## Теоретические материалы

## Тема 3 Интегральное исчисление функции одной переменной

Задачей дифференциального исчисления функции одной переменной является, прежде всего, отыскание по заданной функции ее производной или дифференциала. На практике не менее важной задачей является обратная задача – по заданной производной (дифференциалу) функции найти саму функцию.

### 3.1 Первообразная и неопределенный интеграл

**1.** Пусть в каждой точке некоторого промежутка определены функции $F(x)$ и $f(x)$ и выполняется условие $F'(x)=f(x)$ или $dF(x)=f(x)dx$. Тогда $F(x)$ называется *первообразной для функции* $f(x)$ (или *дифференциала* $f(x)dx$) *на заданном промежутке*.

П р и м е р 1. а). Функция $F(x)=x^2$ является первообразной для функции $f(x)=2x$ (или дифференциала $2xdx$) на всей числовой оси, так как при любом $x\in R$ $F'(x)=(x^2)'=2x$ $\left(dF(x)=d(x^2)= \;=2xdx\right)$; б). Функция $F(x)=\ln|x|$ является первообразной для функции $f(x)=1/x$ на множестве $X=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, так как $F'(x)=\left(\ln|x|\right)'=1/x$ при $x\neq 0$.

Т е о р е м а 1. Если функции $F_1(x)$ и $F_2(x)$ в некотором промежутке $X$ имеют конечные и совпадающие производные, равные $f(x)$, то эти функции во всем этом промежутке отличаются на постоянную: $F_1(x)-F_2(x)=C$ (или $F_1(x)=F_2(x)+C$).

**2.** Если $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$ в промежутке $X$, то совокупность всех первообразных $F(x)+C$, где $C$ – произвольная постоянная, называется *неопределенным интегралом от функции* $f(x)$ (или *от дифференциала* $f(x)dx$) и обозначается символом $\int f(x)dx$, т. е.

$\int f(x)dx = F(x) + C$. Функция $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*, $f(x)dx$ – *подынтегральным выражением*, $x$ – *переменной интегрирования*, а символ $\int$ – *знаком неопределенного интеграла*.

**3.** Операция нахождения первообразной и неопределенного интеграла называется *интегрированием*. Интегрирование есть операция, обратная операции дифференцирования.

Т е о р е м а 2. Если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $X$, то первообразная для этой функции существует.

Далее будем говорить об интегрировании непрерывных функций.

П р и м е р 2. В примере 1 было показано, что а) функция $x^2$ – первообразная для функции $2x$ (или дифференциала $2xdx$) и поэтому $\int 2xdx = x^2 + C$; б) функция $\ln|x|$ является первообразной для функции $1/x$ (или дифференциала $dx/x$) и, следовательно, $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

## 3.2 Основная таблица неопределенных интегралов. Некоторые свойства неопределенных интегралов

Таблица 1

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | $\int 0dx = C$ | 10 | $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tg\ x + C$ |
| 2 | $\int dx = x + C$ | 11 | $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctg\ x + C$ |
| 3 | $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$ | 12 | $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left\|tg\frac{x}{2}\right\| + C$ |
| 4 | $\int \frac{dx}{x} = \ln\|x\| + C$ | 13 | $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left\|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\| + C$ |
| 5 | $\int \frac{dx}{x+a} = \ln\|x+a\| + C$ | 14 | $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a} arcctg\frac{x}{a} + C$, |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | $a \neq 0$ |
| 6 | $\int e^x dx = e^x + C$ | 15 | $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left\| \frac{x-a}{x+a} \right\| + C, a \neq 0$ |
| 7 | $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, $a > 0,\ a \neq 1$ | 16 | $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C = -\arccos \frac{x}{a} + C$, $a \neq 0$ |
| 8 | $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$ | 17 | $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left\| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right\| + C, a \neq 0$ |
| 9 | $\int \cos x\, dx = \sin x + C$ | | |

**Свойства неопределенного интеграла**

С в о й с т в о 1. Из определения неопределенного интеграла (п. 1, 2.) следуют формулы $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$ и $d\int f(x)dx = f(x)dx$.

З а м е ч а н и е. Эти формулы явно показывают возможность осуществления проверки правильности результата интегрирования. Кроме того, из второй формулы следует, что символы $d\int$, записанные в указанном порядке, «взаимно уничтожаются».

С в о й с т в о 2. $\int dF(x) = F(x) + C$.

С в о й с т в о 3. Свойство линейности. Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ интегрируемы, то интегрируема функция $k_1 f(x) + k_2\varphi(x)$ при любых постоянных $k_1$ и $k_2$ и справедлива формула

$$\int (k_1 f(x) + k_2\varphi(x))dx = k_1\int f(x)dx + k_2\int \varphi(x)dx.$$

Эта формула может быть распространена на любое конечное число слагаемых. Она выражает два важных правила вычисления интегралов: интеграл от суммы функций равен сумме интегралов от этих функций; постоянный множитель может быть вынесен за знак интеграла (или внесен под знак интеграла).

С в о й с т в о 4. Свойство инвариантности формул интегрирования. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(u(x))du(x) = F(u(x)) + C$.

Это свойство показывает, что формулы в таблице 1 могут быть записаны в более общем виде, если заменить в них переменную $x$ любой дифференцируемой функцией $u(x)$.

П р и м е р 3. а) из формулы 9 таблицы 1 $\int \cos x\, dx = \sin x + C$ и свойства 4 имеем: $\int \cos(x^2)d(x^2) = \sin(x^2) + C$; $\int \cos(\ln x)d(\ln x) = \, = \sin(\ln x) + C$; $\int \cos(e^x)d(e^x) = \sin(e^x) + C$.

б) из формулы 6 таблицы 1 $\int e^x dx = e^x + C$ и свойства 4 следует:

$\int e^{\cos x} d\cos x = e^{\cos x} + C$; $\int e^{x^2} dx^2 = e^{x^2} + C$.

## 3.3 Общие методы интегрирования

### Метод подведения под знак дифференциала

Из правил дифференцирования функций известно, что для любой постоянной $c$ справедливы формулы: $d(cf(x)) = cdf(x)$ и $d(f(x) + c) = df(x)$. Если читать эти формулы справа налево, то получим два важных правила, применяемых в интегрировании:

- постоянный множитель можно вносить под знак дифференциала;
- под знаком дифференциала можно добавлять произвольную постоянную.

Подведение под знак дифференциала позволяет за счет введения другой переменной интегрирования, отличной от данной, упростить подынтегральную функцию. Основой метода подведения под знак дифференциала является свойство, которое для этого случая может быть записано в таком виде:

$$\int f(u(x))u'(x)dx = \int f(u)du = F(u) + C. \qquad (1)$$

Формула (1) показывает, что метод подведения под знак дифференциала применяется к интегралам, имеющим подынтегральную функцию вида $f(u(x))u'(x)$.

П р и м е р 4. Покажем, что к следующим интегралам применим метод подведения под знак дифференциала:

а) $\int tg(x^2)\cdot 2xdx$; б) $\int \sin^5 x\cdot\cos x\cdot dx$; в) $\int e^x \sin(e^x)dx$;

г) $\int \frac{\ln x}{x}dx$; д) $\int \frac{\sqrt{1+arctg\ x}}{1+x^2}dx$.

Р е ш е н и е. а) здесь $f(u(x))u'(x) = tg\ u\cdot u'$, где $u = x^2$ и $u' = \ = (x^2)' = 2x$;

б) $f(u(x))u'(x) = u^5 u'$, где $u = \sin x$, $= \cos x$;

в) $f(u(x))u'(x) = \sin u\cdot u'$, $u = e^x$, $u' = (e^x)' = e^x$;

г) $f(u(x))u'(x) = uu'$, $u = \ln x$, $u' = (\ln x)' = 1/x$;

д) $f(u(x))u'(x) = \sqrt{u}u'$, $u = 1 + arctg\ x$, $u' = (1+arctg\ x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

Формула (1) раскрывает и алгоритм этого метода: осуществление преобразования $u'(x)dx = du(x)$ (подведение сомножителя $u'(x)$ под знак дифференциала) с последующим переобозначением переменной интегрирования $u(x) = u$. Операция подведения функции под знак дифференциала использует свойство $u'(x)dx = d\left(\int u'(x)dx\right) = du(x)$. Таким образом, чтобы в выражении $v(x)dx$ внести функцию $v(x)$ под знак дифференциала, нужно:

- перед выражением $v(x)dx$ поставить в указанном порядке символы $d\int$, что допустимо, т.е. $v(x)dx = d\int v(x)dx$;
- найти одну из первообразных для функции $v(x)$.

В результате этого получается такая цепочка равенств:

$$v(x)dx = d\int v(x)dx = d\left(\int v(x)dx\right) \qquad (2)$$

З а м е ч а н и е. При использовании метода подведения под знак дифференциала часто применяется прием добавления под дифференциалом какого либо числа $a$, т. е. $dx = d(x+a)$. Этот прием основан на свойстве дифференциалов: $d(x+a) = dx + da = dx$, так как $da = 0$.

П р и м е р 5. Внести функцию $x^2$ под знак дифференциала и преобразовать выражение $x^2 dx$.

Р е ш е н и е. По формуле (2) $v(x)dx = x^2 dx = d\left(\int x^2 dx\right) = \left|\int x^2 dx =\right.$

$= \left[\text{таблица } 1,\ \text{формула } 3 \text{ при } a = 2\right] = x^3/3\Big| = d\left(\dfrac{x^3}{3}\right) = \dfrac{1}{3}dx^3.$

П р и м е р 6. Найти интеграл $\int \dfrac{\cos\ln x}{x}dx$.

Р е ш е н и е. $\int \dfrac{\cos\ln x}{x}dx = \left|\dfrac{1}{x}dx = d\left(\int \dfrac{dx}{x}\right) = d(\ln x)\right| =$

$= \int \cos\ln x \cdot d(\ln x) = |u = \ln x| = \int \cos u\, du =$

$= \left|\begin{matrix}\text{табличный интеграл} - \\ \text{формула } 9 \text{ таблицы } 1\end{matrix}\right| = \sin u + C = \left|\begin{matrix}\text{возвращение к} \\ \text{переменной } x\end{matrix}\right| = \sin\ln x + C.$

Проверка: $d(\sin\ln x + C) = (\sin\ln x + C)'dx = (\cos\ln x)\dfrac{1}{x}dx$ – получили подынтегральное выражение.

Ответ: $\int \dfrac{\cos\ln x}{x}dx = \sin\ln x + C$.

П р и м е р 7. Найти интеграл $\int x\sin(3x^2+5)dx$.

Р е ш е н и е.

$$\int x\sin(3x^2+5)dx = \left|\begin{matrix}\textit{вносим } x \textit{ под дифференциал}: \\ xdx = d\left(\int xdx\right) = d\left(\frac{1}{2}x^2\right) = \frac{1}{2}d\left(x^2\right)\end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\int \sin(3x^2+5)d(x^2) = \left|\begin{matrix}\textit{выражение под знаком дифференциала} \\ \textit{домножим (и разделим) на } 3\end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\int \sin(3x^2+5)d\left(\frac{3x^2}{3}\right) = \left|\begin{matrix}\textit{выносим постоянную } 3 \textit{ за знаки} \\ \textit{дифференциала и интеграла}\end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{2\cdot 3}\int \sin(3x^2+5)d\left(3x^2\right) = \left|\begin{matrix}\textit{под дифференциалом} \\ \textit{добавляем число } 5\end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{6}\int \sin(3x^2+5)d\left(3x^2+5\right) = |\, u = 3x^2+5 \,| = \frac{1}{6}\int \sin u\cdot du =$$

$$= \left|\begin{matrix}\textit{формула } 8 \\ \textit{таблицы } 1\end{matrix}\right| = -\frac{1}{6}\cos u + C = \left|\begin{matrix}\textit{возвращение к} \\ \textit{переменной } x\end{matrix}\right| = -\frac{1}{6}\cos(3x^2+5)+C.$$

Проверка: $d\left(-\frac{1}{6}\cos(3x^2+5)+C\right) = -\frac{1}{6}\left(\cos(3x^2+5)\right)'dx =$

$= -\frac{1}{6}\left(-\sin(3x^2+5)\right)3\cdot 2xdx = \sin(3x^2+5)dx$ – получили подынтегральное выражение. Ответ: $\int x\sin(3x^2+5)dx = -\frac{1}{6}\cos(3x^2+5)+C$.

П р и м е р 8. Найти интеграл $\int \frac{e^{3x}dx}{\sqrt{4-5e^{6x}}}$.

Р е ш е н и е.

$$\int \frac{e^{3x}dx}{\sqrt{4-5e^{6x}}} = \left|\begin{matrix}\textit{вносим } e^{3x} \textit{ под дифференциал}: \ e^{3x}dx = \\ = d\left(\int e^{3x}dx\right) = d\left(\frac{1}{3}\int e^{3x}d3x\right) = \frac{1}{3}d\left(e^{3x}\right)\end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{de^{3x}}{\sqrt{4-5e^{6x}}} = |\, u = e^{3x} \,| = \frac{1}{3}\int \frac{du}{\sqrt{4-5u^2}} = \left|\begin{matrix}\textit{выносим в знаменателе} \\ \textit{множитель } 5\end{matrix}\right| =$$

$$=\frac{1}{3\sqrt{5}}\int\frac{du}{\sqrt{(4/5)-u^2}}=\left|\begin{matrix}\textit{формула } 16\\ \textit{таблицы } 1\end{matrix}\right|=\frac{1}{3\sqrt{5}}\arcsin\frac{e^{3x}\sqrt{5}}{2}+C.$$

Проверка: $d\left(\frac{1}{3\sqrt{5}}\arcsin\frac{e^{3x}\sqrt{5}}{2}+C\right)=$

$$=\frac{1}{3\sqrt{5}}\frac{1}{\sqrt{1-\left(e^{3x}\sqrt{5}/2\right)^2}}\frac{3\sqrt{5}}{2}e^{3x}dx=\frac{e^{3x}dx}{\sqrt{4-5e^{6x}}}.$$

Ответ: $\int\frac{e^{3x}dx}{\sqrt{4-5e^{6x}}}=\frac{1}{3\sqrt{5}}\arcsin\frac{e^{3x}\sqrt{5}}{2}+C$.

## Метод замены переменной

Метод подведения под знак дифференциала является неявной формой более общего метода интегрирования: метода замены переменной.

