Лекция 15

2.8. Задача интервального оценивания. Доверительная вероятность (надёжность) и доверительный интервал

В предыдущем параграфе рассматривался вопрос об оценке неизвестного параметра θ одним числом. Оценку неизвестного параметра генеральной совокупности одним числом называют *точечной оценкой*. Наряду с точечным оцениванием параметров в математической статистике занимаются вопросами интервального оценивания. Задачу *интервального оценивания* в самом общем виде можно сформулировать так: по данным выборки построить числовой интервал, относительно которого с заранее выбранной вероятностью можно сказать, что внутри этого интервала находится оцениваемый параметр. Интервальное оценивание особенно необходимо при малом числе наблюдений, когда точечная оценка мало надежна.

Доверительным интервалом $I_\beta = (\tilde{\theta}_{(1)} \cdot \tilde{\theta}_{(2)})$ для параметра θ называют такой интервал, относительно которого можно с заранее выбранной вероятностью $\beta = 1 - \alpha$, близкой к единице, утверждать, что он содержит неизвестное значение параметра θ, т.е.

$$P(\tilde{\theta}_{(1)} < \theta < \tilde{\theta}_{(2)}) = \beta. \tag{8.1}$$

Вероятность $\beta = 1 - \alpha$ принято называть *доверительной вероятностью* (надежностью), а число α-*уровнем значимости*. Границы интервала I_β: $\tilde{\theta}_{(1)}$ и $\tilde{\theta}_{(2)}$ называют *доверительными границами*.

Необходимо отметить, что чем меньше для выбранной вероятности $\left|\tilde{\theta}_{(2)} - \tilde{\theta}_{(1)}\right|$, тем точнее оценка неизвестного параметра θ и, наоборот, если этот интервал велик, то оценка, произведенная с его помощью, мало пригодна для практики. Так как доверительные границы $\tilde{\theta}_{(1)}$ и $\tilde{\theta}_{(2)}$ зависят от элементов выборки, т.е. ими определяются, то значения $\tilde{\theta}_{(1)}$ и $\tilde{\theta}_{(2)}$ могут меняться от выборки к выборке.

Остановимся на вопросе о том, каким принципами следует руководствоваться при выборе доверительной вероятности β, так как это не является математической задачей, а определяется конкретно решаемой проблемой. Для иллюстрации этого положения приведем следующий пример. Пусть одно предприятие выпускает электролампы, а другое – парашюты. Если на 100 ламп встретится одна бракованная, то с этим можно мириться при условии, что выбросить 1% дешевле, чем перестраивать технологический процесс. Если же на 100 парашютов встретится один бракованный, что может повлечь за собой серьезные последствия, то с таким положением мириться никак нельзя. Следовательно, в первом случае вероятность брака α=0,01 приемлема, а во втором – нет, поэтому выбор доверительной вероятности $\beta = 1 - \alpha$ следует проводить, исходя из конкретных условий задачи.

Общая схема построения доверительных интервалов для параметров нормального закона распределения вероятностей такова:

1. Из генеральной совокупности с функцией распределения $F\left(x,\theta\right)$ извлекается выборка объема n. По результатам этой выборки каким-либо методом (например, методом моментов) находится точечная оценка $\left(x_1,...,x_n\right)$ оцениваемого параметра θ.

2. Составляется случайная величина, например $Y\left(\theta\right)$, связанная с параметром θ и имеющая известную плотность распределения вероятностей $f\left(y,\theta\right)$.

3. Задают доверительную вероятность $\beta = 1-\alpha$ (равной, например 0,90; 0,95; 0.99; 0,999 и т.п.)

4. Используя плотности вероятностей случайной величины Y, находят такие два числа c_1 и c_2 (квантили), что

$$P(c_1 < Y\left(\theta\right) < c_2) = \int_{c_1}^{c_2} f\left(y,\theta\right)dy = 1-\alpha. \qquad (8.2)$$

5. Неравенство в круглых скобках в уравнении (8.2) преобразуется в равносильное неравенство

$$P(\tilde{\theta}_{(1)} < \theta < \tilde{\theta}_{(2)}) = 1 - \alpha,$$

накрывающее с заданной вероятностью неизвестный параметр θ.

