. Далее из второй урны вынут наудачу шар и переложён в третью. Наконец из третьей урны шар переложён в первую. Какой состав шаров в первой урне наиболее вероятен?
- 7.24 (Б6.5) Из урны, в которой было $m > 3$ белых и n чёрных, потеряли один шар неизвестного цвета. Для того чтобы определить состав шаров в урне, из неё наудачу были вынуты два шара. Найти вероятность того, что был потерян белый шар, если известно, что вынутые шары оказались белыми.
- 7.25 (Г90) В урну, содержащую n шаров, опущен белый шар, после чего наудачу извлечён один шар. Найти вероятность того, что извлечённый шар окажется белым, если равновозможны все возможные предположения о первоначальном составе шаров (по цвету).
- 7.26 (Б6.6) А говорит правду в трех случаях из четырех, а В – в четырех случаях из пяти. Из урны, в которой было 9 разноцветных шаров, в том числе один белый, вынули один шар. При этом А и В посмотрели на него и оба сказали, что шар – белый. Найти вероятность того, что они оба сказали правду.
- 7.27 В ящике находятся 20 теннисных мячей, в том числе 12 новых и 8 игранных. Из ящика извлекаются наугад два мяча для игры и, после игры, возвращаются в ящик. После этого из ящика вынимают два мяча для следующей игры. Найти вероятность того, что эти оба мяча будут не игранные.
- 7.28 (Г92) В пирамиде пять винтовок, три из которых снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим при-

целом, равна 0,95; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,7. Найти вероятность того, что мишень будет поражена, если стрелок произведет один выстрел из наудачу взятой винтовки.

- 7.29 Зачет принимают трое преподавателей, вероятность получить положительную оценку (при отсутствии необходимых знаний) у которых равна соответственно 0,01, 0,02 и 0,03. Какова вероятность сдачи зачета без подготовки, если любой студент с равной возможностью попадает к каждому из преподавателей? Студент Иванов в указанных условиях зачет сдал. Какова вероятность, что он сдал второму преподавателю?
- 7.30 (Г93) В ящике содержится 12 деталей, изготовленных на заводе №1, 20 деталей – на заводе №2 и 18 деталей – на заводе №3. Вероятность того, что деталь, изготовленная на заводе №1, отличного качества, равна 0,9; для деталей, изготовленных на заводах №2 и №3 эти вероятности соответственно равны 0,6 и 0,9. Найти вероятность того, что извлеченная наудачу деталь окажется отличного качества.
- 7.31 (Г94) В первой урне содержится 10 шаров, из них 8 белых; во второй урне 20 шаров, из них 4 белых. Из каждой урны наудачу извлекли по одному шару, а затем из этих двух шаров наудачу взяли один шар. Найти вероятность того, что взят белый шар.
- 7.32 В каждой из двух урн содержится 6 черных и 4 белых шара. Из первой урны наудачу извлечен один шар и переложен во вторую урну. Найти вероятность того, что шар, наудачу извлеченный из второй урны, окажется белым.
- 7.33 Два автомата производят одинаковые детали, которые поступают на общий конвейер. Производительность первого автомата вдвое больше производительности второго. Первый автомат производит в среднем 60% деталей отлич-

ного качества, а второй – 84%. Наудачу взятая с конвейера деталь оказалась отличного качества. Найти вероятность того, что эта деталь произведена первым автоматом.

7.34 (Г98) В пирамиде 10 винтовок, из которых в четырёх имеется оптический прицел. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,8. Стрелок поразил мишень из наудачу взятой винтовки. Что вероятнее: стрелок стрелял из винтовки с оптическим прицелом или без него?

7.35 Число грузовых автомашин, проезжающих по шоссе, на котором стоит бензоколонка, относится к числу легковых машин, проезжающих по тому же шоссе как 3:2. Вероятность того, что будет заправляться грузовая машина, равна 0,1; для легковой машины эта вероятность равна 0,2. К бензоколонке подъехала для заправки машина. Найти вероятность того, что это грузовой автомобиль.

7.36 (Г100) Два программиста при подготовке программы набрали на разных компьютерах по одинаковому числу операторов в алгоритмическом языке «Fortran». Вероятность того, что первый программист допустит ошибку, равна 0,05; для второго программиста эта вероятность равна 0,1. При проверке программ была обнаружена ошибка. Найти вероятность того, что ошибку допустил первый программист (предполагается, что оба компьютера были исправны).

7.37 (Г102) Изделие проверяется на стандартность одним из двух товароведов. Вероятность того, что изделие попадет к первому товароведу, равна 0,55, а ко второму – 0,45. Вероятность того, что стандартное изделие будет признано стандартным первым товароведом, равна 0,9, а вторым – 0,98. Стандартное изделие при проверке было признано

стандартным. Найти вероятность того, что это изделие проверил второй товаровед.

7.38 (Г106) Батарея из трех орудий произвела залп, причем два снаряда попали в цель. Найти вероятность того, что первое орудие дало попадание, если вероятности попадания в цель первым, вторым и третьим орудиями соответственно равны $p_1 = 0,4$, $p_2 = 0,3$, $p_3 = 0,5$.

7.39 (Г107) Три стрелка произвели залп, причем две пули поразили мишень. Найти вероятность того, что третий стрелок поразил мишень, если вероятности попадания в мишень первым, вторым и третьим стрелками соответственно равны: $0,6$; $0,5$ и $0,4$.

7.40 (Г108) Два из трех независимо работающих элементов вычислительного устройства отказали. Найти вероятность того, что отказали первый и второй элементы, если вероятности отказа первого, второго и третьего элементов соответственно равны: $0,2$; $0,4$ и $0,3$.

Занятие 8. Последовательность независимых испытаний

Последовательностью n независимых испытаний называется дискретное вероятностное пространство $(\Omega_n, \mathfrak{F}_n, P_n) = [(\Omega, \mathfrak{F}, P)]^n$, элементарными исходами в котором являются последовательности $(\omega_{i_1} \omega_{i_2} \dots \omega_{i_n})$ и вероятность определена для каждого элементарного события формулой $P_n(\{(\omega_{i_1} \omega_{i_2} \dots \omega_{i_k})\}) = p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_k}$, $i, j, \dots, k = 1, 2, \dots$, где p_i – есть вероятность свершения элементарного исхода ω_i . Последовательность независимых испытаний называются *схемой Бернулли*, если $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, т.е. если опыт S имеет лишь два исхода. Обычно в схеме Бернулли исход ω_1 называют успехом и соответствующе-

щую вероятность обозначают $P(\{\omega_1\}) = p$, а ω_2 - называют неудачей и $P(\{\omega_2\}) = 1 - p = q$. В серии из n независимых испытаний в схеме Бернулли вероятностное пространство состоит из 2^n элементарных событий причем $P_k(\{\omega_{i_1} \omega_{i_2} \dots \omega_{i_n}\}) = p^k q^{n-k}$, где k - число успехов в последовательности $(\omega_{i_1} \omega_{i_2} \dots \omega_{i_n})$ исходов.