Т е о р е м а 3. Пусть на отрезке $[a,b]$

$$\int f(x)dx=F(x)+C \tag{3}$$

и функция $x=\varphi(t)$ непрерывна на отрезке $[\alpha,\beta]$ вместе со своей производной $x'=\varphi'(t)\neq 0$, причем $a\leq\varphi(t)\leq b$ для любого $t\in[\alpha,\beta]$. Тогда

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=F(\varphi(t))+C. \tag{4}$$

Из формул (3), (4) можно получить формулу

$$\int f(x)dx=\left|\begin{matrix}x=\varphi(t)\\ dx=\varphi'(t)dt\end{matrix}\right|=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt, \tag{5}$$

которая служит основой метода замены переменной $x$ в данном интеграле на новую переменную $t$.

З а м е ч а н и е. Если в формуле (5) поменять местами буквы $x$ и $t$, то получим $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \begin{vmatrix} t=\varphi(x) \\ dt=\varphi'(x)dx \end{vmatrix} = \int f(t)dt$, что совпадает по форме с (1) – формулой подведения под знак дифференциала.

П р и м е р 9. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$.

Р е ш е н и е. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}} = \begin{vmatrix} \text{замена}: \ e^x+1=t^2 \Rightarrow e^x=t^2-1 \Rightarrow \\ \Rightarrow x=\ln(t^2-1) \Rightarrow dx=\dfrac{2tdt}{t^2-1} \end{vmatrix} =$

$$= \int \frac{2tdt}{t(t^2-1)} = 2\int \frac{dt}{t^2-1} = \begin{vmatrix} \text{формула } 15 \\ \text{таблицы } 1 \end{vmatrix} = \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C =$$

$$= \begin{vmatrix} \text{возвращаемся к переменной } x \\ \text{по формуле } t=\sqrt{e^x+1} \end{vmatrix} = \ln\left|\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}\right| + C.$$

Ответ: $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}} = \ln\left|\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}\right| + C$.

Покажем способ нахождения часто встречающихся интегралов: $\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}dx$ и $\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$.

Алгоритм интегрирования состоит в следующем:

1) в квадратном трехчлене выделим полный квадрат и приведем его к виду $a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]$;

2) введем вместо $x$ новую переменную $t=x+\frac{b}{2a}$, $dx=dt$, после чего интегралы сводятся к сумме простых интегралов.

П р и м е р 10. Найти интеграл $\int \frac{(x-3)dx}{2x^2-8x+18}$.

Р е ш е н и е.

$$\int\frac{(x-3)dx}{2x^2-8x+18}=\left|\begin{array}{l}\textit{выделяем полный квадрат}:\\ 2x^2-8x+18=2(x^2-4x+9)=\\ =2\left[\left(x^2-2\cdot 2x+2^2\right)-2^2+9\right]=\\ =2\left[(x-2)^2+5\right]\end{array}\right|=\frac{1}{2}\int\frac{(x-3)dx}{(x-2)^2+5}=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\textit{замена}: x-2=t\Rightarrow\\ \Rightarrow x=t+2\Rightarrow dx=dt\end{array}\right|=\frac{1}{2}\int\frac{t+2-3}{t^2+5}dt=\frac{1}{2}\int\frac{tdt}{t^2+5}-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+5};$$

а) $$\int\frac{tdt}{t^2+5}=\left|\begin{array}{l}\textit{в числителе } t \textit{ подводим под дифференциал}:\\ tdt=d\left(\int tdt\right)=d\left(\dfrac{t^2}{2}\right)=\dfrac{1}{2}dt^2=\dfrac{1}{2}d(t^2+5)\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d(t^2+5)}{t^2+5}=\frac{1}{2}\ln|t^2+5|=\frac{1}{2}\ln|(x-2)^2+5|=\frac{1}{2}\ln|x^2-4x+9|,$$

б) $$\int\frac{dt}{t^2+5}=\left|\begin{array}{l}\textit{формула } 14\\ \textit{таблицы } 1\end{array}\right|=\frac{1}{\sqrt{5}}arctg\frac{t}{\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}arctg\frac{x-2}{\sqrt{5}}.$$

Ответ: $\displaystyle\int\frac{(x-3)dx}{2x^2-8x+18}=\frac{1}{4}\ln|x^2-4x+9|-\frac{1}{2\sqrt{5}}arctg\frac{x-2}{\sqrt{5}}+C.$

П р и м е р 11. Найти интеграл $\displaystyle\int\frac{(2x+5)dx}{\sqrt{3-6x-x^2}}$.

Р е ш е н и е.

$$\int\frac{(2x+5)dx}{\sqrt{3-6x-x^2}}=\left|\begin{array}{l}\textit{выделяем полный квадрат}:\\ 3-6x-x^2=-(x^2+6x-3)=\\ =-\left[\left(x^2+2\cdot 3x+9\right)-9-3\right]=\\ =12-(x+3)^2\end{array}\right|=\int\frac{(2x+5)dx}{\sqrt{12-(x+3)^2}}=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\textit{замена}: x+3=t\Rightarrow\\ \Rightarrow x=t-3\Rightarrow dx=dt\end{array}\right|=\int\frac{2t-1}{\sqrt{12-t^2}}dt=\int\frac{2tdt}{\sqrt{12-t^2}}-\int\frac{dt}{\sqrt{12-t^2}}=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\textit{в первом интеграле подводим в числителе } t \\ \textit{под дифференциал}:\ 2tdt = d\left(\int 2tdt\right) = d\left(t^2\right) = \\ = -d\left(-t^2\right) = -d\left(12-t^2\right);\ \textit{второй интеграл} - \\ \textit{табличный}:\ \textit{формула } 16 \textit{ таблицы } 1\end{array}\right| =$$

$$=\int \frac{d(12-t^2)}{\sqrt{12-t^2}} - \arcsin\frac{t}{\sqrt{12}} = 2\sqrt{12-t^2} - \arcsin\frac{t}{\sqrt{12}} =$$

$$= 2\sqrt{3-6x-x^2} - \arcsin\frac{x+3}{\sqrt{12}} + C.$$

Ответ: $\int \frac{(2x+5)dx}{\sqrt{3-6x-x^2}} = 2\sqrt{3-6x-x^2} - \arcsin\frac{x+3}{\sqrt{12}} + C$.

### 3.4 Метод интегрирования по частям

Если $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемые функции, то формула интегрирования по частям: $\int udv = uv - \int vdu$ (6) заменяет отыскание интеграла в левой части формулы (6) отысканием интеграла в правой части этой формулы. Значительная часть интегралов, которые можно найти методом интегрирования по частям, разбивается на три группы, приведенные в таблице 2. Здесь же приведены рекомендации по выбору функций $u$ и $dv$ для левой части формулы (6).

Т а б л и ц а 2

| | $\int udv =$ | $u =$ | $dv =$ |
|---|---|---|---|
| *I* | $\int x^n \ln^m xdx$ | $\ln^m x$ | $x^n dx$ |
| | $\int x^n arctg\ x \cdot dx$ | $arctg\ x$ | |
| | $\int x^n \arcsin xdx$ | $\arcsin x$ | |
| | $\int x^n \arccos xdx$ | $\arccos x$ | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | $n$ и $m$ целые положительные числа | | |
| *II* | $\int x^n e^{ax} x dx$<br>$\int x^n \sin bx dx$<br>$\int x^n \cos bx dx$, n-целые положительные числа | $x^n$ | $e^{ax} dx$<br>$\sin bx dx$<br>$\cos bx dx$ |
| *III* | Циклическое интегрирование | | |
| | $\int e^{ax} \sin bx dx$ | $e^{ax}$ | $\sin bx dx$ |
| | $\int e^{ax} \cos bx dx$ | $e^{ax}$ | $\cos bx dx$ |
| | $\int \cos(\ln x) dx$ | $\cos(\ln x)$ | $dx$ |
| | $\int \sin(\ln x) dx$ | $\sin(\ln x)$ | $dx$ |
| | $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$ | $\sqrt{a^2 - x^2}$ | $dx$ |

З а м е ч а н и е. При отыскании функции $v$ на промежуточных этапах находим только первообразную, не добавляя произвольную постоянную.

П р и м е р 12. Найти интеграл $\int x \cdot arctg\ x \cdot dx$.

Р е ш е н и е. Данный интеграл принадлежит к группе $I$ таблицы 2. Производим выбор функций $u$ и $dv$.

$$\int x \cdot arctg\ x \cdot dx = \left| \begin{matrix} u = arctg\ x, & du = \dfrac{dx}{x^2+1}, \\ dv = xdx, & v = \int xdx = x^2/2 \end{matrix} \right| = \left| \begin{matrix} \textit{применяем} \\ \textit{формулу}\ (6) \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{x^2}{2} arctg\ x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{x^2+1} = \frac{x^2}{2} arctg\ x - \frac{1}{2} \int \frac{(x^2+1)-1}{x^2+1} dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} arctg\ x - \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{x^2}{2} arctg\ x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} arctg\ x + C.$$

Ответ: $\int x\cdot arctg\ x\cdot dx=\dfrac{x^2+1}{2}arctg\ x-\dfrac{1}{2}x+C$.

Следующий пример показывает возможность применения метода интегрирования по частям несколько раз.

П р и м е р 13. Найти интеграл $\int x\ln^2 xdx$.

Р е ш е н и е. Данный интеграл принадлежит к группе $I$ таблицы 2. Производим выбор функций $u$ и $dv$.

$$\int x\ln^2 xdx=\left|\begin{matrix} u=\ln^2 x, & du=2\ln x\dfrac{dx}{x}, \\ dv=xdx, & v=\int xdx=x^2/2\end{matrix}\right|=\left|\begin{matrix}\textit{применяем}\\ \textit{формулу}\ (6)\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{x^2\ln^2 x}{2}-\int x\ln xdx=\left|\begin{matrix}\textit{к интегралу вновь}\\ \textit{применяем формулу}\ (6)\end{matrix}\right|=$$

$$=\left|\begin{matrix} u=\ln x, & du=\dfrac{dx}{x}, \\ dv=xdx, & v=x^2/2\end{matrix}\right|=\frac{x^2\ln^2 x}{2}-\frac{x^2\ln x}{2}+\frac{1}{2}\int xdx=$$

$$=\frac{x^2\ln^2 x}{2}-\frac{x^2\ln x}{2}+\frac{x^2}{4}+C.$$

Ответ: $\int x\ln^2 xdx=\dfrac{x^2\ln^2 x}{2}-\dfrac{x^2\ln x}{2}+\dfrac{x^2}{4}+C$.

П р и м е р 14. Найти интеграл $\int x^2\cos 3xdx$.

Р е ш е н и е. $\int x^2\cos 3xdx=$

$$=\left|\begin{matrix}\textit{выбираем } u,\ dv \textit{ из группы } II \textit{ таблицы } 2 & \\ u=x^2, & du=2xdx, \\ dv=\cos 3xdx, & v=\int\cos 3xdx=\dfrac{1}{3}\sin 3x\end{matrix}\right|=\left|\begin{matrix}\textit{применяем}\\ \textit{формулу}\ (6)\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{x^2}{3}\sin 3x-\frac{2}{3}\int x\sin 3x dx=\left|\begin{array}{l} \textit{снова применяем формулу } (6) \\ \quad u=x, \qquad\qquad du=dx, \\ dv=\sin 3x dx, \quad v=\int \sin 3x dx=-\frac{1}{3}\cos 3x \end{array}\right|=$$

$$=\frac{x^2}{3}\sin 3x-\frac{2}{3}\left(-\frac{x}{3}\cos 3x+\frac{1}{3}\int \cos 3x dx\right)=$$

$$=\frac{x^2}{3}\sin 3x+\frac{2x}{3}\cos 3x-\frac{2}{27}\sin 3x+C.$$

Ответ: $\int x^2\cos 3x dx=\frac{9x^2-2}{27}\sin 3x+\frac{2x}{3}\cos 3x+C$.

П р и м е р 15. Найти интеграл $\int \cos(\ln x)dx$.

Р е ш е н и е. Данный интеграл принадлежит к группе $III$ таблицы 2, из которой выбираем функции $u$ и $dv$.

$$J=\int \cos(\ln x)dx=\left|\begin{array}{ll} u=\cos(\ln x), & du=-\sin(\ln x)\frac{dx}{x}, \\ dv=dx, & v=\int dx=x \end{array}\right|=$$

$$=\left|\begin{array}{l} \textit{применяем} \\ \textit{формулу } (6) \end{array}\right|=x\cos(\ln x)+\int \sin(\ln x)dx=$$

$$=\left|\begin{array}{l} \textit{полученный интеграл также принадлежит} \\ \textit{группе } III; \textit{ вновь интегрируем по частям} \end{array}\right|=$$

$$=\left|\begin{array}{ll} u=\sin(\ln x), & du=\cos(\ln x)\frac{dx}{x}, \\ dv=dx, & v=\int dx=x \end{array}\right|=$$

$x\cos(\ln x)+x\sin(\ln x)-\int \cos(\ln x)dx=x\cos(\ln x)+x\sin(\ln x)-J$. Получили уравнение $J=x\cos(\ln x)+x\sin(\ln x)-J$ относительно неизвестного интеграла $J=\int \cos(\ln x)dx$. Решаем это уравнение:

$$2J = x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x) \;\Rightarrow J = x\frac{\cos(\ln x)+\sin(\ln x)}{2} + C.$$

Ответ: $\int \cos(\ln x)dx = x\dfrac{\cos(\ln x)+\sin(\ln x)}{2} + C$.

## 3.5 Интегрирование дробно-рациональных функций

*Дробно рациональной функцией (рациональной дробью)* называется отношение многочленов с действительными коэффициентами: $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \dfrac{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m}{x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}$, где $m$ и $n$ целые положительные числа. Предполагается, что многочлены $P_m(x)$ и $Q_n(x)$ не имеют общих корней. Если $m < n$, то дробь называется *правильной*; если $m \geq n$ – дробь называется *неправильной*.

### Приведение неправильной дроби к правильной

Если дробь $P_m(x)/Q_n(x)$ неправильная, то делением многочлена $P_m(x)$ на многочлен $Q_n(x)$ (например, уголком) можно представить неправильную дробь в виде суммы многочлена $T_{m-n}(x)$ (целая часть) и правильной рациональной дроби.

П р и м е р 16. Представить дробь $\dfrac{P_4(x)}{Q_3(x)} = \dfrac{x^4 - 3x^3 + x^2 - 8x + 27}{x^3 + 4x + 5}$

в виде суммы целой части и правильной дроби.