Используем указанную схему для нахождения параметров m и σ нормального закона распределения.

2.9. Построение доверительного интервала для математического ожидания нормального распределения при известной дисперсии

Используем общую схему предыдущего параграфа.

1. Случайная величина X распределена нормально, что коротко можно записать $X \to N(m,\sigma)$, причем дисперсия D этого распределения известна. (В этом случае среднее квадратическое отклонение $\sigma = \sqrt{D}$.) Требуется оценить неизвестное математическое ожидание m. При решении этой задачи воспользуемся тем, что величина $\tilde{m}$ из (7.1), (7.4) представляет собой сумму n независимых нормально распределенных случайных величин X_i. Примем без доказательства, что оценка $\tilde{m}$ будет также распределена нормально с параметрами $M[\tilde{m}]=m, \quad D[\tilde{m}]=\dfrac{\sigma^2}{n}$, в соответствии (7.5), (7.6), т.е. $\tilde{m} \to N\left(m, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

2. Составим случайную величину

$$Z = \frac{(\tilde{m} - m)\sqrt{n}}{\sigma}, \tag{9.1}$$

которая подчиняется нормальному закону распределения с математическим ожиданием, равным нулю, и дисперсией, равной, единице (поэтому величину Z называют нормированным отклонением): $Z \to N(0,1)$. Действительно, используя свойства математического ожидания и дисперсии, имеем

$$M[Z] = M\left[\frac{(\tilde{m} - m)\sqrt{n}}{\sigma}\right] = \frac{\sqrt{n}}{\sigma} M[\tilde{m} - m] = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left(M[\tilde{m}] - M[m]\right) = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(m - m) = 0,$$

$$D[Z] = D\left[\frac{(\tilde{m} - m)\sqrt{n}}{\sigma}\right] = \frac{n}{\sigma^2} D[\tilde{m} - m] = \frac{n}{\sigma^2} D[m] = \frac{n}{\sigma^2} \cdot \frac{\sigma^2}{n} = 1.$$

Таким образом, вероятность любого отклонения $|\tilde{m}-m|$ может быть вычислена по формуле

$$P\left(\left|\frac{(\tilde{m}-m)\sqrt{n}}{\sigma}\right|<\varepsilon_\beta\right)=2\Phi\left(\varepsilon_\beta\right), \qquad (9.2)$$

где $\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-t^2/2}dt$ - функция Лапласа (см. приложение 2 из [1]).

3. Задаем доверительную вероятность $\beta=1-\alpha$.

4. Решая уравнение $2\Phi\left(\varepsilon_\beta\right)=\beta$ с использованием таблицы значений функции Лапласа определим квантиль ε_β.

5. Преобразуем неравенство в левой части формулы (9.2):

$$P\left(\left|\tilde{m}-m\right|<\varepsilon_{\beta}\cdot\sigma/\sqrt{n}\right)=2\Phi\left(\varepsilon_{\beta}\right)$$

или

$$P\left(-\varepsilon_{\beta}\cdot\sigma/\sqrt{n}<\left(\tilde{m}-m\right)<\varepsilon_{\beta}\cdot\sigma/\sqrt{n}\right)=2\Phi\left(\varepsilon_{\beta}\right),$$

откуда

$$P\left(\tilde{m}-\varepsilon_{\beta}\cdot\sigma/\sqrt{n}<m<\tilde{m}+\varepsilon_{\beta}\cdot\sigma/\sqrt{n}\right). \qquad (9.3)$$

Таким образом, с вероятностью β можно утверждать, что интервал

$$I_{\beta}=\left(\tilde{m}-\varepsilon_{\beta}\cdot\sigma/\sqrt{n};\;\; \tilde{m}+\varepsilon_{\beta}\cdot\sigma/\sqrt{n}\right) \qquad (9.4)$$

является доверительным для математического ожидания m.

Замечание. Пусть $\Delta = \varepsilon_\beta \cdot \sigma / \sqrt{n}$. Тогда:

1) при фиксированном значении ε_β с возрастанием n величина Δ уменьшается, следовательно, точность интервального оценивания увеличивается;

2) увеличение доверительной вероятности β ведет к увеличению ε_β, так как функция $\Phi(x)$- возрастающая. Поэтому при фиксированном объеме выборки n величина Δ возрастает, что ведет к уменьшению точности оценки.

