

Практикум

Тема 3 Интегральное исчисление функции одной переменной

1. Найдите интегралы с помощью подходящей замены

№	Условие	Ответы
1.	$\int \sqrt{3+x} dx,$	$\frac{2}{3} \sqrt{(3+x)^3} + C$
2.	$\int (3-4\sin x)^{1/3} \cos x dx,$	$-\frac{3}{16} (3-4\sin x)^{4/3} + C$
3.	$\int 3^{4x} dx,$	$\frac{3^{4x}}{4\ln 3} + C$
4.	$\int \frac{x^3 dx}{x^8 + 1},$	$\frac{1}{4} \operatorname{arctg} x^4 + C$
5.	$\int \frac{a^{1/x}}{x^2} dx, a > 0,$	$-\frac{a^{1/x}}{\ln a} + C$
6.	$\int e^x \sqrt[3]{4+e^x} dx,$	$\frac{3}{4} \sqrt[3]{(e^x + 4)^4} + C$

2. Применяя указанные подстановки, найдите интегралы

№	Условие	Ответы
1.	$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^3}},$ $x = (1-t^2)^{1/3},$	$\frac{1}{3} \ln \left \frac{\sqrt{1-x^3} - 1}{\sqrt{1-x^3} + 1} \right + C$
2.	$\int \frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}}, x = \frac{2}{t},$	$\frac{1}{2} \ln \left \frac{x}{2 + \sqrt{4-x^2}} \right + C$
3.	$\int \frac{e^{2x} dx}{e^x + 1}, x = \ln t,$	$e^x - \ln(e^x + 1) + C$

3. Найдите интегралы, содержащие квадратные трехчлены

№	Условие	Ответы
1.	$\int \frac{dx}{\sqrt{8x-x^2}},$	$\arcsin \frac{x-4}{4} + C$
2.	$\int \frac{dx}{x^2-6x},$	$\frac{1}{6} \ln \left \frac{x-6}{x} \right + C$
3.	$\int \frac{dx}{2x^2-4x+5},$	$\frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \frac{2(x-1)}{\sqrt{6}} + C$
4.	$\int \frac{xdx}{x^4+6x^2+13},$	$\frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{x^2+3}{2} + C$
5.	$\int \frac{3^x dx}{3^{2x}-4 \cdot 3^x+3}$	$\frac{1}{2 \ln 3} \ln \left \frac{3^x-3}{3^x-1} \right + C$

4. Найдите интегралы, используя метод интегрирования по частям

№	Условие	Ответы
1.	$\int \arccos x dx,$	$x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$
2.	$\int \frac{\ln^2 x}{x^2} dx,$	$-\frac{1}{x} (\ln^2 x + 2 \ln x + 2) + C$
3.	$\int \frac{x \sin x}{\cos^3 x} dx,$	$\frac{x}{2 \cos^2 x} - \frac{1}{2} \operatorname{tg} x + C$
4.	$\int \frac{\ln \ln x}{x} dx,$	$(\ln \ln x - 1) \ln x + C$
5.	$\int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx,$	$-2\sqrt{1-x} \arcsin \sqrt{x} + 2\sqrt{x} + C$

5. Найдите интегралы от рациональных дробей

№	Условие	Ответы
---	---------	--------

1. $\int \frac{x^3 + 2}{x^3 - 4x} dx, \quad x - \frac{1}{2} \ln |x| - \frac{3}{4} \ln |x + 2| + \frac{5}{4} \ln |x - 2| + C$
2. $\int \frac{3x^2 + 2x - 1}{(x-1)^2(x+2)} dx, \quad -\frac{4}{3(x-1)} + \frac{20}{9} \ln |x-1| + \frac{7}{9} \ln |x+2| + C$
3. $\int \frac{dx}{x(x^2 + 2)}, \quad \frac{1}{4} \ln \frac{x^2}{x^2 + 2} + C$
4. $\int \frac{dx}{x^3 + 8}, \quad \frac{1}{24} \ln \frac{(x+2)^2}{x^2 - 2x + 4} + \frac{\sqrt{3}}{12} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{\sqrt{3}} + C$

6. Найдите интегралы, содержащие иррациональные выражения

- | № | УСЛОВИЕ | ОТВЕТЫ |
|----|--|---|
| 1. | $\int \frac{dx}{(5+x)\sqrt{1+x}},$ | $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1+x}}{2} + C$ |
| 2. | $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{2x-3}},$ | $\frac{3}{20} \sqrt[3]{(2x-3)^5} + \frac{9}{8} \sqrt[3]{(2x-3)^2} + C$ |
| 3. | $\int \frac{dx}{(\sqrt[3]{x+4})\sqrt{x}},$ | $6\sqrt[6]{x} - 12 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt[6]{x}}{2} + C$ |
| 4. | $\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} \frac{dx}{(x-1)^3},$ | $\frac{3}{16} \sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^4} - \frac{3}{28} \sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^7} + C$ |

7. Найдите интегралы от тригонометрических функций

- | № | УСЛОВИЕ | ОТВЕТЫ |
|----|---|---|
| 1. | $\int \sin \frac{x}{3} \cos \frac{2x}{3} dx,$ | $\frac{3}{2} \cos \frac{x}{3} - \frac{1}{2} \cos x + C$ |
| 2. | $\int \sin x \sin 2x \sin 3x dx,$ | $\frac{1}{24} \cos 6x - \frac{1}{16} \cos 4x - \frac{1}{8} \cos 2x + C$ |
| 3. | $\int \cos^7 x dx,$ | $\sin x - \sin^3 x + \frac{3}{5} \sin^5 x - \frac{1}{7} \sin^7 x + C$ |
| 4. | $\int \cos^4 \frac{x}{2} dx,$ | $\frac{3}{8} x + \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{16} \sin 2x + C$ |