Р е ш е н и е. Дробь неправильная, так как $m = 4$, $n = 3$, $m > n$. Делим числитель на знаменатель:

$$\begin{array}{r|l}
-\,x^4 - 3x^3 + x^2 - 8x + 27 & x^3 + 4x + 5 \\
\underline{x^4 \qquad\;\; + 4x^2 + 5x\phantom{+27}} & x - 3 \\
-\,-3x^3 - 3x^2 - 13x + 27 & \\
\underline{-3x^3 \qquad\quad - 12x - 15} & \\
-3x^2 - x + 42 &
\end{array}$$

Ответ: $\dfrac{P_4(x)}{Q_3(x)} = \dfrac{x^4 - 3x^3 + x^2 - 8x + 27}{x^3 + 4x + 5} = x - 3 - \dfrac{3x^2 + x - 42}{x^3 + 4x + 5}$.

Интеграл от целой части, т. е. от многочлена сводится к табличным интегралам. Поэтому в дальнейшем будем говорить только об интегрировании правильной дроби.

### Разложение правильной дроби на сумму простейших дробей

К простейшим (элементарным) дробям относятся четыре типа дробей:

$$1)\ \frac{A}{x-a};\ \ 2)\ \frac{A}{(x-a)^n};\ \ 3)\ \frac{Mx+N}{x^2+px+q};\ \ 4)\ \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^n}. \tag{8}$$

Здесь знаменатели $x^2 + px + q$ имеют комплексно сопряженные корни. Эти дроби можно проинтегрировать. Следовательно, чтобы проинтегрировать произвольную дробно рациональную функцию, необходимо научиться сводить эту функцию к функциям вида (8).

Задача представления любой правильной рациональной дроби в виде разложения на элементарные дроби (8) решается с помощью следующих теорем алгебры.

Т е о р е м а 4. Всякий многочлен $n$-ой степени с действительными коэффициентами может быть представлен в виде произведения линейных и квадратичных множителей:

$$Q_n(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n =$$

$$= (x - x_1)^{k_1} \ldots (x - x_i)^{k_i} (x^2 + px + q)^{l_1} \ldots (x^2 + px + q)^{l_h}, \tag{9}$$

где $x_1, \ldots, x_i$ – действительные попарно различные корни кратности $k_1, \ldots, k_i$, соответственно; каждый из квадратных трехчленов в (9) имеет комплексно сопряженные корни кратности $l_1, \ldots, l_h$, соответственно, причем $k_1 + \ldots + k_i + 2l_1 + \ldots + 2l_h = n$.

Т е о р е м а 5. Если знаменатель $Q_n(x)$ правильной рациональной дроби $P_m(x)/Q_n(x)$ представлен в виде (9), то можно найти (причем единственным образом) числа $A_\alpha$, $(\alpha=1,...,k_1)$, …, $B_\beta$, $(\beta=1,...,k_i)$, $M_j$, $N_j$, $(j=1,...,l_1)$, …, $R_t$, $S_t$, $(t=1,...,l_h)$ такие, что выполняется равенство:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{A_1}{(x-x_1)^{k_1}}+\frac{A_2}{(x-x_1)^{k_1-1}}+...+\frac{A_{k_1}}{x-x_1}+$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..+$$

$$+\frac{B_1}{(x-x_1)^{k_i}}+\frac{B_2}{(x-x_1)^{k_i-1}}+...+\frac{B_{k_i}}{x-x_1}+$$

$$+\frac{M_1x+N_1}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{l_1}}+\frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{l_1-1}}+...+\frac{M_{l_1}x+N_{l_1}}{x^2+p_1x+q_1}+$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..+$$

$$+\frac{R_1x+S_1}{\left(x^2+p_hx+q_h\right)^{l_h}}+\frac{R_2x+S_2}{\left(x^2+p_hx+q_h\right)^{l_h-1}}+...+\frac{R_{l_h}x+S_{l_h}}{x^2+p_hx+q_h}. \qquad (10)$$

З а м е ч а н и е 1. Из теоремы 4 следует контроль правильности разложения (10): число коэффициентов в правой части (10) должно равняться $n$, т.е. наибольшей степени знаменателя.

Чтобы определить коэффициенты $A_\alpha$, $(\alpha=1,...,k_1)$, …, $B_\beta$, $(\beta=1,...,k_i)$, $M_j$, $N_j$, $(j=1,...,l_1)$, …, $R_t$, $S_t$, $(t=1,...,l_h)$, входящие в формулу (10), сложим (приведем к общему знаменателю) все дроби правой части (10). В результате этого знаменатели в левой и правой частях будут одинаковыми. Поэтому, чтобы выполнялось полученное равенство, многочлен в числителе правой части должен тождественно (при любых значениях $x$) равняться многочлену $P_m(x)$. Можно предложить два метода нахождения неизвестных коэффициентов в образовавшемся тождестве.

А) метод неопределенных коэффициентов. Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях $x$ в левой и правой частях тождества; приходим к системе $n$ линейных алгебраических уравнений с $n$ неизвестными. Из этой системы однозначно определяются все неизвестные коэффициенты для формулы (10).

Б) вместо приравнивания коэффициентов можно подставить в полученное тождество $n$ различных значений $x$ и получить алгебраическую систему для неизвестных коэффициентов. В качестве таких значений $x$ особенно удобно подставлять действительные корни знаменателя $Q_n(x)$.

П р и м е р 17. Разложить дробь $\dfrac{3x+5}{(x-3)(x+4)}$ на простейшие.

Р е ш е н и е. Знаменатель дроби имеет простые действительные корни $x_1=3$ и $x_2=-4$. Из формулы (10) получаем разложение:

$$\frac{3x+5}{(x-3)(x+4)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+4}, \tag{11}$$

где $A$ и $B$ – коэффициенты, подлежащие определению. Число неопределенных коэффициентов равно двум, т.е. наибольшей степени знаменателя. Приводим правую часть (11) к общему знаменателю и отбрасываем его; в результате приходим к тождеству:

$$3x+5=A(x+4)+B(x-3).$$

Подставим в обе части тождества значения корней: при $x=3 \Rightarrow 14=7A \Rightarrow A=2$; при $x=-4 \Rightarrow -7=-7B \Rightarrow B=1$. Подставляем найденные коэффициенты в (11) и получаем решение задачи.

Ответ: $\dfrac{3x+5}{(x-3)(x+4)}=\dfrac{2}{x-3}+\dfrac{1}{x+4}$.

П р и м е р 18. Разложить дробь $\frac{5x^2+1}{(x+1)^2(x-5)}$ на простейшие.

Р е ш е н и е. Знаменатель дроби имеет действительные корни $x=-1$ (кратности два) и $x=5$ (простой). Из формулы (10) $\Rightarrow\Rightarrow$

$$\frac{5x^2+1}{(x+1)^2(x-5)}=\frac{A}{(x+1)^2}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-5}.$$

Число неопределенных коэффициентов равно трем, т.е. наибольшей степени знаменателя. После приведения правой части к общему знаменателю получаем тождество:

$$5x^2+1=A(x-5)+B(x+1)(x-5)+C(x+1)^2 \tag{12}$$

Или $$5x^2+1=(B+C)x^2+(A-4B+2C)x+(-5A-5B+C). \tag{13}$$

Подставим в обе части (12) значения действительных корней знаменателя: при $x=-1 \Rightarrow 6=-6A \Rightarrow A=-1$; при $x=5 \Rightarrow 126=36C \Rightarrow C=7/2$. Для определения коэффициента $B$ приравниваем в (13) коэффициенты при $x^2$: $B+C=5 \Rightarrow B=5-C=5-7/2=3/2$.

Ответ: $\frac{5x^2+1}{(x+1)^2(x-5)}=-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x+1}+\frac{7}{2}\cdot\frac{1}{x-5}$.

П р и м е р 19. Разложить дробь $\frac{x^3+3}{(x+1)(x^2+1)^2}$ на простейшие.

Р е ш е н и е. Знаменатель дроби имеет один действительный корень $x=-1$ и комплексно сопряженные корни кратности два. Из формулы (10) получаем разложение:

$$\frac{x^3+3}{(x+1)(x^2+1)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{(x^2+1)^2}+\frac{Dx+E}{x^2+1}.$$

Проверяем: 5 коэффициентов и знаменатель – многочлен пятой степени. После сложения дробей получаем тождество:

$$x^3+3=A(x^2+1)^2+(Bx+C)(x+1)+(Dx+E)(x+1)(x^2+1) \quad (14)$$

Или $$x^3+3=(A+D)x^4+(D+E)x^3+(2A+B+E+D)x^2+$$

$$+(B+C+D+E)x+(A+C+E). \quad (15)$$

Подставляя в (14) значение корня $x=-1$, получим $2=4A \Rightarrow A=1/2$. Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях $x$ в (15):

$$\begin{array}{l} x^4: \\ x^3: \\ x^2: \\ x^0: \end{array} \left\{ \begin{array}{c} 0=A+D \Rightarrow D=-A \Rightarrow D=-1/2, \\ 1=D+E \Rightarrow E=1-D \Rightarrow E=3/2, \\ 0=2A+B+E+D \Rightarrow B=-2A-D-E \Rightarrow B=-2, \\ 3=A+C+E \Rightarrow C=3-A-E \Rightarrow C=1. \end{array} \right.$$

Ответ: $\dfrac{x^3+3}{(x+1)(x^2+1)^2}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{-2x+1}{(x^2+1)^2}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{-x+3}{x^2+1}$.

.

З а м е ч а н и е 2. В некоторых случаях разложение рациональной дроби на простейшие можно осуществить без применения рассмотренной выше процедуры.

П р и м е р 20. Разложить дробь $\dfrac{1}{x(x^2+1)}$ на простейшие.

Р е ш е н и е. $$\frac{1}{x(x^2+1)^2}=\frac{(1+x^2)-x^2}{x(x^2+1)^2}=\frac{1}{x(x^2+1)}-\frac{x}{(x^2+1)^2}=$$

$$=\frac{(1+x^2)-x^2}{x(x^2+1)}-\frac{x}{(x^2+1)^2}=\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}-\frac{x}{(x^2+1)^2}.$$

### Интегрирование дробей (примеры)

П р и м е р 21. Найти интеграл $\displaystyle\int\frac{4x^4+2x^2-x-3}{x(x-1)(x+1)}dx$.

Р е ш е н и е. Рассмотрим отдельно подынтегральную функцию: $\dfrac{4x^4+2x^2-x-3}{x(x-1)(x+1)}$. Это неправильная дробь. Выделяем целую часть: $\dfrac{4x^4+2x^2-x-3}{x(x-1)(x+1)}=4x+\dfrac{6x^2-x-3}{x(x-1)(x+1)}$.

Выписываем правильную дробь: $\dfrac{6x^2-x-3}{x(x-1)(x+1)}$. Знаменатель разложен на множители. Раскладываем дробь на элементарные:

$$\frac{6x^2-x-3}{x(x-1)(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1}.$$

Проверяем: число неопределенных коэффициентов 3 равно наибольшей степени знаменателя. Определяем коэффициенты:

$$\frac{6x^2-x-3}{x(x-1)(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1}\ \Rightarrow$$

$\Rightarrow 6x^2-x-3=A(x-1)(x+1)+Bx(x-1)+Cx(x+1)$. Подставляем последовательно в обе части тождества значения действительных корней знаменателя: $x=0\ \Rightarrow\ -3=-A\ \Rightarrow\ A=3$; $x=1\ \Rightarrow\ 2=2B\ \Rightarrow\ B=1$; $x=-1\ \Rightarrow$ $4=2C\ \Rightarrow\ C=2$.

$$\frac{6x^2-x-3}{x(x-1)(x+1)}=\frac{3}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x+1},$$

$$\frac{4x^4+2x^2-x-3}{x(x-1)(x+1)}=4x+\frac{3}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x+1}.$$

Интегрируем : $\displaystyle\int\frac{4x^4+2x^2-x-3}{x(x-1)(x+1)}dx=\int 4xdx+3\int\frac{dx}{x}+\int\frac{dx}{x-1}+2\int\frac{dx}{x+1}=$

$$=2x^2+3\ln|x|+\ln|x-1|+2\ln|x+1|+C=$$

$$= 2x^2 + \ln|x^3(x-1)(x+1)^2| + C.$$

Ответ: $\int \frac{4x^4 + 2x^2 - x - 3}{x(x-1)(x+1)} dx = 2x^2 + \ln|x^3(x-1)(x+1)^2| + C$.

П р и м е р 22. Найти интеграл $\int \frac{x^3 - 6x^2 + 13x + 26}{(x+2)(x-2)^3} dx$.

Р е ш е н и е. Рассмотрим отдельно дробь $\frac{x^3 - 6x^2 + 13x + 26}{(x+2)(x-2)^3}$.

Она правильная; знаменатель разложен на множители. Раскладываем дробь на элементарные:

$$\frac{x^3 - 6x^2 + 13x + 26}{(x+2)(x-2)^3} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x-2)^3} + \frac{C}{(x-2)^2} + \frac{D}{x-2}.$$

Проверяем: число неопределенных коэффициентов 4 равно наибольшей степени знаменателя. Определяем коэффициенты: приводим правую часть к общему знаменателю и получаем тождество $x^3 - 6x^2 + 13x + 26 =$

$$= A(x-2)^3 + B(x+2) + C(x+2)(x-2) + D(x+2)(x-2)^2; \qquad (16)$$

подставляем в (16) два действительных корня знаменателя дроби: $x = -2 \Rightarrow -32 = -64A \Rightarrow A = 1/2$; $x = 2 \Rightarrow 36 = 4B \Rightarrow B = 9$; для нахождения коэффициентов $C$ и $D$ в тождестве (16) приравниваем коэффициенты при $x^3$ и $x^2$:

$$\begin{matrix} x^3: \\ x^2: \end{matrix} \begin{cases} 1 = A + D, \\ 26 = -8A + 2B - 4C + 8D \end{cases}$$

$$\Rightarrow C = -2,\ D = 1/2.\ \frac{x^3 - 6x^2 + 13x + 26}{(x+2)(x-2)^3} =$$

$= \frac{1}{2}\frac{1}{x+2} + \frac{9}{(x-2)^3} - \frac{2}{(x-2)^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{x-2}$. Интегрируем:

$$\int\frac{x^3-6x^2+13x+26}{(x+2)(x-2)^3}dx==\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+2}+9\int\frac{dx}{(x-2)^3}-2\int\frac{dx}{(x-2)^2}+$$

$$+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-2}=\frac{1}{2}\ln|x+2|-\frac{9}{2}\frac{1}{(x-2)^2}+\frac{2}{x-2}+\frac{1}{2}\ln|x-2|+C.$$

Ответ: $\int\frac{x^3-6x^2+13x+26}{(x+2)(x-2)^3}dx=\frac{1}{2}\ln|x^2-4|-\frac{9}{2}\frac{1}{(x-2)^2}+\frac{2}{x-2}+C$.

П р и м е р 23. Найти интеграл $\int\frac{x^3+x^2-5}{x^3-8}dx$.