Найдем вероятность того, что в серии из n испытаний успех наступит $k \leq n$ раз. Так как при этом не имеет значения, когда именно в этих испытаниях будут наблюдаться k успехов, то событие A_k , состоящее в наступлении k успехов, является объединением всех различных событий $(\omega_{i_1} \omega_{i_2} \dots \omega_{i_n})$, в которых ω_1 встречается k раз. Всего таких элементарных событий в A_k будет C_n^k , а поскольку они несовместны, то искомая вероятность дается равенством

$P_n(A_k) = P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, $k = 0, 1, \dots, n$, называемым формулой Бернулли. Совокупность вероятностей $P_n(k)$, $k = 0, 1, \dots, n$, называется *биномиальным распределением*.

Пример1. Пусть вероятность попадания в цель при выстреле равна 0,6. Найти вероятность k попаданий в цель при $n = 8$ выстрелах.

Решение. Из формулы Бернулли находим:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^8 P_8(k) &= 1, P_8(0) = 0,4^8 = 0,00066, P_8(1) = 8 \cdot 0,6 \cdot 0,4^7 = 0,0079, \\ P_8(2) &= 28 \cdot 0,6^2 \cdot 0,4^6 = 0,0413, P_8(3) = 56 \cdot 0,6^3 \cdot 0,4^5 = 0,1238, \\ P_8(4) &= 70 \cdot 0,6^4 \cdot 0,4^4 = 0,23224, P_8(5) = 56 \cdot 0,6^5 \cdot 0,4^3 = 0,2787, \\ P_8(6) &= 28 \cdot 0,6^6 \cdot 0,4^2 = 0,2090, P_8(7) = 8 \cdot 0,6^7 \cdot 0,4 = 0,0896, \\ P_8(8) &= 0,6^8 = 0,0168. \end{aligned}$$

Формулы биномиального распределения вероятностей приводят при больших n к очень громоздким вычислениям. Поэтому важно иметь приближенные, но простые формулы. Найдем предельную формулу для биномиального распределения, когда число испытаний стремится к бесконечности, а вероятность успеха стремится к нулю.

Пусть произвели некоторую серию независимых испытаний, состоящую из конечного числа испытаний, затем новую серию, затем еще одну и т.д. Получим последовательность серий испытаний. Пусть при каждом испытании такой серии имеем два исхода и вероятность успеха при отдельном испытании постоянна в пределах каждой серии, но может меняться от серии к серии. В этих условиях справедлива следующая теорема:

Теорема Пуассона. Пусть дана последовательность $\{s_k\}$ серий независимых испытаний, состоящих соответственно из $1, 2, \dots, n, \dots$ испытаний, и пусть вероятность p события A при каждом испытании n -ой серии равна λ/n , где λ - постоянная, не зависящая от n . Тогда вероятность $P_n(m)$ того, что число наступлений события A в n -й серии будет равно m , при $n \rightarrow \infty$ и фиксированном m стремится к $(\lambda^m / m!)e^{-\lambda}$.

Заметим, что в формуле Пуассона вероятность p может меняться от серии к серии, важно лишь чтобы соблюдалось условие: $\lambda = n \cdot p = \text{const}$.

Распределение вероятностей, определяемое формулами

$$P(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \quad m = 0, 1, \dots, \quad \lambda > 0,$$

называется *распределением Пуассона*. Эта формула получена как предельная для последовательности серий независимых испытаний, в которой число испытаний стремится к бесконечно-

сти, а вероятность наступления события A стремится к нулю так, что $np = \lambda = \text{const}$.

Оценка погрешности, допускаемой при замене биномиального закона на закон Пуассона, приводит к следующему результату (см. например [5]): $P(m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} e^{\varepsilon(m,n)}$, где

$$\varepsilon(m,n) \approx \frac{m(m-1)}{2n} + \frac{m\lambda}{n}.$$

На практике использование формулы Пуассона может быть оправдано при $n > 100$ и $0 \leq np = \lambda < 10$. Это значит, что распределение Пуассона описывает вероятности в задачах с «редкими успехами».

Пример2. В лотерее разыгрывается в среднем 1 выигрыш на 1000 номеров. Какова вероятность, имея 100 билетов, получить хотя бы 2 выигрыша?

Решение. Здесь $n=100$, $p=0,001$, тогда $\lambda = np = 0,1$.
 $P = 1 - P_{100}(0) - P_{100}(1) = 1 - e^{-0,1} - 0,1e^{-0,1} = 0,0047$.

Рассмотрим другую предельную форму биномиального распределения, считая, что вероятность успеха не мала и не близка к единице.

Локальная теорема Муавра – Пуассона. Если вероятность события A в n независимых испытаниях равна p , $0 < p < 1$, то вероятность $P_n(m)$ того, что в этих испытаниях событие A наступит m раз, удовлетворяет соотношению

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{npq}} e^{-\frac{x_m^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \varphi(x_m), \text{ где}$$

$$q = 1 - p, \quad x_m = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}.$$

Пример3. Оператор обслуживает 40 однотипных приборов. Вероятность того, что прибор потребует внимания оператора в течение времени T , равна 0,2. Найти вероятность того, что за это время пять приборов потребуют внимания оператора.

Решение. Используя последнюю формулу, получим:

$$P_{40}(5) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{40 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} e^{-\frac{(5-40 \cdot 0,2)^2}{2 \cdot 40 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} = 0,078. \text{ Расчет по точной}$$

формуле Бернулли дает $P_{40}(5) = 0,0854$, т.е. относительная погрешность составляет $\sim 9\%$.

При большом числе испытаний n и не слишком малых вероятностях p редко требуется знать вероятность наступления события ровно m раз. Чаше возникает задача оценки вероятности того, что число событий лежит в некоторых границах. Для решения этой задачи используется следующая теорема.

Интегральная предельная теорема Муавра – Лапласа.