Пример. Случайная величина X имеет нормальное распределение с известным средним квадратичным отклонением $\sigma = 2$. Найти доверительный интервал I_β для оценки неизвестного математического ожидания m по оценке $\tilde{m} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i$, если объем выборки n=16 и задана доверительная вероятность $\beta = 0,95$.

Решение. По приложению 2 из [1] находим ε_β, соответствующее вероятности 0,95/2, т.е. $\varepsilon_\beta = 1,96$. Далее определяем

$$\Delta = \varepsilon_\beta \cdot \sigma \Big/ \sqrt{n} = \left(1,96 \cdot 2\right) \Big/ \sqrt{16} = 0,98.$$

Следовательно, $\left(\tilde{m} - 0,98; \tilde{m} + 0,98\right)$ - доверительный интервал для оценки m с вероятностью $\beta = 0,95$. Например, если $\tilde{m} = 4,2$, то доверительный интервал будет следующим: (3,22; 5,18), поэтому можно записать, что 3,22<m<5,18.

2.10. Построение доверительного интервала для математического ожидания случайной величины *X*, распределенной по нормальному закону при неизвестной дисперсии

1. Пусть случайная величина X распределена по нормальному закону: $X \to N(m, \sigma)$, причем математическое ожидание m и среднее квадратическое отклонение $\sigma = \sqrt{D}$ этого распределения неизвестны.

Для нахождения параметров m и σ из генеральной нормальной совокупности X извлечена выборка объема n. На основании этой выборки найдем точечные *несмещенные* и состоятельные оценки параметров: $\tilde{m}$ по формулам (7.1), (7.4) и $\tilde{\sigma} = \sqrt{\tilde{D}}$ по формуле (7.11).

2. Для построения доверительного интервала для математического ожидания составим вспомогательную случайную величину

$$t = \frac{(\tilde{m} - m)\sqrt{n}}{\tilde{\sigma}}. \qquad (10.1)$$

В литературе по математической статистике доказано, что распределение случайной величины t из (10.1) не зависит ни от математического ожидания m случайной величины X ни от дисперсии D, а зависит лишь от объема выборки n. Закон распределения случайной величины t называют t – *распределением Стьюдента* с k=n-1 степенями свободы.

Плотность распределения Стьюдента имеет вид

$$S_k(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)\left(1+\frac{t^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}}{\sqrt{\pi k}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}, \quad -\infty < t < \infty, \tag{10.2}$$

где $\Gamma(x)$ – гамма-функция, которая определяется (по Л. Эйлеру) следующим образом:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty u^{x-1} e^{-u} du.$$

Можно показать, что математическое ожидание и дисперсия случайной величины t равны соответственно $M[t] = 0$, $D[t] = \frac{k}{k-2}$, $(k > 2)$.

Для плотности распределения Стьюдента составлены таблицы (см., например, [1], приложение 3). Функция $S_k(t)$ является четной и, при возрастании объема выборки n, приближается к плотности нормального закона распределения с математическим ожиданием равным нулю и дисперсией равной единице.

3. Зададим доверительную вероятность $\beta = 1 - \alpha$.

4. Воспользуемся распределением Стьюдента при построении доверительного интервала для неизвестного математического ожидания m при неизвестной дисперсии. Для этого, при заданной доверительной вероятности $\beta = 1 - \alpha$, возьмем доверительный интервал симметричным относительно $\tilde{m}$, при этом обозначим за ε_β половину длины интервала

$$\tilde{m} - \varepsilon_\beta < m < \tilde{m} + \varepsilon_\beta \Rightarrow -\varepsilon_\beta < m - \tilde{m} < \varepsilon_\beta \Rightarrow \left| m - \tilde{m} \right| < \varepsilon_\beta \Rightarrow \left| \tilde{m} - m \right| < \varepsilon_\beta .$$

Величину ε_β нужно выбрать так, чтобы выполнялось условие

$$P\left(\left| \tilde{m} - m \right| < \varepsilon_\beta \right) = \beta . \tag{10.3}$$