Р е ш е н и е. Дробь $\frac{x^3+x^2-5}{x^3-8}$ неправильная; выделяем целую часть: $\frac{x^3+x^2-5}{x^3-8}=1+\frac{x^2+3}{x^3-8}$. Раскладываем знаменатель дроби на множители как разность кубов (приложение, п.3): $x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4)$. Раскладываем полученную правильную дробь на элементарные (формула (10)):

$$\frac{x^2+3}{x^3-8}=\frac{x^2+3}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+4}.$$

Проверяем: число неопределенных коэффициентов 3 равно наибольшей степени знаменателя. Определяем коэффициенты:

$$\frac{x^2+3}{x^3-8}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+4}\Rightarrow A(x^2+2x+4)+$$

$$+(Bx+C)(x-2)\equiv x^2+3\Rightarrow\left|\begin{array}{l}\textit{подставляем корень}\\ \textit{знаменателя } x=2\end{array}\right|\Rightarrow 12A=7\Rightarrow$$

$\Rightarrow A=7/12$. Составляем систему уравнений:

$$\begin{array}{l}x^2:\\ x^1:\\ x^0:\end{array}\begin{cases}A+B=1,\\ 2A-2B+C=0,\\ 4A-2C=3.\end{cases}$$

Зная $A = 7/12$, находим из полученной системы остальные коэффициенты: $B = 5/12$, $C = -1/3$. Таким образом,

$$\frac{x^3+x^2-5}{x^3-8} = 1 + \frac{7}{12}\cdot\frac{1}{x-2} + \frac{1}{12}\cdot\frac{5x-4}{x^2+2x+4}.$$

Интегрируем: $\int\frac{x^3+x^2-5}{x^3-8}dx = \int dx + \frac{7}{12}\int\frac{dx}{x-2} + \frac{1}{12}\int\frac{5x-4}{x^2+2x+4}dx =$

$$= x + \frac{7}{12}\ln|x-2| + \frac{1}{12}\int\frac{5x-4}{x^2+2x+4}dx.$$

Находим последний интеграл: $\int\frac{5x-4}{x^2+2x+4}dx =$

$$= \left|\begin{matrix}\textit{преобразуем знаменатель}: \\ x^2+2x+4=(x+1)^2+3\end{matrix}\right| = \int\frac{5x-4}{(x+1)^2+3}dx = \left|\begin{matrix}x+1=t, \\ x=t-1, dx=dt\end{matrix}\right| =$$

$$= \int\frac{5(t-1)-4}{t^2+3}dt = 5\int\frac{tdt}{t^2+3} - 9\int\frac{dt}{t^2+3} =$$

$$= \left|\begin{matrix}\textit{в первом интеграле подводим } t \textit{ под} \\ \textit{дифференциал; второй} - \textit{табличный}\end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{5}{2}\int\frac{d(t^2+3)}{t^2+3} - \frac{9}{\sqrt{3}}arctg\frac{t}{\sqrt{3}} = \frac{5}{2}\ln(t^2+3) - 3\sqrt{3}arctg\frac{t}{\sqrt{3}} = |t = x+1| =$$

$$= \frac{5}{2}\ln(x^2 2x+4) - 3\sqrt{3}arctg\frac{x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

Ответ: $\int\frac{x^3+x^2-5}{x^3-8}dx =$

$$= x + \frac{7}{12}\ln|x-2| + \frac{5}{24}\ln(x^2 2x+4) - \frac{\sqrt{3}}{4}arctg\frac{x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

П р и м е р 24. Найти интеграл $\int\frac{xdx}{(x-1)(x^2+x+1)^2}$.

Р е ш е н и е. Дробь $\dfrac{x}{(x-1)(x^2+x+1)^2}$ правильная; знаменатель разложен на множители. Раскладываем полученную правильную дробь на элементарные (формула (10)):

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+x+1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{(x^2+x+1)^2}+\frac{Dx+E}{x^2+x+1}.$$

Проверяем число неопределенных коэффициентов. Их число 5 равно наибольшей степени знаменателя. Определяем коэффициенты. Приводим правую часть к общему знаменателю и получаем тождество:

$x=A(x^2+x+1)^2+B(x^2-x)+C(x-1)+D(x^4-x)+E(x^3-1)$ или

$x=A(x^4+2x^3+3x^2+2x+1)+B(x^2-x)+C(x-1)+D(x^4-x)+$

$+E(x^3-1)\ \Rightarrow\ \left|\begin{matrix}\textit{подставляем корень}\\ \textit{знаменателя } x=1\end{matrix}\right|\ \Rightarrow\ 1=9A\ \Rightarrow\ A=1/9$. С учетом найденного значения $A$ приравниваем в тождестве коэффициенты при одинаковых степенях $x$ и составляем систему уравнений:

$$\begin{matrix}x^4:\\ x^3:\\ x^2:\\ x:\end{matrix}\begin{cases}1/9+D=0,\\ 2/9+E=0,\\ 1/3+B=0,\\ 2/9-B+C-D=1\end{cases}\Rightarrow\quad\begin{matrix}D=-1/9,\\ E=-2/9,\\ B=-1/3,\\ C=1/3\end{matrix}$$

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+x+1)^2}=\frac{1}{9}\frac{1}{x-1}-\frac{1}{3}\frac{x-1}{(x^2+x+1)^2}-\frac{1}{9}\frac{x+2}{x^2+x+1}.$$

Интегрируем:

$\displaystyle\int\frac{xdx}{(x-1)(x^2+x+1)^2}=\frac{1}{9}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{3}\int\frac{(x-1)dx}{(x^2+x+1)^2}-\frac{1}{9}\int\frac{(x+2)dx}{x^2+x+1}.$ Первый интеграл – табличный; во втором и третьем – в знаменателе выделяем полный квадрат: $x^2+x+1=(x+1/2)^2+3/4$ – и делаем замену переменной: $x+1/2=t$. В результате получаем следующие интегралы:

$$\int \frac{xdx}{(x-1)(x^2+x+1)^2} = \frac{\ln|x-1|}{9} - \frac{1}{3}\int \frac{(t-3/2)dt}{(t^2+3/4)^2} - \frac{1}{9}\int \frac{(t+3/2)dt}{t^2+3/4} =$$

$$= \frac{\ln|x-1|}{9} - \frac{1}{3}\int \frac{tdt}{(t^2+3/4)^2} - \frac{1}{9}\int \frac{tdt}{t^2+3/4} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{(t^2+3/4)^2} -$$

$$-\frac{1}{6}\int \frac{dt}{t^2+3/4} = \frac{\ln|x-1|}{9} - \frac{1}{6}\int \frac{d(t^2+3/4)}{(t^2+3/4)^2} -$$

$$-\frac{1}{18}\int \frac{d(t^2+3/4)}{t^2+3/4} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{(t^2+3/4)^2} - \frac{1}{6}\int \frac{dt}{t^2+3/4} = \frac{\ln|x-1|}{9} +$$

$$+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{t^2+3/4} - \frac{\ln(t^2+3/4)}{18} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{(t^2+3/4)^2} - \frac{\sqrt{3}}{9} arctg\frac{2t}{\sqrt{3}}.$$

Оставшийся интеграл был вычислен ранее. При $a = \sqrt{3}/2$ получим: $\int \frac{dt}{\left(t^2+3/4\right)^2} = \frac{2}{3}\cdot\frac{t}{t^2+3/4} + \frac{4\sqrt{3}}{9} arctg\frac{2t}{\sqrt{3}} + C.$ Таким образом,

$$\int \frac{xdx}{(x-1)(x^2+x+1)^2} =$$

$$= \frac{\ln|x-1|}{9} + \frac{1}{3}\cdot\frac{t+1/2}{t^2+3/4} - \frac{\ln(t^2+3/4)}{18} + \frac{\sqrt{3}}{9} arctg\frac{2t}{\sqrt{3}} + C =$$

$$= \frac{\ln|x-1|}{9} + \frac{1}{3}\cdot\frac{x+1}{x^2+x+1} - \frac{\ln(x^2+x+1)}{18} + \frac{\sqrt{3}}{9} arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

## 3.6 Интегрирование некоторых функций, содержащих иррациональные выражения

**Интегралы вида** $\int R\left(\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m/n}, ..., \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p/q}\right)dx$

Пусть задан интеграл вида

$$\int R\left(\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m/n},\ldots,\ \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p/q}\right)dx, \qquad (17)$$

где $m/n$, …, $p/q$ – несократимые дроби, постоянные $a$, $b$, $c$, $d$ таковы, что $ad-bc\neq 0$. Вводя новую переменную $t$ соотношением

$$\frac{ax+b}{cx+d}=t^N, \qquad (18)$$

где $N$ – наименьшее общее кратное знаменателей $n$, …, $q$, интегралы вида (17) сводятся к интегралам от рациональной функции переменной $t$.

П р и м е р 25. Найти интеграл $\int\frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt[3]{x^2}}dx$.

Р е ш е н и е. Данный интеграл – вида (17), так как $x=\frac{ax+b}{cx+d}$ при $a=d=1,\ \ b=c=0$, т. е. подынтегральная функция есть рациональная функция $R\left(x,x^{1/2},x^{2/3}\right)$. Тогда, следуя (18), находим наименьшее общее кратное (НОК) знаменателей степеней $1/2$ и $2/3$: $[2,3]=НОК=6=N$, и вводим новую переменную $x=t^6$. Отсюда $dx=6t^5dt$, $\sqrt{x}=t^3$, $\sqrt[3]{x^2}=t^4$. Тогда $\int\frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt[3]{x^2}}dx=6\int\frac{t^4}{t^2-1}dt$. В последнем интеграле подынтегральная функция есть рациональная дробь: $\frac{t^4}{t^2-1}=\left|\begin{matrix}\textit{дробь неправильная,}\\ \textit{выделяем целую часть}\end{matrix}\right|=\frac{(t^4-1)+1}{t^2-1}=t^2+1+\frac{1}{t^2-1}$. Интегрируем: $6\int\frac{t^4}{t^2-1}dt=6\left(\frac{t^3}{3}+t+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right)+C$. Производим обратную замену: $t=\sqrt[6]{x}$ и получаем

$$\int\frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt[3]{x^2}}dx=2\sqrt{x}+6\sqrt[6]{x}+3\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[6]{x}+1}\right|+C.$$

Ответ: $\int \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt[3]{x^2}}dx = 2\sqrt{x}+6\sqrt[6]{x}+3\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[6]{x}+1}\right|+C$.

П р и м е р 26. Найти интеграл $\int \frac{1}{x}\sqrt[3]{\frac{x+2}{x-2}}dx$.

Р е ш е н и е. Данный интеграл – вида (17): $\int R\left(x,\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^{1/3}\right)dx$.

Вводим замену: $\frac{x+2}{x-2}=t^3$. Отсюда находим $x=2\frac{t^3+1}{t^3-1}$, $dx=-\frac{12t^2dt}{\left(t^3-1\right)^2}$.

Тогда $\int \frac{1}{x}\sqrt[3]{\frac{x+2}{x-2}}dx=-6\int\frac{(t^3-1)t^3dt}{(t^3+1)(t^3-1)^2}=$

$=-6\int\frac{t^3dt}{(t^3+1)(t^3-1)}$. Подынтегральную функцию (рациональную дробь) раскладываем следующим образом: $\frac{t^3}{(t^3+1)(t^3-1)}=$

$=\frac{1}{2}\frac{(t^3-1)+(t^3+1)}{(t^3+1)(t^3-1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t^3+1}+\frac{1}{t^3-1}\right)$. Интегрируем полученные дроби.

Имеем: $\frac{1}{t^3+1}=\frac{A}{t+1}+\frac{Bt+C}{t^2-t+1}=$

$$=\left|\begin{array}{l}\textit{находим коэффициенты}:\\ A=1/3,\ B=-1/3,\ C=2/3\end{array}\right|=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{t+1}-\frac{1}{3}\cdot\frac{t-2}{t^2-t+1}.$$

$$\int\frac{dt}{t^3+1}=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t+1}-\frac{1}{3}\int\frac{t-2}{t^2-t+1}dt=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\textit{первый интеграл} - \textit{табличный}; \textit{во втором} -\\ \textit{выделяем полный квадрат}: t^2-t+1=\\ =\left(t-1/2\right)^2+3/4, \textit{ и заменяем переменную}:\\ t-1/2=z,\ dt=dz\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{3}\ln|t+1|-\frac{1}{3}\int\frac{z-3/2}{z^2+3/4}dz=\frac{1}{3}\ln|t+1|-\frac{1}{3}\int\frac{zdz}{z^2+3/4}+\frac{1}{2}\int\frac{dz}{z^2+3/4}=$$

$$=\frac{1}{3}\ln|t+1|-\frac{1}{6}\int\frac{d(z^2+3/4)}{z^2+3/4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{2z}{\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{1}{3}\ln|t+1|-\frac{1}{6}\ln(z^2+3/4)+\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2z}{\sqrt{3}}=\frac{1}{3}\ln|t+1|-$$

$=-\frac{1}{6}\ln(t^2-t+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2t-1}{\sqrt{3}}$. Аналогично, находим, что

$\int\frac{dt}{t^3-1}=\frac{1}{3}\ln|t-1|-\frac{1}{6}\ln(t^2+t+1)-\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2t+1}{\sqrt{3}}$ (убедитесь сами).

Ответ: $\int\frac{1}{x}\sqrt[3]{\frac{x+2}{x-2}}dx=\frac{1}{6}\left(\ln\frac{|t^2-1|}{\sqrt{(t^2-t+1)(t^2+t+1)}}+\sqrt{3}arctg\frac{2t-1}{\sqrt{3}}-\right.$

$\left.-\sqrt{3}arctg\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)+C$, где $t=\sqrt[3]{\frac{x+2}{x-2}}$.

## 3.7 Интегрирование тригонометрических функций

### Использование тригонометрических соотношений

П р и м е р 27. Найти интеграл $\int\sin x\cos 2x\sin 4x dx$.

Р е ш е н и е. Преобразуем подынтегральную функцию, используя тригонометрические формулы (см. справочные материалы):

$$\sin x\cos 2x\sin 4x=\frac{1}{2}\big(\sin(x-2x)+\sin(x+2x)\big)\sin 4x=$$

$$=\frac{1}{2}\big(-\sin x+\sin 3x\big)\sin 4x=-\frac{1}{2}\sin x\sin 4x+\frac{1}{2}\sin 3x\sin 4x=$$

$$=\frac{1}{4}\big(-\cos 3x+\cos 5x+\cos x-\cos 7x\big).$$

Тогда $\int \sin x \cos 2x \sin 4x dx = \frac{1}{4}\left(-\frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \sin x - \frac{\sin 7x}{7}\right) + C$.