Пусть m - число наступлений события A в серии из n независимых испытаний, p - вероятность наступления события A при каждом испытании, $0 < p < 1$, a и b - любые фиксированные числа, $a < b$. Тогда

$$P\left\{a \leq \frac{m - np}{\sqrt{npq}} \leq b\right\} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Практическое применение интегральной теоремы Муавра-Лапласа основано на этом приближённом равенстве, которое обеспечивает хорошую точность при $npq \geq 10$. Функция

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz,$$

называется *функцией Лапласа*. Её основные свойства:

$$\Phi(0) = 0, \quad \Phi(\infty) = 0,5, \quad \Phi(-x) = -\Phi(x).$$

Данная функция табулирована и её значения можно найти в приложениях к задачкам по теории вероятностей и математической статистике (например, в [1]).

Пример4. Фабрика выпускает в среднем 70% продукции первого сорта. Чему равна вероятность того, что в партии из 1000 изделий число первосортных заключено в пределах между 652 и 760?

Решение. Здесь $n = 1000$, вероятность наступления события в отдельном испытании равна $p = 0,7$. Определим вероятность $P_{1000}(652 \leq m \leq 760)$, используя интегральную теорему Муавра–

Лапласа: $x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = -3,31$, $x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = 4,14$ и тогда полу-

чим

$$P_{1000}(652 \leq m \leq 760) \approx \Phi(4,14) - \Phi(-3,31) = 0,49997 + 0,49813 = 0,99905.$$

Если производится n независимых испытаний Бернулли, то имеет смысл рассматривать понятие наивероятнейшего числа наступлений события A в n независимых испытаниях. Число k_0 называется наивероятнейшим числом «успехов», если вероятность $P_n(k_0)$ не меньше остальных значений $P_n(k)$, т.е. $P_n(k_0) \geq P_n(k)$. Если

$0 < p < 1$, то k_0 определяется из двойного неравенства: $n \cdot p - q \leq k_0 \leq n \cdot p + p$. Т.к. $q = 1 - p$, то правая часть неравенства отличается от левой части на 1. Если выражение $n \cdot p + p$ – целое число, то имеются два наивероятнейших значения, если $n \cdot p + p$ – не целое число, то будет одно значения наивероятнейшего числа «успехов».

Пример5. Доля изделий высшего сорта на данном предприятии составляет 31%. Чему равно наивероятнейшее число изделий высшего сорта в случае отобранной партии из 75 изделий?

Решение. Здесь $p = 0,31$ $q = 0,69$ и $n = 75$. Составляем двойное неравенство: $75 \cdot 0,31 - 0,69 \leq k_0 \leq 75 \cdot 0,31 + 0,69$, т.е. $22,56 \leq k_0 \leq 23,56$, тогда получаем: $k_0 = 23$.

Задачи

- 8.1 Монету бросают 8 раз. Какова вероятность того, что "герб" выпадет ровно 4 раза?
- 8.2 Вычислить вероятность всех возможных появлений герба при пяти бросаниях монеты. Построить график этого биномиального распределения.
- 8.3 Вероятность изготовления на станке нестандартной детали равна 0,02. Какова вероятность того, что среди наугад взятых шести деталей окажется более четырёх стандартных?
- 8.4 Вероятность попадания в цель равна 0,25. Производится 8 выстрелов. Найти вероятность того, что будет: а) не менее 7 попаданий; б) не менее 1 попадания.
- 8.5 Играют два шахматиста одинаковой квалификации. Что вероятнее – выиграть у противника: а) 3 партии из четырёх или 5 партий из восьми? б) не менее трёх партий из четырёх или не менее пяти партий из восьми?
- 8.6 Игральная кость бросается 5 раз. Найти вероятность того, что 2 раза появится число, кратное трём.
- 8.7 Пусть вероятность попадания в цель равна $1/5$. Производится 10 независимых выстрелов. Какова вероятность попадания в

цель по меньшей мере дважды?

- 8.8 При раздаче колоды в 52 карты четырём игрокам один из них 3 раза подряд не получал тузов. Есть ли у него основания жаловаться на невезение?
- 8.9 Фабрика выпускает конфеты четырёх сортов: А, В, С и D. Из партии, содержащей равное количество конфет всех сортов, комплектуются детские подарки, включающие по 8 конфет в каждом. Какова вероятность того, что из 25 подарков в девяти окажется по одной конфете сорта А?
- 8.10 Батарея 14 раз выстрелила по военному объекту, вероятность попадания в который равна 0,2. Найти: а) наивероятнейшее число попаданий и его вероятность; б) вероятность разрушения объекта, если для его разрушения требуется не менее 4 попаданий.
- 8.11 На проверку поступили 10 партий деталей с трёх станков. В каждой партии по 1000 деталей, причём пять из этих партий изготовлены на первом станке, четыре – на втором и одна - на третьем станке. Вероятность производства нестандартных деталей на первом станке равна 0,5 %, на втором – 1 %, а на третьем – 2 %. Из трёх деталей, взятых наугад из имеющихся десяти партий, две детали оказались стандартными, а одна – нестандартная. Найти вероятность того, что проверенные детали изготовлены: а) на первом станке; б) на втором станке; в) на третьем станке.
- 8.12 Вероятность получения удачного результата при проведении сложного химического эксперимента равна $\frac{2}{3}$. Найти наивероятнейшее число удачных экспериментов, если их общее число равно 7.
- 8.13 Вероятность попадания в цель равна 0,35. Производится 10 выстрелов. Найти наивероятнейшее число попаданий и вероятность этого числа попаданий.
- 8.14 В семье 10 детей. Считая одинаково вероятным рождение мальчика и девочки, найти вероятность того, что: а) в семье поровну мальчиков и девочек; б) число мальчиков - от трёх до восьми.

- 8.15 В камере хранения ручного багажа 80% составляют чемоданы. Было выдано 50 мест багажа. Какова вероятность того, что среди выданных вещей было 38 чемоданов?
- 8.16 На отрезок АВ длины d поставлены наугад независимо друг от друга 6 точек. Найти вероятность того, что две точки будут находиться от точки А на расстоянии, меньшем d_1 , а четыре других – на расстоянии большем d_1 ($d_1 < d$).
- 8.17 На факультете 730 студентов. Вероятность рождения каждого студента в данный день равна $1/365$. Найти наиболее вероятное число студентов, родившихся 1 января, и вероятность того, что найдутся 3 студента с одним и тем же днём рождения.
- 8.18 Вероятность получения по лотерее выигрышного билета равна 0,1. Какова вероятность того, что среди 500 купленных билетов не менее 48 и не более 55 выигрышных?
- 8.19 Дворцовый чеканщик кладёт в ящик, вместимостью в 1000 монет, 5 фальшивых. Король, подозревая чеканщика, подвергает монеты проверке. Из ящика для проверки он выбирает наугад 10 монет. Король принимает решение, что, если хотя бы четыре монеты окажутся фальшивыми, чеканщик будет казнён. Каков шанс чеканщику выжить?
- 8.20 Не утруждая себя работой, секретарша рассылает 1000 писем по случайным адресам. Какова вероятность того, что, хотя бы одно письмо попадёт по своему адресу?
- 8.21. Вычислить непосредственно и с помощью теоремы Муавра – Лапласа и оценить погрешность: а) вероятность четырёх успехов в десяти испытаниях; б) вероятность двенадцати успехов в тридцати испытаниях – если вероятность одного успеха равна $1/3$.
- 8.22 Бросаем монету 40 раз. Чему равна вероятность появления герба 25 раз?
- 8.23 Предполагая, что в городе число мужчин и женщин одинаково, определить вероятность того, что среди 100 случайных прохожих окажутся 32 женщины.
- 8.24 Вероятность рождения мальчика равна 0,515. Чему равна вероятность рождения 42 мальчиков среди 80 новорождённых?