Перейдем в левой части (10.3) от случайной величины $\tilde{m}$ к случайной величине t из (10.1). Для этого умножим обе части неравенства $\left|\tilde{m}-m\right| < \varepsilon_{\beta}$ на $\sqrt{n}/\tilde{\sigma} > 0$, тогда соотношение (10.3) примет вид

$$P\left(\frac{\sqrt{n}\left|\tilde{m}-m\right|}{\tilde{\sigma}} < \frac{\sqrt{n}\varepsilon_{\beta}}{\tilde{\sigma}}\right) = \beta$$

или, пользуясь обозначением (10.1) будем иметь

$$P\left(\left|t\right| < t_{\beta}\right) = \beta, \tag{10.4}$$

где введено

$$t_{\beta} = \frac{\sqrt{n} \cdot \varepsilon_{\beta}}{\tilde{\sigma}}. \tag{10.5}$$

Тогда величину t_{β} найдем из условия

$$P\left(-t_{\beta} < t < t_{\beta}\right) = P\left(\left|t\right| < t_{\beta}\right) = \int_{-t_{\beta}}^{t_{\beta}} S_k(t)dt = 2\int_{0}^{t_{\beta}} S_k(t)dt = \beta. \tag{10.6}$$

В практике используется не функция распределения Стьюдента, а квантили $t_{k,\beta}$. Так как

$$P\left(\left|t\right|<t_\beta\right)+P\left(\left|t\right|\ge t_\beta\right)=\left|\begin{array}{l}\text{в силу четности}\\ \text{функции } S_k(t)\end{array}\right|=2\int\limits_0^{t_\beta}S_k(t)dt+2\int\limits_{t_\beta}^{\infty}S_k(t)dt=1,$$

то, с учетом (10.6)

$$2\int\limits_{t_\beta}^{\infty}S_k(t)dt=1-\beta, \tag{10.7}$$

В руководствах по математической статистике приводятся таблицы квантилей $t_{k,\beta}$, которые находятся из решения уравнения (10.7) при соответствующих значениях β и k, $(k=n-1)$.

Для решения уравнения (10.6) при заданных β и k из таблицы квантилей находим квантиль $t_{k,\beta}$. Тогда

$$t_\beta=t_{k,\beta}=t_{n-1,\beta}. \tag{10.8}$$

5. Неравенство в круглых скобках в уравнении (10.6) можно переписать (t_β из (10.8))

$$P\left(-t_\beta < \frac{(\tilde{m}-m)\cdot\sqrt{n}}{\tilde{\sigma}} < t_\beta\right) = \beta$$

или равносильное

$$P\left(\tilde{m} - t_\beta \cdot \frac{\tilde{\sigma}}{\sqrt{n}} < m < \tilde{m} + t_\beta \cdot \frac{\tilde{\sigma}}{\sqrt{n}}\right) = \beta .$$

Следовательно, доверительный интервал

$$I_\beta : \left(\tilde{m} - t_\beta \cdot \tilde{\sigma}/\sqrt{n}\,; \tilde{m} + t_\beta \cdot \tilde{\sigma}/\sqrt{n}\right) \qquad (10.9)$$

накрывает неизвестное математическое ожидание с заданной вероятностью β.

Пример. Количественный признак X генеральной совокупности распределен нормально. По выборке объема n=9 найдены $\tilde{m}=6$, $\tilde{\sigma}=3$. Оценить неизвестное математическое ожидание при помощи доверительного интервала с доверительной вероятностью β=0,95.

Решение. Найдем t_β. Пользуясь таблицей приложения 3 из [1] по β=0,95 и k=n-1=8, находим $t_\beta=2{,}31$. Найдем доверительные границы: $\tilde{m}-t_\beta\cdot\tilde{\sigma}/\sqrt{n}=3{,}69$, $\tilde{m}+t_\beta\cdot\tilde{\sigma}/\sqrt{n}=8{,}31$. Таким образом, имеем $3{,}69<m<8{,}31$.

Следует отметить, что если использование распределения Стьюдента при малой выборке, если дает широкий доверительный интервал, то это вовсе не свидетельствует о слабости метода Стьюдента, а объясняется тем, что малая выборка, разумеется, содержит малую информацию об интересующем нас признаке.