П р и м е р  28. Найти интеграл $\int \sin^6 x dx$.

Р е ш е н и е. Используя тригонометрические формулы (см. справочные материалы), произведем следующие преобразования подынтегральной функции: $\sin^6 x = (\sin^2 x)^3 = \frac{1}{8}(1-\cos 2x)^3 =$

$$= \frac{1}{8}(1 - 3\cos 2x + 3\cos^2 2x - \cos^3 2x) =$$

$$= \frac{1}{8}\left(1 - 3\cos 2x + 3\frac{1+\cos 4x}{2} - \cos^3 2x\right).$$

$$\int \sin^6 x dx = \frac{x - \frac{3}{2}\sin 2x + \frac{3}{2}x + \frac{3}{4}\sin 4x - \int \cos^3 2x dx}{8}.$$

Найдем отдельно $\int \cos^3 2x dx = \int \cos^2 2x \cos 2x dx =$

$$= \left| \begin{array}{l} \textit{подведём } \cos 2x \textit{ под дифференциал}: \\ \cos 2x dx = d\left(\int \cos 2x dx\right) = d\left(\frac{\sin 2x}{2}\right) = \frac{d\sin 2x}{2} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\int\left(1 - \sin^2 2x\right) d\sin 2x = \left| u = \sin 2x \right| = \frac{1}{2}\int\left(1 - u^2\right) du = \frac{1}{2}\left(u - \frac{u^3}{3}\right) =$$

$= \frac{1}{2}\left(\sin 2x - \frac{\sin^3 2x}{3}\right)$. Окончательно:

$$\int \sin^6 x dx = \frac{1}{8}\left(\frac{5}{3}x - 2\sin 2x + \frac{3}{4}\sin 4x + \frac{1}{6}\sin^3 2x\right) + C.$$

П р и м е р  29. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sin^6 x}$.

Р е ш е н и е. В отличие от предыдущего примера, понижение степени в подынтегральной функции не приведет к желаемому результату. Применим другой прием. Так как $d(ctgx) = -\dfrac{dx}{\sin^2 x}$, то

$$\int \frac{dx}{\sin^6 x} = \int \frac{1}{\sin^4 x} \cdot \frac{dx}{\sin^2 x} = -\int \frac{1}{\sin^4 x} dctgx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \sin^2 x = \dfrac{1}{1+ctg^2 x}, \\ \text{\textit{приложение}, } n.5.4. \end{array} \right| = -\int \left(1+ctg^2 x\right)^2 dctgx = |u = ctgx| =$$

$$= -\int \left(1+u^2\right)^2 du = -\int \left(1+2u^2+u^4\right) du = -u - \frac{2}{3}u^3 - \frac{1}{5}u^5 =$$

$$= -ctgx - \frac{2}{3}ctg^3 x - \frac{1}{5}ctg^5 x + C.$$

Ответ: $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^6 x} = -ctgx - \frac{2}{3}ctg^3 x - \frac{1}{5}ctg^5 x + C$.

### 3.8 Интегрирование рациональных функций вида $R(\sin x, \cos x)$

Так как все тригонометрические функции можно выразить через функции $\sin x$ и $\cos x$ в виде рациональных дробей, то рассматриваются рациональные функции от функций $\sin x$ и $\cos x$: $R(\sin x, \cos x)$. Интегралы вида

$$\int R(\sin x, \cos x) dx \qquad (19)$$

могут быть сведены к интегралам от рациональных дробей, которые, всегда интегрируются (выражаются через элементарные функции).

**Универсальная тригонометрическая подстановка**

$$tg\frac{x}{2} = t \qquad (20)$$

Так как $\sin x = \dfrac{2tg(x/2)}{1+tg^2(x/2)}$, $\cos x = \dfrac{1-tg^2(x/2)}{1+tg^2(x/2)}$,

$dx = \dfrac{2d\left(tg(x/2)\right)}{1+tg^2(x/2)}$, то с помощью (20) получаем:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \qquad (21)$$

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}.$$

П р и м е р 30. Найти интеграл $\int \dfrac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}$.

Р е ш е н и е. Применяем универсальную тригонометрическую подставку

$$\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x} = \int \frac{1}{8-4\dfrac{2t}{1+t^2}+7\dfrac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{2dt}{t^2-8t+15} =$$

$$= \left| \begin{matrix} \textit{выделяем полный квадрат}: \\ t^2-8t+15=(t-4)^2-1 \end{matrix} \right| = 2\int \frac{dt}{(t-4)^2-1} = \left| \begin{matrix} t-4=z, \\ dt=dz \end{matrix} \right| =$$

$$= 2\int \frac{dz}{z^2-1} = \ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right| + C = \ln\left|\frac{t-5}{t-3}\right| + C = \ln\left|\frac{tg(x/2)-5}{tg(x/2)-3}\right| + C.$$

Ответ: $\int \dfrac{dx}{8-4\sin x+7\cos x} = \ln\left|\dfrac{tg(x/2)-5}{tg(x/2)-3}\right| + C$.

З а м е ч а н и е. Универсальная подстановка всегда может быть применена к интегралам вида (19), но часто это приводит к весьма громоздким вычислениям. В ряде случаев рационализация интеграла достигается с помощью других подстановок.

**Если функция** $R(\sin x, \cos x)$ **– нечетная относительно переменной** $\sin x$**,** т. е. $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то можно использовать подстановку $\cos x = t$. Тогда $x = \arccos t$, $\sin x = \sqrt{1-t^2}$, $dx = -dt/\sqrt{1-t^2}$.

**Если функция** $R(\sin x, \cos x)$ **– нечетная относительно переменной** $\cos x$**,** т.е. $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то можно применить подстановку $\sin x = t$ по аналогии с предыдущим пунктом.

**Если функция** $R(\sin x, \cos x)$ **– четная относительно переменных** $\sin x$ **и** $\cos x$**,** т. е. $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то можно использовать подстановку $tg\ x = t$, $x = arctg\ t$, $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$, $\sin x = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$.

П р и м е р 31. Найти интеграл $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}dx$.

Р е ш е н и е. Подынтегральная функция является нечетной относительно функции $\sin x$, так как $R(-\sin x, \cos x) = \dfrac{(-\sin x)^3}{1+\cos^2 x} =$

$= -\dfrac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x} = -R(\sin x, \cos x)$. Вводим замену $\cos x = t$;

$$\int \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}dx = \int \frac{1-t^2}{1+t^2}dt = \int \frac{2-(1+t^2)}{1+t^2}dt = \int \frac{2dt}{1+t^2} - \int dt =$$

$= 2arctg\ t - t + C = 2arctg(\cos x) - \cos x + C$.

П р и м е р 32. Найти интеграл $\displaystyle\int \frac{2+\cos x}{\sin^3 x}dx$.

Р е ш е н и е. Подынтегральная функция является нечетной относительно функции $\sin x$, так как

$$R(-\sin x, \cos x) = \frac{2+\cos x}{(-\sin x)^3} = -\frac{2+\cos x}{\sin^3 x} = -R(\sin x, \cos x).$$

$$\int \frac{2+\cos x}{\sin^3 x}dx = \left|\cos x = t\right| = -\int \frac{2+t}{\left(\sqrt{1-t^2}\right)^3} \cdot \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\int \frac{2+t}{(1+t)^2} \frac{dt}{(1-t)}$$

Для интегрирования полученной дроби необходимо ее разложить на четыре простых дроби. Посмотрим, к чему приведет использование универсальной тригонометрической подстановки:

$$\int \frac{2+\cos x}{\sin^3 x}dx = \left| \begin{matrix} tg(x/2)=t \ \text{и} \\ \text{формулы } (22) \end{matrix} \right| = \frac{1}{4}\int \frac{3+4t^2+t^4}{t^3}dt = \frac{1}{4}\left( 3\int \frac{dt}{t^3} + 4\int \frac{dt}{t} + \right.$$

$$\left. + \int tdt \right) = \frac{1}{4}\left( -\frac{3}{2t^2} + 4\ln|t| + \frac{t^2}{2} \right) + C = -\frac{3}{8}ctg^2\frac{x}{2} + \ln\left| tg\frac{x}{2} \right| + \frac{1}{2}tg^2\frac{x}{2} + C.$$

С помощью универсальной тригонометрической подстановки результат достигается быстрее.

П р и м е р 33. Найти интеграл $\int \frac{1+\sin x\cos x}{\sin^2 x - 4\cos^2 x}dx$.

Р е ш е н и е. Подынтегральная функция удовлетворяет условию: $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, т. е. можно воспользоваться подстановкой $tg\ x = t$. Тогда

$$\int \frac{1+\sin x\cos x}{\sin^2 x - 4\cos^2 x}dx = \int \frac{1+\frac{t}{1+t^2}}{\frac{t^2}{1+t^2} - \frac{4}{1+t^2}} \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{t^2+t+1}{(t^2-4)(1+t^2)}dt =$$

$$= \left| \begin{matrix} \text{следуя разделу 4, } \dfrac{t^2+t+1}{(t^2-4)(1+t^2)} = \\ = \dfrac{7}{20}\dfrac{1}{t-2} - \dfrac{3}{20}\dfrac{1}{t+2} - \dfrac{1}{5}\dfrac{t}{1+t^2} \end{matrix} \right| = \frac{7}{20}\int \frac{dt}{t-2} - \frac{3}{20}\int \frac{dt}{t+2} -$$

$$-\frac{1}{5}\int \frac{tdt}{1+t^2} = \frac{7}{20}\ln|t-2| - \frac{3}{20}\ln|t+2| - \frac{1}{10}\ln|t^2+1| =$$

$$= \frac{7}{20}\ln|tg\ x - 2| - \frac{3}{20}\ln|tg\ x + 2| - \frac{1}{10}\ln|tg^2 x + 1| + C.$$

## 3.9 Интегралы вида $\int \sin^m x \cos^n x dx$

Если $m$ и $n$ – неотрицательные целые числа, то удобно понижать степень с помощью формул тригонометрии:

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x),\ \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x),\ \sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x.$$

Если $m$ и $n$ – целые числа (положительные и отрицательные), то рассматриваемые интегралы являются частным случаем интегралов вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$.

П р и м е р 34. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^5 x}$.

Р е ш е н и е. Универсальная подстановка приводит к очень большим вычислениям (проверьте). Так как выполняется условие: $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то можно воспользоваться подстановкой $tg\ x = t$. Получаем

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^5 x} = \int \frac{dt}{1+t^2} \cdot \frac{1}{\frac{t^3}{\left(\sqrt{1+t^2}\right)^3} \cdot \frac{1}{\left(\sqrt{1+t^2}\right)^5}} = \int \frac{\left(1+t^2\right)^3}{t^3} dt =$$

$$= \int \frac{dt}{t^3} + 3\int \frac{dt}{t} + 3\int t dt + \int t^3 dt = -\frac{1}{2t^2} + 3\ln|t| + 3\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4} + C =$$

$$= -\frac{1}{2} ctg^2 x + 3\ln|tg\ x| + \frac{3}{2} tg^2 x + \frac{1}{4} tg^4 x + C.$$

## 3.10 Интегралы вида $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$

Если в интеграле вида $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$, где $R$ – рациональная функция двух аргументов, в квадратном трехчлене под корнем выделить полный квадрат $ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b}{2a}$, а затем сделать замену $x+\frac{b}{2a}=t$, то интеграл сведется к одному из следующих: $I_1=\int R\left(t,\sqrt{a^2-t^2}\right)dt$, $I_2=\int R\left(t,\sqrt{t^2-a^2}\right)dt$, $I_3=\int R\left(t,\sqrt{a^2+t^2}\right)dt$.

П р и м е р 35. Найти интеграл $\int\sqrt{3-2x-x^2}dx$.

Р е ш е н и е. $\int\sqrt{3-2x-x^2}dx=\left|\begin{matrix}\textit{выделяем полный квадрат}\\ 3-2x-x^2=4-(x+1)^2\end{matrix}\right|=$

$$=\int\sqrt{4-(x+1)^2}dx=\left|\begin{matrix}x+1=t,\\ dx=dt\end{matrix}\right|=\int\sqrt{4-t^2}dt=$$

$$=\left|\begin{matrix}\textit{интеграл вида } I_1,\ t=2\sin u,\\ dt=2\cos u du, \sqrt{4-t^2}=2\cos u\end{matrix}\right|=\int 4\cos^2 u du=2\int(1+\cos 2u)du=$$

$$=2\left(\int du+\int\cos 2u du\right)=2u+\sin 2u+C=\left|u=\arcsin\frac{x+1}{2}\right|=$$

$$=2\arcsin\frac{x+1}{2}+(x+1)\sqrt{1-\left(\frac{x+1}{2}\right)^2}+C.$$

Ответ: $\int\sqrt{3-2x-x^2}dx=2\arcsin\frac{x+1}{2}+\frac{x+1}{2}\sqrt{3-2x-x^2}+C$.

П р и м е р 36. Найти интеграл $\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-3x+2}}$.

Р е ш е н и е.

$$\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-3x+2}}==\left|\begin{matrix}\textit{выделяем полный квадрат}:\\ x^2-3x+2=(x-3/2)^2-1/4\end{matrix}\right|=\left|x-\frac{3}{2}=t, dx=dt\right|=$$

$$=\int\frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)\sqrt{t^2-\frac{1}{4}}}=\left|\begin{matrix}\textit{интеграл вида } I_2,\ t=\dfrac{1}{2\cos u},\\ dt=\dfrac{\sin u du}{2\cos^2 u},\sqrt{t^2-\dfrac{1}{4}}=\dfrac{tgu}{2}\end{matrix}\right|=$$

$$=\int\frac{\sin u du}{\cos^2 u\left(\frac{1}{2\cos u}+\frac{1}{2}\right)tgu}=2\int\frac{du}{1+\cos u}=\int\frac{du}{\cos^2\frac{u}{2}}=2tg\frac{u}{2}+C=$$

$$=2\frac{\sin\frac{u}{2}}{\cos\frac{u}{2}}+C=2\sqrt{\frac{1-\cos u}{1+\cos u}}+C=\left|\cos u=\frac{1}{2t}\right|=$$

$$=2\sqrt{\frac{2t-1}{2t+1}}+C=\left|t=x-\frac{3}{2}\right|=2\sqrt{\frac{x-2}{x+2}}+C.$$

Ответ: $\displaystyle\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-3x+2}}=2\sqrt{\frac{x-2}{x+2}}+C$.

П р и м е р 37. Найти интеграл $\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2-2x+5)^{3/2}}$.