- 8.25 При массовом производстве кондитерских изделий вероятность брака равна 0,2. Какова вероятность того, что из 400 наугад взятых изделий ровно 84 будут бракованными?
- 8.26 В условиях задачи 8.25. найти вероятность того, что из 400 взятых наугад изделий бракованных будет от 74 до 84.
- 8.27 Имеется 100 одинаковых станков, работающих независимо друг от друга. Их режим работы таков, что они случайно включаются и работают непрерывно в течение 80% всего рабочего времени. Какова вероятность того, что в произвольный момент рабочего времени включёнными будут от 70 до 86 станков?
- 8.28 Из ста деталей в среднем 15 не удовлетворяют стандарту. Найти вероятность того, что в партии из пятидесяти деталей окажутся нестандартными менее десяти.
- 8.29 По мишени производится 100 независимых выстрелов с вероятностью попадания 0,75 при каждом выстреле. Найти: а) наиболее вероятное число попаданий; б) вероятность того, что абсолютная величина числа попаданий в мишень отклоняется от наиболее вероятного не более, чем на 6; в) вероятность того, что попаданий будет не менее 80.
- 8.30 Вероятность выхода из строя за время T одного прибора равна 0,7. Найти вероятность того, что из 100 приборов в течение времени T выйдут из строя: а) от 14 до 26 приборов; б) не менее 20 приборов; в) не более 28 приборов.

Занятие 9. Случайные величины. Функция распределения.

Плотность вероятности.

Случайной величиной ξ называется однозначная действительная функция $\xi = \xi(\omega)$, определенная на Ω , для которой множество элементарных событий вида $\{\omega: \xi(\omega) < x\}$ является событием для каждого действительного числа x . В определении требуется, чтобы для каждого $x \in \mathbb{R}$ множество $\{\omega: \xi(\omega) < x\} \in \mathfrak{F}$, и это условие гарантирует, что для каждого x

определена вероятность события $\{\xi < x\}$: $F(x) = P\{\xi < x\}$. Функция $F(x) = P\{\xi < x\}$, $-\infty < x < \infty$ называется *функцией распределения* случайной величины ξ .

Основные свойства функции распределения

1. Для $x_2 > x_1$: $P\{x_1 \leq \xi < x_2\} = F(x_2) - F(x_1)$,
2. Функция $F(x)$ - неубывающая.
3. $\forall x \in \mathbb{R} \quad 0 \leq F(x) \leq 1$.
4. $F(-\infty) = 0$. $F(+\infty) = 1$.
5. $\forall x \in \mathbb{R}$ функция $F(x)$ непрерывна слева.
6. Предел справа $F(x+0) = \lim_{x_k \rightarrow x+0} F(x_k) = P\{\xi \leq x\}$.

Случайная величина ξ называется *дискретной*, если множество её значений конечно или счётно. Для полной характеристики дискретной случайной величины, принимающей значения $x_1, x_2, \dots$, достаточно задать вероятности $p_k = P\{\xi = x_k\}$, $k = 1, 2, \dots$. На практике соответствие между x_k и p_k задаётся в виде таблицы (закона) распределения

ξ	x_1	x_2	$\dots$	x_k	$\dots$
p	p_1	p_2	$\dots$	p_k	$\dots$

При этом $\sum_k p_k = 1$, а $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$ обычно записываются по возрастанию. Зная значения x_k и p_k , можно записать функцию распределения $F(x)$ дискретной случайной величины ξ в виде $F(x) = \sum_{x_k < x} p_k$. Это следует из определения функции распределения.

Пример1. Игроку присуждается одно очко, если при бросании монеты выпадет «герб», и ноль очков – в противном случае. Построить функцию распределения выигрыша игрока после трёх бросаний.

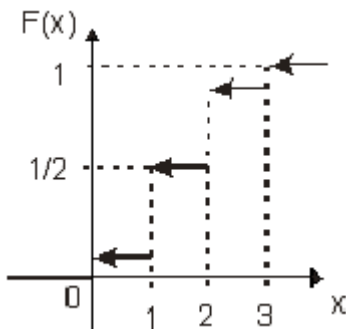
Решение. Пусть ξ - выигрыш (число очков) игрока после трёх бросаний монеты; $\xi = \{0, 1, 2, 3\}$. Далее находим

$$p_0 = P\{\xi = 0\} = 1/8, \quad p_1 = P\{\xi = 1\} = 3/8, \quad p_2 = P\{\xi = 2\} = 3/8,$$

$$p_3 = P\{\xi = 3\} = 1/8.$$

ξ	0	1	2	3
p	1/8	3/8	3/8	1/8

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1/8, & 0 < x \leq 1, \\ 4/8, & 1 < x \leq 2, \\ 7/8, & 2 < x \leq 3, \\ 1, & x > 3 \end{cases}$$



Случайная величина ξ называется *непрерывной*, если существует такая неотрицательная, интегрируемая на числовой прямой функция $p(t)$, что

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(t) dt, \quad (1)$$

Функция $p(t)$, $-\infty < t < \infty$ называется *плотностью вероятности* случайной величины ξ .

Основные свойства плотности вероятности

$$1. \forall x_1, x_2 : x_1 < x_2 \Rightarrow P\{x_1 \leq \xi < x_2\} = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} p(t)dt ,$$

2. Вероятность того, что ξ принимает фиксированное значение из R , равна нулю, т.е. $P\{\xi = x\} = 0$.

$$3. \int_{-\infty}^{\infty} p(t)dt = F(+\infty) = 1.$$

Пример2. Случайная величина ξ имеет следующую плотность вероятности:

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ A(1 - \cos 2x), & 0 < x \leq \pi/2, \\ 0, & x > \pi/2 \end{cases}$$

Найти: 1) коэффициент A ; 2) функцию распределения вероятности; 3) вероятность того, что случайная величина ξ принадлежит интервалу $(0; \pi/2)$.

