ЛЕКЦИЯ 10
Свойства функции распределения двумерной случайной величины

1) Значения функции распределения удовлетворяют неравенству

$$0 \le F(x,y) \le 1.$$

2) Функция распределения неубывающая по каждому аргументу

$$F(x_2,y) \ge F(x_1,y) \qquad x_2 > x_1,$$
$$F(x,y_2) \ge F(x,y_1) \qquad y_2 > y_1.$$

3) $F(-\infty,y)=0, \qquad F(x,-\infty)=0,$

$F(-\infty,-\infty)=0, \qquad F(\infty,\infty)=1.$

4) При $y=\infty \quad F(x,\infty)=F_1(x),$ при $x=\infty \quad F(\infty,y)=F_2(y).$

Используя функцию распределения и ее геометрическое истолкование, можно найти вероятность попадания случайной точки в прямоугольник

$$x_1 \le X \le x_2, \quad y_1 \le Y \le y_2.$$

$$P\left(x_1 \le X < x_2, y_1 \le Y < y_2\right) =$$
$$= \left[F\left(x_2, y_2\right) - F\left(x_1, y_2\right)\right] - \left[F\left(x_2, y_1\right) - F\left(x_1, y_1\right)\right].$$

Пример. Задано распределение вероятностей дискретной двумерной случайной величины

Y	X		
	3	10	12
4	0,17	0,13	0,25
5	0,10	0,30	0,05

Найти закон распределения составляющих X и Y.

Решение.

Сложим по столбцам

$x: \quad p(3)=0,27; \quad p(10)=0,43; \quad p(12)=0,30$

x	3	10	12	контроль
p	0,27	0,43	0,30	$\sum=1$

Сложим по строкам: $y: \quad p(4)=0,55; \quad p(5)=0,45;$

y	4	5	контроль
p	0,55	0,45	$\sum=1$

Самостоятельная работа. Задано распределение вероятностей дискретной двумерной случайной величины

Y	X			
	26	30	41	50
2,3	0,05	0,12	0,08	0,04
2,7	0,09	0,30	0,11	0,21

Найти закон распределения составляющих X и Y.

Пример. Задана функция распределения двумерной случайной величины

$$F(x,y)=\begin{cases}\sin x\cdot\sin y, & 0\le x\le\pi/2,\ \ 0\le y\le\pi/2;\\ 0, & x<0,\quad y<0.\end{cases}$$

Найти $P\left(0\le X<\pi/4;\quad \pi/6\le Y<\pi/3\right)$.

Решение. $P\left(0\le X<\pi/4;\quad \pi/6\le Y<\pi/3\right)=$

$$=\left[F(\pi/4;\pi/3)-F(0;\pi/3)\right]-\left[F(\pi/4;\pi/6)-F(0;\pi/6)\right]=$$

$$=\left[(\sin\pi/4)\cdot(\sin\pi/3)-\sin 0\cdot(\sin\pi/3)\right]-\left[(\sin\pi/4)\cdot(\sin\pi/6)-\sin 0\cdot(\sin\pi/6)\right]=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$$

Самостоятельная работа. Задана функция распределения двумерной случайной величины

$$F(x,y)=\begin{cases}1-2^{-x}-2^{-y}+2^{-x-y}, & x\geq 0, \quad y\geq 0;\\ 0, & x<0 \ \text{ или } \ y<0.\end{cases}$$

Найти $P(1\leq X<2;\ 3\leq Y<5)$.

Плотностью совместного распределения вероятностей (двумерной плотностью вероятности) непрерывной двумерной случайной величины называют вторую смешанную производную от функции распределения

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}.$$

«Двумерная плотность вероятности» эквивалентна термину «дифференциальная функция системы». Плотность совместного распределения можно рассматривать как

$$f(x,y) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\mathrm{P}(x \le X \le x + \Delta x;\; y \le Y \le y + \Delta y)}{\Delta x \Delta y}$$

Пример. Задана функция распределения двумерной случайной величины

$$F(x,y)=\begin{cases}1-3^{-x}-3^{-y}+3^{-x-y}, & x,y\ge 0;\\ 0, & x<0\ \vee\ y<0.\end{cases}$$

Найти двумерную плотность вероятности.

Решение.

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial F}{\partial x}=\ln 3\cdot\left(3^{-x}-3^{-x-y}\right)\\ &\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=\ln^2 3\cdot 3^{-x-y}\end{aligned}\right\}\Rightarrow f(x,y)=\begin{cases}\ln^2 3\cdot 3^{-x-y}, & x,y\ge 0;\\ 0, & x<0\vee y<0.\end{cases}$$

Самостоятельная работа. Задана функция распределения двумерной случайной величины

$$F(x,y)=\begin{cases}\left(1-e^{-4x}\right)\cdot\left(1-e^{-2y}\right), & x,y\geq 0;\\ 0, & x<0\vee y<0.\end{cases}$$

Найти двумерную плотность вероятности.

Зная плотность распределения, можно найти функцию распределения по формуле

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f(x, y)\, dxdy.$$

Вероятность попадания случайной точки $(X;Y)$ в область D определяется равенством

$$P\big((x, y) \subset D\big) = \iint_{D} f(x, y)\, dxdy.$$

Свойства двумерной плотности вероятности

1) $f(x,y) \geq 0;$

2) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dxdy = 1.$

В частности, если все возможные значения $(X;Y) \in D$, то

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,dxdy = 1.$$

Пример. Задана плотность распределения вероятности

$$f(x,y)=\frac{20}{\pi^2\left(16+x^2\right)\left(25+y^2\right)}.$$

Найти функцию распределения $F(x,y)$.

Решение.

$$F(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{y}\int\limits_{-\infty}^{x}\frac{20}{\pi^2\left(16+x^2\right)\left(25+y^2\right)}dxdy=$$

$$=\frac{20}{\pi^2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\operatorname{arctg}\frac{x}{4}\Bigg|_{-\infty}^{x}\cdot\frac{1}{5}\cdot\operatorname{arctg}\frac{y}{5}\Bigg|_{-\infty}^{y}=\frac{1}{\pi^2}\cdot\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{4}+\frac{\pi}{2}\right)\cdot\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{5}+\frac{\pi}{2}\right).$$

Самостоятельная работа. Задана плотность распределения вероятности

$$f(x, y) = \begin{cases} 0{,}5\sin(x + y), & \text{в квадрате } 0 \le x \le \pi/2,\ 0 \le y \le \pi/2; \\ 0, & \text{вне квадрата } 0 \le x \le \pi/2,\ 0 \le y \le \pi/2. \end{cases}$$

Найти функцию распределения $F(x, y)$.