Р е ш е н и е. $\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2-2x+5)^{3/2}}=\int\frac{dx}{\left((x-1)^2+4\right)^{3/2}}=\left|\begin{matrix}x-1=t,\\ dx=dt\end{matrix}\right|=$

$$=\int\frac{dt}{\left(t^2+4\right)^{3/2}}=\left|\begin{matrix}\textit{интеграл вида } I_3,\ t=2tgu,\\ dt=\dfrac{2du}{\cos^2 u},\left(t^2+4\right)^{3/2}=\dfrac{8}{\cos^3 u}\end{matrix}\right|=\frac{1}{4}\int\cos u du=$$

$$=\frac{1}{4}\sin u+C=\frac{1}{4}\frac{tgu}{\sqrt{1+tg^2u}}+C=|tgu=t/2|=\frac{1}{4}\frac{t}{\sqrt{4+t^2}}+C=|t=x-1|=$$

$$=\frac{x-1}{4\sqrt{4+(x-1)^2}}+C.$$

Ответ: $\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2-2x+5)^{3/2}}=\frac{x-1}{4\sqrt{x^2-2x+5}}+C$.

## 3.11 Определенный интеграл

### Основные понятия и определения

Пусть на отрезке $[a,b]$, $a<b$, определена функция $f(x)$. Точками $a=x_0<x_1<...<x_{n-1}<x_n=b$ разобьем отрезок $[a,b]$ на $n$ частей $l_k=[x_{k-1},x_k]$, $k=1,2,...,n$, с длинами $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$. Множество $T=\{l_1,...,l_n\}$ называется *разбиением отрезка* $[a,b]$. Длину наибольшего из отрезков $l_k$ обозначим $\lambda$, $\lambda=\max\limits_{1\le k\le n}\Delta x_k$; она называется *диаметром разбиения* $T$. Возьмем на каждом из отрезков $[x_{k-1},x_k]$ произвольную точку $\xi_k$. Множество $\xi=\{\xi_1,...,\xi_n\}$ называется *выборкой*. Сумма

$$\sigma_T(\xi,f)=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k\,, \tag{22}$$

называется *интегральной суммой для функции* $f$ при заданном разбиении $T$ и фиксированной выборке $\xi$.

*Определенным интегралом от функции* $f(x)$ *на отрезке* $[a,b]$ называется предел интегральной суммы (22) при $\lambda\to 0$, не зависящий ни от разбиения $T$, ни от выборки $\xi$, и обозначается $\int\limits_a^b f(x)dx$. В символьном виде это определение можно записать так:

$$\left\{J=\int_a^b f(x)dx=\lim_{\lambda\to 0}\sigma_T(\xi,f)\right\}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0\exists\delta(\varepsilon)>0:\forall T:\lambda<\delta(\varepsilon)\forall\xi\to\left|\sigma_T(\xi,f)-J\right|<\varepsilon.$$

Числа $a$ и $b$ называются *нижним и верхним пределами интегрирования*, соответственно. Если предел $J$ существует, то функция $f(x)$ называется *интегрируемой* (по Риману). К таким функциям относятся: а) непрерывные на отрезке $[a,b]$ функции; б) ограниченные на отрезке $[a,b]$ функции, имеющие конечное число точек разрыва первого рода. Если $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, то справедлива **формула Ньютона–Лейбница:** $\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$.

### Основные свойства определенного интеграла

1) $\int_a^a f(x)dx = 0$. 2) $\int_a^b dx = b - a$. 3) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

4) *Свойство линейности*:

$\int_a^b (k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x))dx = k_1\int_a^b f_1(x)dx + k_2\int_a^b f_2(x)dx$, где $k_1$ и $k_2$ – постоянные.

5) Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, то она интегрируема на любом отрезке $[a_1,b_1] \subset [a,b]$.

6) *Свойство аддитивности*. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[A,B]$, $A < B$, и точки $a$, $b$, $c$ принадлежат $[A,B]$. Тогда справедлива формула $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ при любом расположении точек $a$, $b$, $c$ относительно друг друга.

7) Если $f(x) \ge 0$ для всех $x \in [a,b]$, $a < b$, то $\int_a^b f(x)dx \ge 0$.

8) Если $f(x) \ge g(x)$ для всех $x \in [a,b]$, $a < b$, то

$\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx$.

9) *Т е о р е м а о среднем*. Если $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$ и $m \le f(x) \le M$ для всех $x \in [a,b]$, то существует число $\mu$ такое, что $m \le \mu \le M$

и $\int\limits_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$. В частности, если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то найдется точка $c \in [a,b]$ такая, что $\int\limits_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$.

10) *Геометрический смысл определенного интеграла*. Если $f(x) \geq 0$ для всех $x \in [a,b]$, то интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ численно равен *площади криволинейной трапеции*, ограниченной кривой $y = f(x)$ и прямыми $x = a$, $x = b$ и $y = 0$ (ось абсцисс).

З а м е ч а н и е. Определенный интеграл не зависит от обозначения переменной интегрирования: $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b f(t)dt = \int\limits_a^b f(u)du$ и т. д.

П р и м е р 38. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{\sqrt{2}/2} \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Р е ш е н и е. $\int\limits_0^{\sqrt{2}/2} \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x\Big|_0^{\sqrt{2}/2} = \arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \arcsin 0 = \dfrac{\pi}{4}$.

Ответ: $\int\limits_0^{\sqrt{2}/2} \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{\pi}{4}$.

П р и м е р 39. Вычислить интеграл $\int\limits_1^{\sqrt{3}} \dfrac{x^2dx}{x^6+4}$.

Р е ш е н и е. $\int\limits_1^{\sqrt{3}} \dfrac{x^2dx}{x^6+4} = \left| x^2dx = \dfrac{dx^3}{3} \right| = \dfrac{1}{3}\int\limits_1^{\sqrt{3}} \dfrac{dx^3}{(x^3)^2+4} =$

$$= \frac{1}{6} arctg\frac{x^3}{2}\Bigg|_1^{\sqrt{3}} = \frac{1}{6}\left( arctg\frac{3\sqrt{3}}{2} - arctg\frac{1}{2} \right).$$

Ответ: $\int\limits_{1}^{\sqrt{3}} \frac{x^2dx}{x^6+4} = \frac{1}{6}\left( arctg\frac{3\sqrt{3}}{2} - arctg\frac{1}{2} \right).$

П р и м е р 40. Вычислить интеграл $\int\limits_{-1}^{1} \frac{y^3dy}{y+2}$.

Р е ш е н и е. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{y^3dy}{y+2} = \int\limits_{-1}^{1} \left( y^2 - 2y + 4 - \frac{8}{y+2} \right) dy =$

$$= \int\limits_{-1}^{1} y^2dy - 2\int\limits_{-1}^{1} ydy + 4\int\limits_{-1}^{1} dy - 8\int\limits_{-1}^{1} \frac{dy}{y+2} =$$

$$= \frac{y^3}{3}\Bigg|_{-1}^{1} - y^2\Big|_{-1}^{1} + 4y\Big|_{-1}^{1} - 8\ln|y+2|\Big|_{-1}^{1} = \frac{26}{3}.$$

Ответ: $\int\limits_{-1}^{1} \frac{y^3dy}{y+2} = \frac{26}{3}$.

П р и м е р 41. Вычислить интеграл $\int\limits_{e}^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$.

Р е ш е н и е. $\int\limits_{e}^{e^2} \frac{dx}{x\ln x} = \left| \frac{dx}{x} = d\left( \int \frac{dx}{x} \right) = d\ln x \right| =$

$$= \int\limits_{e}^{e^2} \frac{d\ln x}{\ln x} = \ln|\ln x|\Big|_{e}^{e^2} = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$$

Ответ: $\int\limits_{e}^{e^2} \frac{dx}{x\ln x} = \ln 2$.

П р и м е р 42. Вычислить интеграл $\int\limits_{0}^{\pi/2} \sin^3\varphi d\varphi$.

Р е ш е н и е. $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^3 \varphi d\varphi = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 \varphi \sin \varphi d\varphi =$

$$= -\int\limits_0^{\pi/2} (1-\cos^2\varphi) d\cos\varphi = -\int\limits_0^{\pi/2} d\cos\varphi + \int\limits_0^{\pi/2} \cos^2\varphi d\cos\varphi =$$

$$= -\cos\varphi\Big|_0^{\pi/2} + \frac{\cos^3\varphi}{3}\Bigg|_0^{\pi/2} = -\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) + \frac{1}{3}\left(\cos^3\frac{\pi}{2} - \cos^3 0\right) = \frac{2}{3}.$$

Ответ: $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^3\varphi d\varphi = \frac{2}{3}$.

### 3.12 Замена переменной в определенном интеграле

Т е о р е м а. Пусть: 1) функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$; 2) функция $x = \varphi(t)$ определена и непрерывно дифференцируема на отрезке $[\alpha,\beta]$; 3) функция $\varphi(t)$ строго возрастает (строго убывает) на $[\alpha,\beta]$; 4) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. Тогда справедлива формула $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ замены переменной в определенном интеграле.

П р и м е р 43. Вычислить интеграл $\int\limits_{\sqrt{2}/2}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx$.

Р е ш е н и е.

$$\int\limits_{\sqrt{2}/2}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx = \left| \begin{array}{l} x = \sin t, dx = \cos t dt, \sqrt{1-x^2} = \cos t, \\ x = \frac{\sqrt{2}}{2} \to t = \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}, \\ x = 1 \to t = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}, (см.п.29) \end{array} \right| = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} dt =$$

$$=\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}dt==\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\left(\frac{1}{\sin^2 t}-1\right)dt=-\left(ctg\ t+t\right)\Big|_{\pi/4}^{\pi/2}=$$

$$=-\left(ctg\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)+\left(ctg\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{4-\pi}{4}.$$

Ответ: $\int\limits_{\sqrt{2}/2}^{1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx=\frac{4-\pi}{4}$.

П р и м е р 44. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{\ln 5}\frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx$.

Р е ш е н и е. $\int\limits_0^{\ln 5}\frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx=$

$$=\left|\begin{array}{l}\sqrt{e^x-1}=t, x=\ln(t^2+1), dx=\dfrac{2tdt}{1+t^2},\\ x=0\to t=0, x=\ln 5\to t=\sqrt{e^{\ln 5}-1}=2\end{array}\right|=\int\limits_0^2\frac{(t^2+1)t}{(t^2+4)}\cdot\frac{2tdt}{(t^2+1)}=$$

$$=2\int\limits_0^2\frac{t^2dt}{t^2+4}=2\int\limits_0^2\frac{(t^2+4)-4}{t^2+4}dt=2\int\limits_0^2\left(1-\frac{4}{t^2+4}\right)dt=2\left(t-2arctg\frac{t}{2}\right)\Bigg|_0^2=$$

$$=2\left(2-arctg1+2arctg0\right)=4-\pi.$$

Ответ: $\int\limits_0^{\ln 5}\frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx=4-\pi$.

П р и м е р 45. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{\pi/2}\frac{dx}{5-3\cos x}$.

Р е ш е н и е. $\int\limits_0^{\pi/2}\frac{dx}{5-3\cos x}=$

$$=\left|\begin{matrix} tg\dfrac{x}{2}=t,\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2},dx=\dfrac{2dt}{1+t^2}, \\ x=0\to t=tg0=0,x=\dfrac{\pi}{2}\to t=1 \end{matrix}\right|=\int\limits_0^1\frac{2dt}{\left(1+t^2\right)\left(5-3\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)}=$$

$$=\frac{1}{4}\int\limits_0^1\frac{dt}{\dfrac{1}{4}+t^2}=\frac{1}{4}2arctg2t\Big|_0^1=\frac{1}{2}arctg2.$$

Ответ: $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2}\frac{dx}{5-3\cos x}=\frac{1}{2}arctg2$.

П р и м е р 46. Вычислить интеграл $\displaystyle\int\limits_1^3\frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}}$.

Р е ш е н и е. $\displaystyle\int\limits_1^3\frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}}=\left|\begin{matrix} x=\dfrac{1}{t}, \qquad dx=-\dfrac{dt}{t^2}, \\ x=1\to t=1,\ x=3\to t=1/3 \end{matrix}\right|=$

$$=-\int\limits_1^{1/3}\frac{dt}{t^2\dfrac{1}{t}\sqrt{\dfrac{1}{t^2}+\dfrac{5}{t}+1}}=-\int\limits_1^{1/3}\frac{dt}{\sqrt{t^2+5t+1}}=\left|\begin{matrix} t^2+5t+1= \\ =\left(t+5/2\right)^2-21/4 \end{matrix}\right|=$$

$$=-\int\limits_1^{1/3}\frac{dt}{\sqrt{\left(t+5/2\right)^2-21/4}}=-\int\limits_1^{1/3}\frac{d(t+5/2)}{\sqrt{\left(t+5/2\right)^2-21/4}}=$$

$$=-\ln\left|t+\frac{5}{2}+\sqrt{\left(t+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{21}{4}}\right|\Bigg|_1^{1/3}=-\ln\left|\frac{17}{6}+\sqrt{\left(\frac{17}{6}\right)^2-\frac{21}{4}}\right|+$$

$$+\ln\left|\frac{7}{2}+\sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2-\frac{21}{4}}\right|=\ln\frac{7+2\sqrt{7}}{9}.$$

Ответ: $\int\limits_1^3 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}} = \ln\frac{7+2\sqrt{7}}{9}$.

## 3.13 Интегрирование по частям в определенном интеграле

Если $u(x)$ и $v(x)$ две дифференцируемые на отрезке $[a,b]$ функции с непрерывными на этом отрезке производными $u'(x)$ и $v'(x)$, то справедлива формула интегрирования по частям в определенном интеграле:

$$\int\limits_a^b uv'dx = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b vu'dx \qquad \text{или} \qquad \int\limits_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu,$$

где $uv\Big|_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a)$.

П р и м е р 47. Вычислить интеграл $\int\limits_0^3 arctg\sqrt{x}dx$.

Р е ш е н и е. $\int\limits_0^3 arctg\sqrt{x}dx = \left| \begin{matrix} \sqrt{x}=t, \quad x=t^2, \quad dx=2tdt, \\ x=0 \to t=0, x=3 \to t=\sqrt{3} \end{matrix} \right| =$

$$= 2\int\limits_0^{\sqrt{3}} t\cdot arctgt\cdot dt = \left| \begin{matrix} u = arctg\ t, & du = \dfrac{dt}{1+t^2} \\ dv = tdt, & v = t^2/2 \end{matrix} \right| = 2\left( uv\Big|_0^{\sqrt{3}} - \int\limits_0^{\sqrt{3}} vdu \right) =$$

$$= 2\left( \frac{t^2}{2} arctg\ t \Bigg|_0^{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{t^2dt}{1+t^2} \right) = 2\left( \frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{(t^2+1)-1}{1+t^2}dt \right) =$$

$$= \pi - \int\limits_0^{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)dt = \pi - \left(t - arctg\ t\right)\Big|_0^{\sqrt{3}} =$$

$$= \pi - \sqrt{3} + arctg\sqrt{3} = 4\pi/3 - \sqrt{3}.$$

Ответ: $\int\limits_0^3 arctg\sqrt{x}dx = 4\pi/3-\sqrt{3}$.