Решение. 1) Коэффициент находим из свойства 3 плотности вероятности:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(t)dt = A \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 2t)dt = A \left(t - \frac{\sin 2t}{2} \right)_0^{\pi/2} = A \frac{\pi}{2} = 1.$$

Отсюда находим $A = \frac{2}{\pi}$. Таким образом,

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{2}{\pi}(1 - \cos 2x), & 0 < x \leq \pi/2, \\ 0, & x > \pi/2 \end{cases}$$

2) Функцию распределения $F(x)$ находим из формулы (1):

если $x \leq 0$, то $F(x) = 0$,

$$\text{если } x \leq \frac{\pi}{2}, \text{ то } F(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x (1 - \cos 2t) dt = \frac{2}{\pi} \left(x - \frac{\sin 2x}{2} \right),$$

$$\text{если } x > \frac{\pi}{2}, \text{ то } F(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 2t) dt = 1.$$

Таким образом, функция распределения имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{2}{\pi} \left(x - \frac{\sin 2x}{2} \right), & 0 < x \leq \pi/2, \\ 1, & x > \pi/2 \end{cases}$$

3) вероятность

$$P\{0 < \xi < \pi/4\} = F(\pi/4) - F(0) = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\sin(\pi/2)}{2} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}.$$

Задачи

9.1 В результате решения некоторой задачи по теории вероятности студент составил следующий ряд распределения

x_j	1	2	3	4	5	6
$P(\xi = x_j)$	0,004	0,033	0,132	0,299	0,308	0,178

Может ли эта таблица быть рядом распределения некоторой случайной величины?

9.2 Производится 4 независимых выстрела с вероятностью попадания $p = 0,6$ при каждом выстреле. а) Построить ряд распределения числа попаданий; б) найти и построить функцию распределения числа попаданий.

9.3 Производится стрельба по мишени до первого попадания.

Вероятность промаха при отдельном выстреле равна p .

Найти ряд распределения числа промахов.

- 9.4 Игральную кость подбрасывают 4 раза. Найти ряд распределения и функцию распределения числа выпадения шестёрки.

- 9.5 Игральную кость бросают до первого появления шестёрки. Найти ряд распределения и функцию распределения числа сделанных бросков.

- 9.6 Случайная величина ξ имеет следующее распределение:

x_j	-2	-1	0	1	2
$P(\xi = x_j)$	0,1	0,2	0,2	0,4	0,1

Найти выражение и построить график функции распределения ξ . Найти вероятность того, что величина ξ примет значение, не превосходящее по абсолютной величине 1.

- 9.7 Монету бросают 5 раз. Найти функцию распределения числа выпадения герба. Построить график функции распределения.

- 9.8 Монету бросают 5 раз. Найти ряд распределения и функцию распределения вероятностей случайной величины, равной отношению числа выпадений герба к числу выпадений решётки. Найти ряд распределения для суммы числа очков, выпадающих при бросании двух игральных костей.

- 9.9 В двух ящиках находятся по 10 пронумерованных шаров. В первом ящике три шара имеют номер 1, четыре шара имеют номер 2, два шара имеют номер 3 и один шар имеет номер 4. Во втором ящике четыре шара имеют номер 1, пять шаров имеют номер 2 и один шар имеет номер 3. Из этих ящиков наугад берут по одному шару и вычисляют произведение их номеров. Найти ряд распределения вероятностей получения числа, равного произведению номеров.

- 9.10 Игральную кость бросают 4 раза. Найти ряд распределения и функцию распределения вероятностей случайной величины, равной разности чисел выпадения шестёрки и тройки.

- 9.11 Дискретная случайная величина ξ имеет ряд распределения:

x_j	-2	-1	0	1	2
$P(\xi = x_j)$	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

Построить ряды распределения следующих случайных величин: а) $2\xi + 5$; б) $\xi^2 + 1$; в) $|\xi|$; г) 2^ξ ; д) $\min\{\xi; 1\}$; е) $1/(3 - \xi)$.

- 9.12 Случайная величина ξ имеет следующую функцию распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ x^2 / 6, & 0 < x \leq 2, \\ -x^2 / 3 + 2x - 2, & 2 < x \leq 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

Требуется: а) построить график функции $F(x)$; б) найти плотность вероятности $p(x)$ и построить её график; в) найти вероятность попадания случайной величины ξ в интервал $(1; 2)$.

- 9.13 Случайная величина ξ имеет следующую плотность вероятности

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1, \\ A/x^4, & x > 1. \end{cases}$$

Определить: а) коэффициент A ; б) вероятность $P(1 < \xi < 2)$; в) вероятность того, что при трёх независимых испытаниях случайная величина ξ ни разу не попадёт в интервал $(1; 2)$.

- 9.14 Плотность распределения случайной величины ξ имеет

вид $p(x) = \frac{A}{e^x + e^{-x}}, x \in \mathbb{R}$. Определить: а) коэффициент A ; б) функцию распределения случайной величины ξ ; в) вероятность попадания случайной величины ξ в интервал $(0;2)$.

9.15 Можно ли выбрать постоянную A так, чтобы функция A/x^4 была плотностью вероятности на множестве: а) $[1; \infty)$; б) $[0; \infty)$; в) $[-2; -1]$; г) $[-3; 0]$.

9.16 Случайная величина ξ равномерно распределена на отрезке $[0;1]$. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = -\ln \xi$.

9.17 Точка брошена наугад внутрь круга радиуса R . Вероятность попадания точки в любую область, расположенную внутри круга, пропорциональна площади области. Найти функцию распределения расстояния точки до центра круга.

9.18 На отрезок оси ординат между точками $(0,0)$ и $(0,R)$ наудачу брошена точка. Через точку попадания проведена хорда окружности $x^2 + y^2 = R^2$, перпендикулярная оси ординат. Найти функцию распределения длины этой хорды.

9.19 На диаметре, стягивающем полуокружность единичного радиуса, берётся наугад точка A . Вероятность взять точку на любом отрезке диаметра пропорциональна длине этого отрезка. Найти функцию распределения положения на полуокружности точки B , проекцией которой на диаметр является точка A .

Занятие 10. Числовые характеристики случайных величин

Математическим ожиданием (средним значением) дискретной случайной величины ξ называется число $M\xi = \sum_{i=1}^n x_i p_i$. Если

ξ непрерывная случайная величина, то $M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx$.