5. $\int \frac{dx}{\sin^6 x},$	$-\operatorname{ctgx} - \frac{2}{3} \operatorname{ctg}^3 x - \frac{1}{5} \operatorname{ctg}^5 x + C$
6. $\int \operatorname{tg}^3 x dx,$	$\frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + \ln \cos x + C$
7. $\int \frac{dx}{3 \cos x + 2},$	$\frac{1}{\sqrt{5}} \ln \left \frac{\sqrt{5} + \operatorname{tg}(x/2)}{\sqrt{5} - \operatorname{tg}(x/2)} \right + C$
8. $\int \frac{dx}{2 - \sin x},$	$\frac{2\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \frac{2 \operatorname{tg}(x/2) - 1}{\sqrt{3}} + C$
9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 8 \sin x \cos x + 12 \cos^2 x},$	$\frac{1}{4} \ln \left \frac{2 + \operatorname{tg} x}{6 + \operatorname{tg} x} \right + C$

8. Вычислите интегралы

№ Условие	Ответы
1. $\int \frac{dx}{(x^2 - 3)\sqrt{4 - x^2}},$	$\frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left \frac{x - \sqrt{3}\sqrt{4 - x^2}}{x + \sqrt{3}\sqrt{4 - x^2}} \right + C$
2. $\int \frac{dx}{(x^2 + 1)(x + \sqrt{x^2 + 1})},$	$\ln \left(\frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) + C$
3. $\int \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^2} dx,$	$\ln x + \sqrt{x^2 - 1} - \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} + C$
4. $\int \sqrt{1 - 2x - x^2} dx,$	$\frac{x+1}{2} \sqrt{1 - 2x - x^2} + \arcsin \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C$

9. Вычислите интегралы, используя формулу Ньютона–Лейбница

№ Условие	Ответы
1. $\int_0^1 (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}) dx,$	$\frac{19}{15}$

$$\begin{array}{ll}
 2. & \int_{-\pi/4}^0 \frac{dx}{\cos^2 x}, & 1 \\
 3. & \int_6^3 2^x dx, & \frac{7}{\ln 2} \\
 4. & \int_0^{\pi/4} \sin^2 \varphi d\varphi, & \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \\
 5. & \int_3^4 \frac{x^3 + 3}{x-2} dx & \frac{11}{2} + 7 \ln 2
 \end{array}$$

10. Вычислите интегралы с помощью указанных подстановок

№	Условие	Ответы
1.	$\int_1^6 \frac{dx}{1 + \sqrt{3x-2}}, 3x-2 = t^2,$	$\frac{2}{3} \left(3 + \ln \frac{2}{5} \right)$
2.	$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3 + 2 \cos x}, \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t,$	$\frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{5}}$
3.	$\int_{-1}^1 \sqrt{3-2x-x^2} dx,$ $x+1 = 2 \sin t,$	π

11. Вычислите определенные интегралы методом интегрирования по частям

№	Условие	Ответы
1.	$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{x dx}{\cos^2 x},$	$\frac{1}{18} (5\pi\sqrt{3} - 9 \ln 3)$
2.	$\int_1^e \ln^2 x dx,$	$e - 2$

$$3. \int_0^{\pi/2} e^x \cos x dx, \quad \frac{1}{2}(e^{\pi/2} - 1)$$

12. Вычислите несобственные интегралы или установите их расходимость

№	Условие	Ответы
1.	$\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^3 x},$	$\frac{1}{2}$
2.	$\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{x^2 + 4},$	<i>расходится</i>
3.	$\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx,$	$\frac{1}{2}$

13. Исследуйте интегралы на сходимость

№	Условие	Ответы
1.	$\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x^3} + \sqrt{x^2 + 1}}{x^3 + 3x + 1} dx,$	<i>сходится</i>
2.	$\int_1^{+\infty} \frac{3 + \sin x}{\sqrt[3]{x}} dx,$	<i>расходится</i>

14. Вычислите несобственные интегралы или установите их расходимость

№	Условие	Ответы
---	---------	--------

1. $\int_1^e \frac{dx}{x \ln^3 x}$, *расходится*
2. $\int_0^2 \frac{x dx}{(x^2 - 1)^{4/3}}$, $\frac{5}{2}(\sqrt[3]{3} + 1)$
3. $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^4}} dx$, *сходится*
4. $\int_0^1 \frac{\ln(1 + \sqrt[3]{x^2})}{e^x - 1} dx$, *сходится*
5. $\int_0^1 \frac{dx}{e^x - \cos x}$ *расходится*

15. Решите задачи

№	Условие	Ответы
1	Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y^2 = 4x$ и $x^2 = 4y$.	16/3
2	Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $\rho = a \cos 3\varphi$.	$\pi a^2 / 4$
3	Найти длину дуги кривой $y = \frac{1}{3}(3-x)\sqrt{x}$ между точками ее пересечения с осью Ox .	$2\sqrt{3}$
4	Найти длину дуги кривой $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$ между точками, имеющими параметр $t = 0$ и $t = 1$.	$\sqrt{2}(e-1)$
5	Найти длину дуги логарифмической спирали $\rho = e^{a\varphi}$, $a > 0$, если φ меняется от 0 до 2π .	$\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}(e^{2a\pi} - 1)$

6	Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной кривыми $y = e^{-2x} - 1$, $y = e^{-x} + 1$, $x = 0$.	$11\pi / 4$