П р и м е р 48. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{\pi/6} x\cos^2 xdx$.

Р е ш е н и е. $\int\limits_0^{\pi/6} x\cos^2 xdx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/6} x(1+\cos 2x)dx =$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/6} xdx + \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/6} x\cos 2xdx = \left.\frac{x^2}{4}\right|_0^{\pi/6} + \frac{1}{2}J = \frac{\pi^2}{144} + \frac{1}{2}J.$$

Вычисляем интеграл $J = \int\limits_0^{\pi/6} x\cos 2xdx$ по частям:

$$J = \int\limits_0^{\pi/6} x\cos 2xdx = \left| \begin{array}{ll} u = x, & du = dx, \\ dv = \cos 2xdx, & v = \frac{1}{2}\sin 2x \end{array} \right| = \left.\frac{x}{2}\sin 2x\right|_0^{\pi/6} -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/6} \sin 2xdx = \frac{\pi}{24}\sqrt{3} + \left.\frac{1}{4}\cos 2x\right|_0^{\pi/6} = \frac{\pi}{24}\sqrt{3} - \frac{1}{8} = \frac{\sqrt{3}\pi - 3}{24}.$$

Ответ: $\int\limits_0^{\pi/6} x\cos^2 xdx = \frac{\pi^2 + 3\sqrt{3}\pi - 9}{144}$.

П р и м е р 49. Вычислить интеграл $\int\limits_1^e x\ln^2 xdx$.

Р е ш е н и е. $\int\limits_1^e x\ln^2 xdx =$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = \ln^2 x, & du = 2\ln x\frac{dx}{x}, \\ dv = xdx, & v = x^2/2 \end{array} \right| = \left.\frac{x^2}{2}\ln^2 x\right|_1^e - \int\limits_1^e x\ln xdx = \frac{e^2}{2} - J.$$

Вычисляем интеграл $J$ по частям:

$$J=\int_1^e x\ln x dx=\left|\begin{matrix} u=\ln x, & du=\dfrac{dx}{x} \\ dv=xdx, & v=x^2/2 \end{matrix}\right|=\frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e-\frac{1}{2}\int_1^e xdx=$$

$$=\frac{e^2}{2}-\frac{x^2}{4}\Big|_1^e=\frac{e^2}{2}-\frac{e^2-1}{4}=\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}.$$

Ответ: $\int_1^e x\ln^2 xdx=\frac{e^2}{4}-\frac{1}{4}$.

## 3.14 Несобственные интегралы

Выше рассматривались определенные интегралы, т. е. интегралы на конечном отрезке интегрирования и от интегрируемой на нем функции. Расширим область применения определенного интеграла.

### Несобственные интегралы первого рода (несобственные интегралы по бесконечному промежутку)

*Несобственные интегралы первого рода* – это интегралы, обозначаемые символами $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.

Пусть функция $f(x)$ определена для всех $x\ge a$ и интегрируема на любом отрезке $[a,b]\subset[a,+\infty)$. Если существует конечный $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$, то $\int_a^{+\infty} f(x)dx=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$ и несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *сходится* (называется *сходящимся*). Если $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$ бесконечен или не существует, то несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *расходится*.

Пусть функция $f(x)$ определена для всех $x\le a$ и интегрируема на любом отрезке$[a,b]\subset(-\infty,b]$. Если существует конечный $\lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$, то $\int\limits_{-\infty}^b f(x)dx=\lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$ и несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^b f(x)dx$ *сходится* (называется *сходящимся*). Если $\lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$ бесконечен или не существует, то несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^b f(x)dx$ *расходится*.

Пусть функция $f(x)$ определена для всех $x\in R$ и интегрируема на любом конечном отрезке$[a,b]\subset(-\infty,+\infty)$. Если существует конечный $\lim\limits_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\int\limits_a^b f(x)dx$, то $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\lim\limits_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\int\limits_a^b f(x)dx$ и несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ *сходится* (называется *сходящимся*). Если хотя бы один предел бесконечен или не существует, то несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ *расходится*.

**Формула Ньютона–Лейбница**

Если $F(x)$ первообразная для функции $f(x)$, определенной на $[a,+\infty)$, то

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a),$$

где $F(+\infty) = \lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$. Аналогичные формулы имеют место для других несобственных интегралов первого рода.

**Признаки сходимости для знакопостоянных функций.**

**Признак сравнения**

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены для любого $x \in [a,+\infty)$ и интегрируемы на $[a,b] \subset [a,+\infty)$ и $0 \le f(x) \le g(x)$ для всех $x \in [a,+\infty)$. Тогда: 1) если сходится интеграл $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$, то сходится интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$; 2) если расходится интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, то расходится интеграл $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$.

**Предельный признак сравнения**

Пусть $f(x) \ge 0$, $g(x) \ge 0$ для всех $x \in [a,+\infty)$ и функции $f$ и $g$ интегрируемы на $[a,b] \subset [a,+\infty)$. Тогда, если существует $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = k$, $k \ne 0$, $k \ne \infty$, то интегралы $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

З а м е ч а н и е 1. Для функций, не сохраняющих знак на $[a,+\infty)$, признаки сравнения не применимы.

З а м е ч а н и е 2. Для сходимости $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ **и** $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ необходимо, чтобы функции $f(x)$ и $g(x)$ были бесконечно малыми при $x \to +\infty$.

З а м е ч а н и е 3. На практике функцию $f(x)$ сравнивают чаще всего с функцией $g(x)=1/x^p$, $p>0$.

З а м е ч а н и е 4. Аналогичные признаки можно сформулировать и для промежутков $(-\infty,b]$ и $(-\infty,+\infty)$.

П р и м е р 50. Вычислить или установить расходимость интеграла $\int\limits_1^{+\infty}\frac{arctgxdx}{1+x^2}$.

Р е ш е н и е. Это несобственный интеграл первого рода. Для подынтегральной функции $\frac{arctgx}{1+x^2}$ найдем первообразную: $\int\frac{arctgxdx}{1+x^2}=$ $=\int arctgxd(arctgx)=\frac{(arctgx)^2}{2}$. Для вычисления несобственного интеграла применяем формулу Ньютона–Лейбница:

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{arctgxdx}{1+x^2}=\left.\frac{(arctgx)^2}{2}\right|_1^{+\infty}=$$

$$=\frac{1}{2}\left((arctg\infty)^2-(arctg1)^2\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi^2}{16}\right)=\frac{3\pi^2}{32}.$$

Ответ: интеграл сходится и $\int\limits_1^{+\infty}\frac{arctgxdx}{1+x^2}=\frac{3\pi^2}{32}$.

П р и м е р 51. Вычислить или установить расходимость интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{xdx}{1+x^2}$.

Р е ш е н и е. По определению, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{xdx}{1+x^2}=\int\limits_{-\infty}^{a}\frac{xdx}{1+x^2}+\int\limits_{a}^{+\infty}\frac{xdx}{1+x^2}$. Для подынтегральной функции $\frac{x}{1+x^2}$ найдем первообразную: $\int\frac{xdx}{1+x^2}=$

$=\frac{1}{2}\int\frac{d(1+x^2)}{1+x^2}=\ln\sqrt{1+x^2}$. Так как $\int\limits_{-\infty}^{a}\frac{xdx}{1+x^2}=\ln\sqrt{1+x^2}\Big|_{-\infty}^{a}=$

$=\ln\sqrt{1+a^2}-\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\sqrt{1+x^2}=-\infty$, то интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{xdx}{1+x^2}$ расходится.

Ответ: интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{xdx}{1+x^2}$ расходится.

П р и м е р 52. Вычислить или установить расходимость интеграла $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{arctgxdx}{1+x}$.

Р е ш е н и е. Это несобственный интеграл первого рода. Первообразная для функции $f(x)=\frac{arctgx}{1+x}$ через элементарные функции не выражается. Для установления сходимости или расходимости этого интеграла применим предельный признак сравнения. При $x\to+\infty$ имеем $arctgx\to\pi/2$, поэтому функция $\frac{arctgx}{1+x}$ бесконечно малая и $\frac{arctgx}{1+x}\overset{x\to+\infty}{\sim}\frac{\pi}{2(x+1)}$. Возьмем функцию $g(x)=\frac{\pi}{2(x+1)}$ и рассмотрим несобственный интеграл $\int\limits_{0}^{+\infty}g(x)dx=\frac{\pi}{2}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{x+1}$. Этот интеграл расходится.

Так как $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(arctgx)2(x+1)}{(x+1)\pi}=1$ и $f(x)\ge0$, $g(x)\ge0$ при всех $x\in[0,+\infty)$, то по предельному признаку сравнения оба интеграла: $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{arctgxdx}{1+x}$ и $\frac{\pi}{2}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{x+1}$ ведут себя одинаково, т.е. расходятся.

Ответ: интеграл $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{arctgxdx}{1+x}$ расходится.

## 3.15 Несобственные интегралы второго рода (несобственные интегралы от неограниченных функций)

Пусть: 1) функция $f(x)$ неограничена в точке $b$ на отрезке $[a,b]$, т. е. $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)=\infty$ ($x=b$ – точка разрыва второго рода); 2) $f(x)$ – ограничена на отрезке $[a,b-\varepsilon]$, $\varepsilon>0$, и интегрируема на этом отрезке. Тогда $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ называют *несобственным интегралом от неограниченной функции* (*несобственным интегралом второго рода)* и обозначают $\int\limits_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$. Если предел конечен, то говорят, что несобственный интеграл *сходится* (называется *сходящимся*), а функция $f(x)$ называется *интегрируемой на отрезке* $[a,b]$; если предел равен бесконечности или не существует, то говорят, что несобственный интеграл *расходится* (называется *расходящимся*).

### Формула Ньютона – Лейбница

Если $F(x)$ - первообразная для функции $f(x)$, непрерывной на $[a,b-\varepsilon)$, то $\int\limits_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx=\lim\limits_{\varepsilon\to 0} F(x)\Big|_a^{b-\varepsilon}=\lim\limits_{\varepsilon\to 0} F(b-\varepsilon)-F(a)$,

### Признаки сходимости для знакопостоянных функций

### Признак сравнения

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют на отрезке $[a,b-\varepsilon]$ неравенству $0\le f(x)\le g(x)$ и интегрируемы на этом отрезке, то: 1) если сходится интеграл $\int\limits_a^b g(x)dx$, то сходится интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$; 2) если расходится интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$, то расходится интеграл $\int\limits_a^b g(x)dx$.

**Предельный признак сравнения**

Пусть: 1) $f(x)\geq 0$, $g(x)\geq 0$ для всех $x\in[a,b)$ и $x=b$ - точка разрыва второго рода для функций $f$ и $g$;

2) $f$ и $g$ интегрируемы на $[a,b-\varepsilon]\subset[a,b]$ для любого $\varepsilon>0$. Тогда, если существует $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=k$, $k\neq 0$, $k\neq\infty$, то интегралы $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Если функция $f(x)$ неограничена в точке $a$ на отрезке $[a,b]$ ( $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty$) и интегрируема на $[a+\varepsilon,b]$, то $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$ называют несобственным интегралом от неограниченной функции (несобственным интегралом второго рода) и обозначают $\int\limits_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$. Если функция $f(x)$ – неограничена в точке $c$, $a<c<b$, то несобственным интегралом называют $\int\limits_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)dx+\lim\limits_{\eta\to 0}\int\limits_{c+\eta}^{b} f(x)dx$.

Аналогично, для введенных таким образом несобственных интегралов формулируются понятия сходимости и расходимости интегралов, выводятся формула Ньютона–Лейбница и признаки сходимости.

П р и м е р 52. Вычислить или установить расходимость интеграла $\int\limits_0^{\pi/4} ctgxdx$.

Р е ш е н и е. Это несобственный интеграл второго рода: $\lim\limits_{x\to+0} ctgx=\infty$ – подынтегральная функция неограничена в точке $x=0$.

$$\int_0^{\pi/4} ctgxdx = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos x}{\sin x} dx == \int_0^{\pi/4} \frac{d\sin x}{\sin x} = \ln|\sin x|\|_0^{\pi/4} =$$

$$== \ln\sin\frac{\pi}{4} - \lim_{x\to+0} \ln\sin x = +\infty .$$

Ответ: интеграл расходится.

П р и м е р 53. Вычислить или установить расходимость интеграла $\int_{-1}^{2} \frac{dx}{\sqrt[5]{x-1}}$.

Р е ш е н и е. Подынтегральная функция $\frac{1}{\sqrt[5]{x-1}}$ в точке $x=1\in[-1,2]$ обращается в бесконечность. Поэтому имеем: $\int_{-1}^{2} \frac{dx}{\sqrt[5]{x-1}} = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt[5]{x-1}} + \int_{1}^{2} \frac{dx}{\sqrt[5]{x-1}}$, т. е. два несобственных интеграла.

Рассматриваем каждый из них: $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt[5]{x-1}} =$

$$= \int_{-1}^{1} (x-1)^{-1/5} dx = \frac{5}{4}\sqrt[5]{(x-1)^4}\Big|_{-1}^{1} = \frac{5}{4}(0-\sqrt[5]{16}) .$$

$$\int_{1}^{2} \frac{dx}{\sqrt[5]{x-1}} = \frac{5}{4}\sqrt[5]{(x-1)^4}\Big|_{1}^{2} = \frac{5}{4}(1-0) .$$

Ответ: интеграл сходится и $\int_{-1}^{2} \frac{dx}{\sqrt[5]{x-1}} = \frac{5}{4}\left(1-\sqrt[5]{16}\right)$.