Дисперсией случайной величины ξ называется число:

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2.$$

Для практических применений вычисления дисперсии удобна следующая формула:

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2.$$

Если ξ - дискретная случайная величина, то

$$D\xi = \sum_{k=1}^{\infty} (x_k - M\xi)^2 p_k;$$

Если ξ непрерывная случайная величина, то

$$D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M\xi)^2 p(x)dx.$$

Дисперсия имеет размерность квадрата случайной величины; для характеристики разброса удобно пользоваться величиной, размерность которой совпадает с размерностью случайной величины. Такая величина $\sigma = \sqrt{D\xi}$ называется *среднеквадратичным отклонением* ξ .

Пример1. Из партии в 25 изделий, среди которых имеются 6 нестандартных, выбраны случайным образом для проверки их качества 3 изделия. Найти математическое ожидание и среднее квадратичное

ское отклонение случайной величины ξ – числа нестандартных деталей, содержащихся в выборке.

Решение. Случайная величина ξ принимает значения 0, 1, 2, 3. Вероятность того, что в этой выборке окажется ровно k нестандартных изделий, вычисляем, пользуясь правилом произведения и определением

вероятности, по формуле: $P(\xi = k) = \frac{C_6^k \cdot C_{12}^{3-k}}{C_{15}^3}$, $k = 0, 1, 2, 3$. Таким

образом, $P_1 = 0,41$, $P_2 = 0,43$, $P_3 = 0,11$, $P_4 = 0,05$. По определению математического ожидания для дискретной случайной величины получаем:

ξ	0	1	2	3
ξ^2	0	1	4	9
P	0,41	0,43	0,11	0,05

$$M(\xi) = 0 \cdot 0,41 + 1 \cdot 0,43 + 2 \cdot 0,11 + 3 \cdot 0,05 = 0,80.$$

$$M(\xi^2) = 0 \cdot 0,41 + 1 \cdot 0,43 + 4 \cdot 0,11 + 9 \cdot 0,05 = 1,32.$$

$$D(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi) = 1,32 - (0,8)^2 = 0,68.$$

$$\sigma = \sqrt{D(\xi)} = \sqrt{0,68} = 0,82.$$

Пример2. Найти среднеквадратическое отклонение случайной величины ξ , заданной функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -2, \\ x/4 + 1/2, & -2 < x \leq 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Решение. Найдём плотность распределения:

$$p(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -2, \\ 1/4, & -2 < x \leq 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases} \text{ вычислим математическое ожида-}$$

ние $M\xi = \int_{-2}^2 x \cdot p(x) dx = \int_{-2}^2 \frac{x}{4} dx = 0$, далее получаем значение диспер-

сии случайной величины: $D\xi = \int_{-2}^2 x^2 \cdot p(x) dx = \int_{-2}^2 \frac{x^2}{4} dx = \frac{4}{3}$. При

этом среднеквадратическое отклонение случайной величины

$$\sigma = \sqrt{D\xi} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Задачи

- 10.1 Дискретная случайная величина ξ имеет ряд распределения:

x_j	2	4	7	10	12
$P(\xi = x_j)$	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

Найти математическое ожидание и дисперсию этой величины

- 10.2 Среди 20 приборов в среднем имеется 6 неточных. Найти ряд распределения числа неточных приборов среди наудачу отобранных пяти приборов. Определить математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.
- 10.3 Прибор состоит из трёх элементов, отказы в работе которых независимы, а вероятности отказов равны соответственно: $p_1 = 0,1$, $p_2 = 0,2$ и $p_3 = 0,3$. Найти математическое ожидание числа отказавших элементов.
- 10.4 Выпущено 100 лотерейных билетов. Из этих билетов 40 принесут их владельцам по 1 руб., 10 по 5 руб., 5 по 10 руб. Остальные билеты без выигрыша. Какой средний выигрыш соответствует одному билету.
- 10.5 Найти математическое ожидание и дисперсию числа очков при одном бросании игральной кости и суммы очков при бросании двух игральных костей.
- 10.6 Круглая мишень, разделённая на 8 равных секторов, каждый из которых имеет порядковый номер от 1 до 8, вращается с большой скоростью вокруг своего центра. Каждый выстрел по мишени стоит 5 руб. При попадании в сектор с номером N стрелок получает N руб. Стоит ли стрелку участвовать в такой игре (иными словами, каков средний выигрыш может получить стрелок)?
- 10.7 Круглая мишень разделена на 5 секторов. Сектор, с порядковым номером 1, развёрнут на 180 градусов; сектор, с порядковым номером 2 - на 90 градусов; сектор, с порядковым номером 3 - на 45 градусов и секторы, с порядковыми номе-

рами 4 и 5 - на 22,5 градусов. Мишень вращается с большой скоростью вокруг своего центра. Каждый выстрел по мишени стоит 5 руб. При попадании в сектор с номером 1 стрелок выигрывает 1 руб.; в сектор с номером 2 - проигрывает 2 руб.; в сектор с номером 3 - выигрывает 3 руб.; в сектор с номером 4 - проигрывает 4 руб. и в сектор с номером 5 - выигрывает 5 руб. Стоит ли стрелку участвовать в такой игре?

10.8 При бросании трёх игральных костей игрок выигрывает 1800 руб., если выпадет шестёрка на всех трёх кубиках; он выигрывает 140 руб., если шестёрка выпадет на двух кубиках и 20 руб., если шестёрка появится только на одном кубике. Какова должна быть ставка на участие в игре, чтобы игрок был бы без проигрыша (при длительной игре)?

10.9 Вдоль проспекта размещены 4 светофора, каждый из которых пропускает автомобиль с вероятностью 0,5. Найти математическое ожидание числа светофоров до первой остановки автомобиля.

10.10 На отрезке АВ длиной L произвольно выбрали две точки М и N. Каково математическое ожидание длины отрезка MN?

10.11 Дискретная случайная величина ξ имеет ряд распределения:

x_j	-1	0	1	2
$P(\xi = x_j)$	0,2	0,1	0,3	0,4

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\eta = 2^\xi$.

10.12 Дискретная случайная величина ξ имеет только 2 возможных значения: x_1 и x_2 , причём $x_2 > x_1$ и $P(\xi = x_1) = 0,6$. Построить закон распределения величины ξ , если $M\xi = 1,4$, $D\xi = 0,24$.

10.13 Дискретная случайная величина ξ имеет только 3 возможных значения: $x_1 = 1$, x_2 и x_3 , причём $x_1 < x_2 < x_3$.

Известно также, что $P(\xi = x_1) = 0,3$ и $P(\xi = x_2) = 0,2$. Построить закон распределения величины ξ , если $M\xi = 2,2$, $D\xi = 0,76$.

