

ЛЕКЦИЯ 9

2.1. Функции двух случайных аргументов

Если каждой паре возможных значений случайных величин X и Y соответствует одно возможное значение случайной величины Z , то Z называется функцией двух случайных аргументов X и Y и пишут

$$Z = Z(X, Y).$$

Если X и Y - дискретные независимые случайные величины, то, для того, чтобы, например, найти распределение функции

$$Z = X + Y,$$

Надо найти все возможные значения Z , для чего достаточно сложить каждое значение X со всеми возможными значениями Y .

Вероятности найденных возможных значений Z равны произведению вероятностей складываемых значений X и Y .

Поясним на примере.

Пример. Дискретные независимые случайные величины $X = \{x_1, x_2\}$ и $Y = \{y_1, y_2\}$ заданы распределениями

X	1	3			Y	2	4	
P	0,3	0,7			P	0,6	0,4	
	p_1	p_2	$\sum_i p_i = 1$			q_1	q_2	$\sum_i q_i = 1$

Найти распределение случайной величины $Z = X + Y$.

Решение. Случайная величина Z может принимать значения

$$Z_1 = 3 = 1 + 2, \quad Z_2 = 5 = 1 + 4 = 3 + 2, \quad Z_3 = 7 = 3 + 4.$$

Чтобы случайная величина Z приняла значение Z_1 , необходимо, чтобы случайная величина X приняла значение $x_1 = 1$ и случайная величина Y приняла значение $y_1 = 2$. Тогда

$$P(Z_1) = P(x_1 \cap y_1) = p_1 \cdot q_1 = 0,3 \cdot 0,6 = 0,18;$$

$$P(Z_2) = P(\{x_1 \cap y_2\} + \{x_2 \cap y_1\}) = 0,3 \cdot 0,4 + 0,7 \cdot 0,6 = 0,12 + 0,42 = 0,54;$$

$$P(Z_3) = P(x_2 \cap y_2) = 0,7 \cdot 0,4 = 0,28.$$

Закон распределения случайной величины Z

Z	3	5	7	
P	0,18	0,54	0,28	$\sum p = 1$ (Контроль)

Самостоятельная работа. Дискретные независимые случайные величины X и Y заданы распределениями

X	10	12	16		Y	1	2
P	0,4	0,1	0,5		P	0,2	0,8

Найти распределение $Z = X + Y$.

Если X и Y - *непрерывные независимые случайные величины* с плотностями распределения $f_1(x)$ и $f_2(y)$ соответственно, то плотность распределения $g(z)$ суммы $Z = X + Y$ (при условии, что плотность распределения вероятности, хотя бы одного из аргументов задана в интервале $(-\infty, +\infty)$ одной формулой) может быть найдена по формуле

$$g(z) = \int_{-\infty}^z f_1(t) f_2(z-t) dt$$

ИЛИ

$$g(z) = \int_{-\infty}^z f_1(z-t) f_2(t) dt.$$

Пример. Непрерывные независимые случайные величины X и Y заданы распределениями

$$X : f_1(x) = e^{-x} \quad (0 \leq x < \infty),$$

$$Y : f_2(y) = \frac{1}{2} e^{-\frac{y}{2}} \quad (0 \leq y < \infty).$$

Найти распределение $Z = X + Y$ ($g(z) = ?$).

Решение.

$$g(z) = \int_0^z e^{-x} \left(\frac{1}{2} e^{-(z-x)/2} \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^z e^{-(z+x)/2} dx =$$

$$= -e^{-(z+x)/2} \Big|_0^z = -e^{-z} + e^{-\frac{z}{2}}$$

$$g(z) = e^{-\frac{z}{2}} \cdot \left(1 - e^{-\frac{z}{2}} \right).$$

z	≤ 0	$(0, +\infty)$
$g(z)$	0	$e^{-z/2} \cdot (1 - e^{-z/2})$

Самостоятельная работа. Непрерывные независимые случайные величины X и Y заданы распределениями

$$X: \quad f_1(x) = \frac{1}{3} e^{-x/3} \quad (0 \leq x < \infty),$$

$$Y: \quad f_2(y) = \frac{1}{5} e^{-y/5} \quad (0 \leq y < \infty).$$

Найти распределение $Z = X + Y$ ($g(z) = ?$).

Если X и Y непрерывные независимые случайные величины, заданные плотностью распределения $f_1(x)$, $f_2(y)$, то вероятность попадания случайной точки (X, Y) в область D равна

$$P((X, Y) \in D) = \iint_D f_1(x) f_2(y) dx dy.$$

2.2. Закон распределения двумерной случайной величины

- 1) Двумерной называют случайную величину (X, Y) , возможные значения которой есть пары чисел (x, y) . Составляющие X и Y , рассматриваемые одновременно, образуют *систему двух случайных величин*.
- 2) Двумерную случайную величину геометрически можно истолковать как случайную точку $M(x, y)$ на плоскости xOy , либо как случайный вектор $\overline{OM}$.
- 3) *Дискретной двумерной случайной величиной* называют двумерную величину, составляющие которой дискретны.
- 4) *Непрерывной двумерной случайной величиной* называют двумерную величину, составляющие которой непрерывны.

5) **Законом распределения вероятностей двумерной случайной величины** называют соответствие между возможными значениями случайной величины и их вероятностями.

6) Закон распределения двумерной случайной величины может быть задан:

а) таблично,

б) аналитически.

7) **Функцией распределения вероятностей двумерной случайной величины** называют функцию $F(x, y)$, определяющую для каждой пары чисел (x, y) вероятность того, что X примет значения меньше x , Y примет значения меньше чем y :

$$F(x, y) = P(X < x; Y < y).$$

Геометрически это можно истолковать: $F(x, y)$ - вероятность того, что случайная точка попадет в полубесконечный квадрат

