# Практикум

## Тема 2 Дифференциальное исчисление функций одной переменной

### 1. Вычислите производные следующих функций

| № | Функции | Ответы |
|---|---|---|
| 1 | $y=\ln \mathrm{tg} x$ | $y'=1/\sin 2x$ |
| 2 | $y=\mathrm{arctg}\, x+\frac{1}{3}\mathrm{arctg}\, x^3$ | $y'=\frac{1+x^4}{1+x^6}$ |
| 3 | $y=\frac{\sin^2 x}{\sin x^2}$ | $y'=\frac{2\sin x\left(\cos x\sin x^2-x\sin x\cos x^2\right)}{\sin^2 x^2}$ |
| 4 | $y=\frac{1}{2}\mathrm{ctg}^2 x+\ln\sin x$ | $y'=-\mathrm{ctg}^3 x$ |
| 5 | $y=\mathrm{arctg}\ \mathrm{tg}^2 x$ | $y'=\frac{\sin 2x}{\sin^4 x+\cos^4 x}$ |
| 6 | $y=\frac{x^6}{1+x^{12}}-\mathrm{arcctg}\, x^6$ | $y'=\frac{12x^5}{\left(1+x^{12}\right)^2}$ |
| 7 | $y=\sin\sin\sin x$ | $y'=\cos x\cdot\cos\sin x\cdot\cos\sin\sin x$ |
| 8 | $y=\sin\cos^2 x\cdot\cos\sin^2 x$ | $y'=-\sin 2x\cdot\cos\cos 2x$ |
| 9 | $y=x(\sin\ln x-\cos\ln x)$ | $y'=2\sin\ln x$ |
| 10 | $y=\ln\left(1+\sin^2 x\right)-$ $-2\sin x\cdot\mathrm{arctg}\sin x$ | $y'=-2\cos x\cdot\mathrm{arctg}\sin x$ |
| 11 | $y=\ln\left(e^x+\sqrt{1+e^{2x}}\right)$ | $y'=e^x/\sqrt{1+e^{2x}}$ |
| 12 | $y=\ln\ln^2\ln^3 x$ | $y'=\frac{6}{x\cdot\ln x\cdot\ln\ln^3 x}$ |

| | | |
|---|---|---|
| 13 | $y = \arccos\left(\sin x^2 - \cos x^2\right)$ | $y' = \dfrac{2x\left(\cos x^2 + \sin x^2\right)}{\sqrt{\sin 2x^2}}$ |
| 14 | $y = \dfrac{3-x}{2}\sqrt{1-2x-x^2} +$ $+ 2\arcsin\dfrac{x+1}{\sqrt{2}}$ | $y' = \dfrac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}}$ |
| 15 | $y = \operatorname{arctg}\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$ | $y' = \dfrac{1}{2\left(1+x^2\right)}$ |
| 16 | $y = \ln\left(\cos^2 x + \sqrt{1+\cos^4 x}\right)$ | $y' = -\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^4 x}}$ |
| 17 | $y = \operatorname{arctg}\dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$ | $y' = 1$ |
| 18 | $y = \arcsin\left(\sin x - \cos x\right)$ | $y' = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sqrt{\sin 2x}}$ |
| 19 | $y = \sqrt[x]{x}$ | $y' = x^{1/x-2}\left(1 - \ln x\right)$ |
| 20 | $y = \dfrac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}}$ | $y' = = \dfrac{(\ln x)^{x-1}}{x^{\ln x+1}}\left(x^2 - 2\ln^2 x + x\ln x \cdot \ln\ln x\right)$ |

## 2. Вычислите производные второго порядка следующих функций

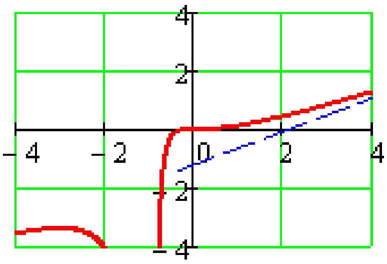
| № | Функции | Ответы |
|---|---|---|
| 1 | $y = e^{-x^2}$ | $y'' = 2e^{-x^2}\left(2x^2 - 1\right)$ |
| 2 | $y = x\left(\sin\ln x + \cos\ln x\right)$ | $y' = -\dfrac{2}{x}\sin\ln x$ |
| 3 | $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ | $y''_{xx} = -\dfrac{1}{4\sin^4(t/2)}$ |
| 4 | $\begin{cases} x = e^t\cos t, \\ y = e^t\sin t \end{cases}$ | $y''_{xx} = \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{2}\cos^3(t+\pi/4)}$ |

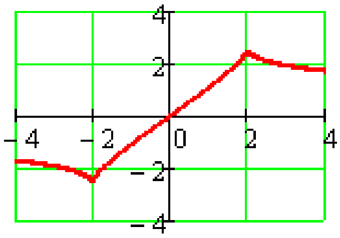
| | | |
|---|---|---|
| 5 | $x^2 - xy + y^2 = 1$ | $y' = \dfrac{2x - y}{x - 2y}$, $y'' = \dfrac{6}{(x - 2y)^3}$ |
| 6 | $\sqrt{x^2 + y^2} = e^{\operatorname{arctg}(y/x)}$ | $y' = \dfrac{x + y}{x - y}$, $y'' = \dfrac{2(x^2 + y^2)}{(x - y)^3}$ |

**3. Вычислите пределы, используя правило Лопиталя**

| № | Условие | Ответы | № | Условие | Ответы |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x}$ | $\dfrac{1}{3}$ | 5 | $\lim\limits_{x \to 1} (1 - x^2) \operatorname{tg} \dfrac{\pi x}{2}$ | $\dfrac{4}{\pi}$ |
| 2 | $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$ | 2 | 6 | $\lim\limits_{x \to 1-0} \ln x \cdot \ln(1 - x)$ | 0 |
| 3 | $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} - 1}{2\sin^2 x - 1}$ | $\dfrac{1}{3}$ | 7 | $\lim\limits_{x \to +0} \left(\ln \dfrac{1}{x}\right)^x$ | 1 |
| 4 | $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln \sin ax}{\ln \sin bx}$ | 1 | 8 | $\lim\limits_{x \to +0} x^{\frac{k}{1 + \ln x}}$ | $e^k$ |

**4. Проведите полное исследование функции и постройте ее график**

| № | Условие | Ответ |
|---|---|---|
| 1 | $y = \dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$ |  |

| | | |
|---|---|---|
| 2 | $y = \sqrt[3]{(x+2)^2} - \sqrt[3]{(x-2)^2}$ |  |