10.14 Величина ξ принимает целые неотрицательные значения $n \geq 0$ с вероятностями $p_k = Ak^n / n!$. Найти величины параметров A и k , если известно, что $M\xi = a$.

10.15 Величина ξ принимает все целые положительные значения с вероятностями, убывающими в геометрической последовательности. Найти знаменатель этой прогрессии q , если известно, что $M\xi = 10$.

10.16 Случайная величина имеет следующую плотность вероятности

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ 3x^2, & -1 \leq x \leq 0, \\ 0, & x > 0. \end{cases}$$

Найти математическое ожидание и дисперсию этой величины.

10.17 Минутная стрелка электрических часов перемещается скачком в конце каждой минуты. Если в данное мгновение часы показывают t минут, то истинное время T с одинаковой вероятностью может иметь любое значение от t до $t+1$ минуты. Найти математическое ожидание отклонения истинного времени от того, которое показывают часы, и дисперсию этого отклонения.

10.18 Случайная величина ξ равномерно распределена на отрезке $[0;1]$. Вычислить математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\eta = \sin^2 \xi$.

10.19 Кривая распределения случайной величины представляет собой полу эллипс с полуосями a и b . Величин a известна. Определите величину b , найдите математическое ожидание

и дисперсию случайной величины.

10.20 Дана функция

$$f(x) = \begin{cases} 0, x < 0, \\ \lambda(4x - x^2), 0 \leq x \leq 2, \\ 0, x > 2 \end{cases}$$

При каком значении λ функция $f(x)$ может быть принята за плотность распределения случайной величины ξ ? Определить это значение λ , найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайной величины.

Занятие 11. Нормальный закон распределения. Центральная предельная теорема

Центральная предельная теорема. Пусть $\{\xi_n\}$ - последовательность независимых и одинаково распределенных случайных величин, для которых $M\xi_n = \mu$, $D\xi_n = \sigma^2$, $\sigma > 0$, $n = 1, 2, \dots$. Тогда для последовательности

$$\eta_n = \frac{\sum_{k=1}^n (\xi_k - \mu)}{\sigma\sqrt{n}}$$

справедливо $\lim_{n \rightarrow \infty} P\{\eta_n < x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-z^2/2} dz = \frac{1}{2} + \Phi(x)$, где $\Phi(x)$ - функция Лапласа.

Следствие. Интегральная предельная теорема Муавра - Лапласа. Пусть $\xi = \xi_1 + \dots + \xi_n$ - число успехов в серии из n независимых испытаний, ξ_k - число успехов при k -м испытании, p - вероятность успеха при каждом испытании.

$$\text{Тогда } \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\frac{\xi - np}{\sqrt{npq}} < x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-z^2/2} dz, \text{ причем стремле-}$$

ние к пределу равномерно по $x \in \mathbb{R}$.

Пример. Отдел технического контроля проверяет на стандартность 1000 деталей. Выбранная деталь с вероятностью 0,975 является стандартной. Найти: а) вероятность того, что число стандартных деталей среди проверенных отличается от наивероятнейшего числа деталей не более, чем на 10; б) с вероятностью 0,95 величину наибольшего отклонения числа стандартных деталей среди проверенных от наивероятнейшего числа стандартных деталей; в) число проверяемых деталей, среди которых с вероятностью 0,9999 стандартные детали составляют не менее 95%.

Решение. Здесь независимое испытание—проверка на стандартность выбранной детали. По условию: $n = 1000$, $p = 0,975$, $q = 0,025$. Пусть m — число стандартных деталей среди проверенных. Тогда наивероятнейшее число стандартных деталей равно $k_0 = 975$. Требуется вычислить вероятность следующего события: $|m - 975| \leq 10$.

$$P(|m - 975| \leq 10) \approx 2\Phi\left(\frac{10}{\sqrt{1000 \cdot 0,975 \cdot 0,025}}\right) = 2\Phi(2,026) = 0,9572$$

Далее в пункте а) нужно решить обратную задачу: зная вероятность события $|m - np| \leq \varepsilon$ нужно найти величину отклонения ε . Применяя

$$\text{формулу: } 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{1000 \cdot 0,975 \cdot 0,025}}\right) = 0,95, \quad \text{откуда}$$

$$\Phi\left(\frac{\varepsilon}{4,937}\right) = 0,475. \text{ По таблице находим, что } 0,475 = \Phi(1,96). \text{ Т.о.}$$

$$\frac{\varepsilon}{4,937} = 1,96, \text{ т.е. } \varepsilon = 9,6765; \text{ В последнем условии требуется найти}$$

число n проверяемых деталей, которое удовлетворяло бы условию:

$P(0,95 \cdot n \leq m \leq n) = 0,9999$. По интегральной теореме Муавра–Лапласа

$$\text{ем: } x_1 = \frac{0,95 \cdot n - np}{\sqrt{npq}} = \sqrt{n} \cdot \frac{0,95 - 0,975}{\sqrt{0,975 \cdot 0,025}} = -\sqrt{n} \sqrt{\frac{0,025}{0,975}},$$

$$x_2 = \frac{n - np}{\sqrt{npq}} = \sqrt{n} \cdot \frac{1 - 0,975}{\sqrt{0,975 \cdot 0,025}} = \sqrt{n} \sqrt{\frac{0,025}{0,975}}, \text{ тогда}$$

$$P(0,95 \cdot n \leq m \leq n) = 2 \cdot \Phi\left(\sqrt{\frac{n \cdot 0,025}{0,975}}\right) = 2 \cdot \Phi\left(\sqrt{\frac{n}{39}}\right) \text{ или}$$

$$\Phi\left(\sqrt{\frac{n}{39}}\right) = 0,49995 \text{ и из таблицы находим: } n \approx 594.$$

Задачи

- 11.1 Случайная величина ξ подчиняется нормальному закону с параметрами $a = 0$ и $\sigma = 0,294$. Вычислить вероятности неравенств: а) $|\xi| < 0,25$; б) $0,5 < \xi < 0,75$.
- 11.2 Случайная величина ξ распределена по нормальному закону с параметрами $a = 0$ и σ . При каком значении σ вероятность попадания в интервал (1;2) будет наибольшей?
- 11.3 На станке изготавливается некоторая деталь. Её длина ξ представляет случайную величину, распределённую по нормальному закону, и имеет математическое ожидание 18 см и среднее квадратическое отклонение, равное 0,2 см. Найти вероятность того, что длина детали будет заключена между 17,7 см и 18,3 см.
- 11.4 Диаметр круглой детали, изготовленной на станке, представляет случайную величину, распределённую по нормальному закону, и имеет среднее значение 50 мм и среднее квадратическое отклонение 0,4 мм. Найти вероятность того, что отклонение длины диаметра от среднего значения по абсо-

лутной величине будет заключено между числами 0,6 мм и 0,8 мм.

- 11.5 При взвешивании тела получен средний вес 2,36 кг; среднее квадратическое отклонение веса равно 0,025 кг. Какой процент всех взвешиваний даст результат в пределах от 2,30 кг до 2,40 кг?
- 11.6 На станке изготавливаются детали, длина которых должна равняться a мм. Установлено, что 60% деталей отклоняется по длине от a мм не более, чем на 2 мм в обе стороны. Какой процент деталей будет по длине отклоняться от a мм не более, чем на 2 мм?
- 11.7 Дисперсия каждой из 4500 независимых, одинаково распределённых случайных величин, равна 5. Найти вероятность того, что среднее арифметическое этих случайных величин отклонится от своего математического ожидания не более, чем на 0,04.
- 11.8 Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,3. Сколько нужно произвести выстрелов для того, чтобы с вероятностью 0,99 отклонение частоты попадания в мишень от вероятности 0,3 в обе стороны не превзошло $\varepsilon = 0,04$?
- 11.9 В партии деталей имеется 1% брака. Найти вероятность того, что среди 50 отобранных деталей из этой партии 0, 1, 2 бракованных.
- 11.10 При работе станков их неисправности образуют простейший поток. Среднее количество неисправностей в час равно 2. Найти вероятность того, что хотя бы одна новая неисправность возникнет не более чем через 0,5 часа после предыдущей.
- 11.11 Для замера механических напряжений используются специальные тензодатчики. Определить среднюю квадратическую ошибку тензодатчика, если он не имеет систематических ошибок, а случайные ошибки распределены по нормальному закону и с вероятностью 0,8 не выходят за пределы $\pm 0,2$ мм.
- 11.12 Браковка шариков для шарикоподшипников производится следующим образом: если шарик не проходит через отверстие

диаметром d_1 , но проходит через отверстие диаметром $d_2 > d_1$, то его размер считается приемлемым. Если какое-нибудь из этих условий не выполняется, то шарик бракуется. Известно, что диаметр шарика D – есть случайная величина, распределённая по нормальному закону с характеристиками: $M\xi = (d_1 + d_2) / 2$, $\sigma = (d_2 - d_1) / 4$. Определить вероятность того, что шарик будет забракован.

ПРИЛОЖЕНИЯ

ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Дискретные случайные величины

1. БИНОМИАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ (БЕРНУЛЛИ)

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} . \text{ Числовые характеристики: } \\ M(\xi) = n \cdot p, \quad D(\xi) = n \cdot p \cdot (1-p) = n \cdot p \cdot q .$$

2. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПУАССОНА

$$P(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} .$$

ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ:

$$M(\xi) = D(\xi) = \lambda = n \cdot p .$$

Непрерывные случайные величины

3. Равномерное распределение

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ 1/(b-a), & a \leq x \leq b, \\ 0, & x > b. \end{cases}$$

Числовые характеристики:

$$M(\xi) = (a+b)/2, \quad D(\xi) = (b-a)^2/12$$

4. Показательное распределение

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \lambda \cdot e^{-\lambda x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Числовые характеристики: $M(\xi) = 1/\lambda$, $D(\xi) = 1/\lambda^2$

Простейший поток событий

Вероятность появления k событий простейшего потока за время t: $P_t(k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$, где λ – интенсивность потока (среднее число событий в единицу времени)
5. Нормальное распределение $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot b} e^{-\frac{(x-a)^2}{2b^2}}.$ Числовые характеристики: $M(\xi) = a$, $D(\xi) = \sigma^2 = b^2$
Вероятность попадания случайной величины ξ на интервал (α, β): $P(\alpha < \xi < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$ где $\Phi(x)$ – функция Лапласа (табулирована). Вероятность отклонения случайной величины от математического ожидания на заданную величину ε: $P(\xi - a < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$ В частности, при $\varepsilon = 3\sigma$: $P(\xi - a < 3\sigma) = 2\Phi(3) = 0,9973.$ Правило трех сигм: событие $\xi - a < 3\sigma$ является практически достоверным

По завершению изучения вышеуказанных тем (Занятия №№1–11), студент выполняет индивидуальные задания из типового расчёта и контрольную работу, один из вариантов которой предложен ниже:

1. Предприятие может предоставить работу 12 человекам. Имеются 18 претендентов на работу, среди которых 8 женщин и 10 мужчин. Какова вероятность того, что предприятие предоставит работу 5 женщинам и 8 мужчинам, если оно равновероятно может предоставить работу мужчине или женщине?
2. Числа p и q наудачу выбираются из интервала $(-1; 1)$. Найти вероятность того, что корни уравнения $x^2 + px + q = 0$ действительные и отрицательные.
3. Можно ли подобрать постоянную a так, чтобы функция $p(x) = a \cdot x^{-4}$ была плотностью распределения на множестве:
а) $[-2; -1]$, б) $[-3; 0]$?
4. В ящике лежат 20 теннисных мячей, в том числе 12 новых и 8 иггранных. Их ящика извлекают наугад два мяча для игры и после игры возвращают в ящик. После этого из ящика вынимают два мяча для следующей игры. Найти вероятность того, что оба мяча будут новыми.
5. Если в среднем левши составляют 1%, каковы шансы на то, что среди 200 человек окажется от 4 до 8 левшей?
6. В партии из 10 деталей 3 бракованные. Какова вероятность того, что наугад выбранные три детали оказались: первые две годные, третья бракованная?

Литература

1. В.М. Бородин. Теория вероятностей и математическая статистика. Практикум, Часть 1, Учебное пособие НГТУ, Новосибирск 2001 г.
2. В.Е. Гмурман. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике, М., Высшая школа, 2003г.
3. Сборник задач по математике для втузов. Ч. 3. Теория вероятностей и математическая статистика. Учебное пособие для втузов. Под ред. А.В. Ефимова М., Наука, 1990 г.
4. П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. Высшая математика в упражнениях и задачах, Часть 2, М., Высшая школа, 1986 г.
5. В.Я. Долгих. Практикум по специальным главам математического анализа (ТФКП ОИ ТВМС), Учебное пособие НГТУ, Новосибирск, 2003 г.
6. Н.Н. Веричев. Сборник задач по теории вероятностей. Задачи и методические указания к их решению для студентов дневного отделения всех специальностей, Волжская государственная академия водного транспорта, г. Нижний Новгород, 1995 г.