## 3.16 Геометрические приложения определенного интеграла

### Вычисление площади плоской фигуры

| № | Задача | Формула |
|---|---|---|
| 1 | Найти площадь фигуры, ограниченной прямыми $x=a$, $x=b$, $a<b$, и графиками функций $y=y_1(x)$, $y=y_2(x)$, $y_1(x)\le y_2(x)$ для всех $x\in[a,b]$. | $S=\int\limits_a^b\left[y_2(x)-y_1(x)\right]dx$ |
| 2 | Найти площадь фигуры, ограниченной прямыми $y=c$, $y=d$, $c<d$ и графиками функций $x=x_1(y)$, $x=x_2(y)$, $x_1(y)\le x_2(y)$ для всех $y\in[c,d]$. | $S=\int\limits_c^d\left[x_2(y)-x_1(y)\right]dy$ |
| 3 | Найти площадь фигуры, ограниченной прямыми $x=a$, $x=b$, $y=0$ (ось абсцисс) и графиком параметрически заданной функции $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t\in[t_1,t_2]$. | $S=\left\lvert\int\limits_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt\right\rvert$ |
| 4 | Найти площадь фигуры, заданной в полярных координатах $\varphi=\alpha$, $\varphi=\beta$, $\alpha<\beta$ и дугой кривой $\rho=\rho(\varphi)$. | $S=\frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)d\varphi$ |

П р и м е р 54. Вычислить площадь сегмента, отсекаемого прямой $y=-x$ от параболы $y=2x-x^2$ (рис. 3).

Р е ш е н и е. Определим абсциссы точек пересечения $A$ и $B$ параболы и прямой: $\begin{cases} y=2x-x^2, \\ y=-x \end{cases} \Rightarrow 2x-x^2=-x \Rightarrow x^2-3x=0 \Rightarrow x_A=0,\ x_B=3.$

Находим площадь сегмента:

$$S=\int\limits_a^b\left[y_2(x)-y_1(x)\right]dx=\int\limits_0^3\left[(2x-x^2)-(-x)\right]dx=\int\limits_0^3(3x-x^2)dx=$$

$$=\left.\left(\frac{3x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\right|_0^3=\frac{9}{2}$$

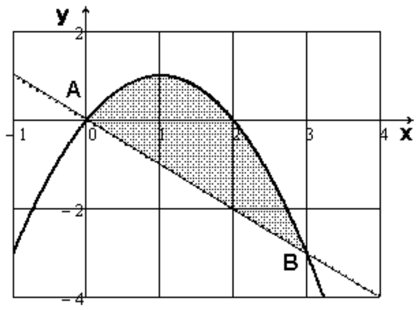


*Рис. 3*

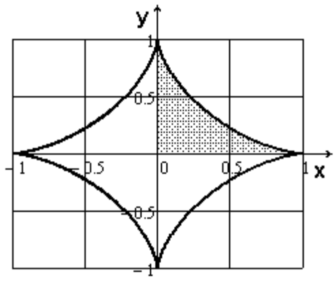


*Рис. 4*

Ответ: $S=\dfrac{9}{2}$.

П р и м е р 55. Вычислить площадь фигуры (рис. 4), ограниченной астроидой: $x=\cos^3 t$, $y=\sin^3 t$, заданной в параметрическом виде.

Р е ш е н и е. Определим площадь $S_1$ четвертой части фигуры (заштрихованная область). Находим значения параметра $t$, соответствующие значениям $x=0$ и $x=1$: $0=\cos^3 t \Rightarrow t=\pi/2$, $1=\cos^3 t \Rightarrow \cos t=1 \Rightarrow t=0$. Вычисляем площадь:

$$S_1=\left|\int\limits_{t_1}^{t_2}y(t)x'(t)dt\right|=\left|\begin{matrix}y=\sin^3 t, x=\cos^3 t,\\ x'=-3\cos^2 t\sin t\end{matrix}\right|=-3\int\limits_{\pi/2}^{0}\sin^3 t\cos^2 t\sin t dt=$$

$$= -3\int\limits_{\pi/2}^{0} \sin^4 t\cos^2 t dt = \left| \begin{array}{l} \sin^4 t\cos^2 t = (\sin^2 t\cos^2 t)\sin^2 t = \\ = \dfrac{\sin^2 2t\sin^2 t}{4} = \dfrac{(1-\cos 4t)(1-\cos 2t)}{16} = \\ = \dfrac{1-\cos 4t-\cos 2t+cos 4t\cos 2t}{16} = \\ = \dfrac{2-2\cos 4t+\cos 6t-\cos 2t}{32} \end{array} \right| .$$

Интегрируем, поменяв местами пределы интегрирования:

$$S_1 = \frac{3}{32}\int\limits_0^{\pi/2} (2-2\cos 4t+\cos 6t-\cos 2t)dt =$$

$$= \frac{3}{32}\left(2t - \frac{\sin 4t}{2} + \frac{\sin 6t}{6} - \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{3\pi}{32}.$$

Ответ: $S = 4S_1 = \dfrac{3\pi}{8}$.

П р и м е р 56. Вычислить площадь фигуры, ограниченной лемнискатой Бернулли $\rho^2 = a^2\cos 2\varphi$ (рис. 5).

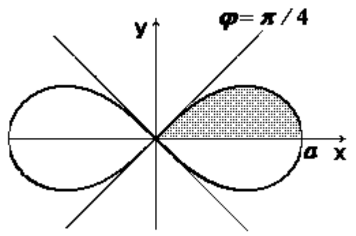


*Рис. 5*

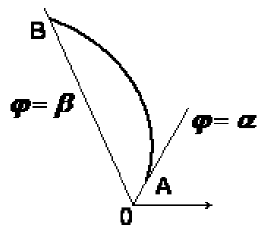


*Рис. 6*

Р е ш е н и е. Для решения задачи необходимо найти отрезок изменения $\varphi$. Его находим из условия существования функции $\rho = |a|\sqrt{\cos 2\varphi}$: $\cos 2\varphi \ge 0$ $\Rightarrow$ $2k\pi - \pi/2 \le 2\varphi \le 2k\pi + \pi/2$ $\Rightarrow$ $\Rightarrow k\pi - \pi/4 \le \varphi \le k\pi + \pi/4$, $k \in Z$. При $k=0$ имеем $-\pi/4 \le \varphi \le \pi/4$, при $k=1$ получаем $-3\pi/4 \le \varphi \le 5\pi/4$. При других значениях $k$ получим множества $\varphi$, не входящие в область изменения $\varphi$: $[0, 2\pi)$ или $[-\pi, \pi)$. Определим площадь $S_1$ четвертой части фигуры (заштрихованная область): $S_1 = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\pi/4} a^2 \cos 2\varphi d\varphi =$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi/4} = \frac{a^2}{4}.$$

Ответ: $S = 4S_1 = a^2$.

**Вычисление длины дуги плоской кривой**

| № | Задача | Формула |
|---|---|---|
| 1 | Найти длину $l$ дуги кривой, если плоская кривая задана графиком функции $y = y(x), x \in [a,b]$ $a < b$, и $y' = y'(x)$ непрерывной на $[a,b]$ | $l = \int\limits_a^b \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx$ |
| 2 | Найти длину $l$ дуги кривой, если плоская кривая задана параметрически $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [t_1, t_2]$ и производные $x'(t)$ и $y'(t)$ непрерывны на $[t_1, t_2]$. | $l = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$ |
| 3 | Найти длину $l$ дуги кривой, если плоская кривая задана в полярных координатах уравнением $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$, $\alpha < \beta$ и производная $\rho'(\varphi)$ непрерывна на $[\alpha, \beta]$. | $l = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2(\varphi) + [\rho'(\varphi)]^2} d\varphi$ |

П р и м е р 57. Вычислить длину дуги кривой $y = \ln x$, расположенной между точками с абсциссами $x = \sqrt{3}$ и $x = \sqrt{8}$.

Р е ш е н и е. Вычисляем $y' = (\ln x)' = 1/x$,

$\sqrt{1 + [y'(x)]^2} = \sqrt{1 + 1/x^2} = \sqrt{1 + x^2} / x$. Длина дуги кривой равна:

$$l=\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\sqrt{1+x^2}\,\frac{dx}{x}=\left|\begin{matrix}1+x^2=t^2,\ \ xdx=tdt,\\ x=\sqrt{3}\to t=2, x=\sqrt{8}\to t=3\end{matrix}\right|=\int\limits_2^3\frac{t^2dt}{t^2-1}=$$

$$=\int\limits_2^3\frac{(t^2-1)+1}{t^2-1}dt=\int\limits_2^3\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt=\left(t+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right)\Bigg|_2^3=$$

$$=\left(3+\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}\right)-\left(2+\frac{1}{2}\ln\frac{1}{3}\right)=1+\ln\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Ответ: $l=1+\ln\sqrt{\frac{3}{2}}$.

П р и м е р 58. Вычислить длину астроиды $x=\cos^3 t$, $y=\sin^3 t$ (рис. 4).

Р е ш е н и е. В силу симметрии кривой находим длину $l_1$ ее четвертой части, расположенной в первом квадранте. Находим: $x'=-3\cos^2 t\sin t$, $y'=3\sin^2 t\cos t$, $[x']^2+[y']^2=$
$=9\left(\cos^4 t\sin^2 t+\sin^4 t\cos^2 t\right)=9\cos^2 t\sin^2 t$. В первом квадранте параметр $t$ меняется от $t=0$ до $t=\pi/2$. Поэтому $l_1=\int\limits_{t_1}^{t_2}\sqrt{[x']^2+[y']^2}\,dt=$

$$=3\int\limits_0^{\pi/2}|\sin t\cos t|\,dt=\left|\begin{matrix}\textit{в первом квадранте}\\ |\sin t\cos t|=\sin t\cos t\end{matrix}\right|=3\int\limits_0^{\pi/2}\sin t\cos t\,dt=$$

$$=3\int\limits_0^{\pi/2}\sin t\,d(\sin t)=3\frac{\sin^2 t}{2}\Bigg|_0^{\pi/2}=\frac{3}{2}.$$

Ответ: $l=4l_1=6$.

П р и м е р 59. Вычислить длину части спирали $\rho=a\varphi$, $a>0$, $\varphi\in[\alpha,\beta]$ (рис. 6).

Р е ш е н и е. $l_{AB}=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\rho^2(\varphi)+[\rho'(\varphi)]^2}\,d\varphi=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{a^2\varphi^2+a^2}\,d\varphi=$

$=a\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\varphi^2+1}\,d\varphi$. Найдем первообразную функции $\sqrt{\varphi^2+1}$, интегрируя по частям: $F(\varphi)=\int\sqrt{\varphi^2+1}\,d\varphi=\left|\begin{matrix} u=\sqrt{\varphi^2+1}, & du=\dfrac{\varphi d\varphi}{\sqrt{\varphi^2+1}} \\ dv=d\varphi, & v=\varphi\end{matrix}\right|=$

$$=\varphi\sqrt{\varphi^2+1}-\int\frac{\varphi^2 d\varphi}{\sqrt{\varphi^2+1}}=\varphi\sqrt{\varphi^2+1}-\int\frac{(\varphi^2+1)-1}{\sqrt{\varphi^2+1}}d\varphi==\varphi\sqrt{\varphi^2+1}-$$

$$-\int\sqrt{\varphi^2+1}\,d\varphi+\int\frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi^2+1}}=\varphi\sqrt{\varphi^2+1}-F(\varphi)+\ln\left|\varphi+\sqrt{\varphi^2+1}\right|.$$

Таким образом, для $F(\varphi)$ получили соотношение:

$$F(\varphi)=\varphi\sqrt{\varphi^2+1}-F(\varphi)+\ln\left|\varphi+\sqrt{\varphi^2+1}\right|,$$

откуда $F(\varphi)=\dfrac{\varphi\sqrt{\varphi^2+1}+\ln\left|\varphi+\sqrt{\varphi^2+1}\right|}{2}$. Поэтому

$$l_{AB}=a\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\varphi^2+1}\,d\varphi=aF(\varphi)\Big|_{\alpha}^{\beta}=$$

$$=a\frac{\beta\sqrt{\beta^2+1}+\ln\left|\beta+\sqrt{\beta^2+1}\right|}{2}-a\frac{\alpha\sqrt{\alpha^2+1}+\ln\left|\alpha+\sqrt{\alpha^2+1}\right|}{2}.$$

## Вычисление объемов тел вращения

| № | Задача | Формула |
|---|---|---|

| | | |
|---|---|---|
| 1 | Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси $Ox$ криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $x=a$, $x=b$, $a<b$, $y=0$ (ось абсцисс) и графиком функции $y=y(x)\geq 0$, $a\leq x\leq b$. | $V_{Ox}=\pi\int\limits_a^b y^2(x)dx$ |
| 2 | Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси $Oy$ криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $x=a$, $x=b$, $a<b$, $y=0$ (ось абсцисс) и графиком функции $y=y(x)\geq 0$, $a\leq x\leq b$. | $V_{Oy}=2\pi\int\limits_a^b xy(x)dx$ |
| 3 | Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси $Oy$ трапеции, ограниченной прямыми $y=c$, $y=d$, $c<d$, $x=0$ (ось ординат) и графиком функции $x=x(y)\geq 0$, $c\leq y\leq d$. | $V_{Oy}=\pi\int\limits_c^d x^2(y)dy$ |

П р и м е р 60. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной кривыми $y=4x-x^2$ и $y=x$ (рис. 7), вокруг оси $Ox$.

Р е ш е н и е. Найдем абсциссы точек пересечения кривых из системы уравнений: $\begin{cases} y=4x-x^2, \\ y=x. \end{cases} \Rightarrow x^2-3x=0 \Rightarrow x=0,\ x=3$.

Объем тела, образованного вращением вокруг оси $Ox$ заштрихованной фигуры ищется как разность объемов тел вращения, полученных вращением фигуры $OCAB$ и треугольника $OAB$:

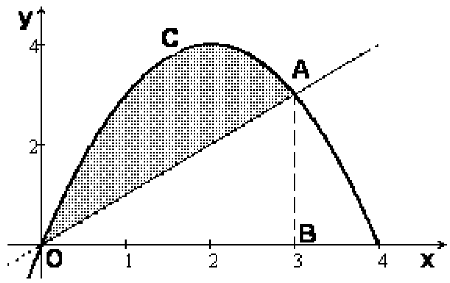


*Рис. 7*

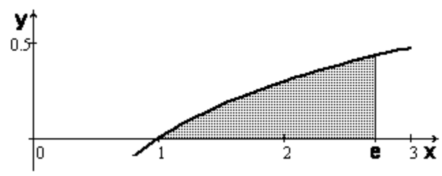


*Рис. 8*

$$V_{Ox}=\pi\int_0^3\left[\left(4x-x^2\right)^2-x^2\right]dx=\pi\int_0^3(15x^2-8x^3+x^4)dx=$$

$$=\pi\left(5x^3-2x^4+\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^3=21{,}6\pi.$$

Ответ: $V_{Ox}=21{,}6\pi$.

П р и м е р 61. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси ординат криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $x=1$, $x=e$, $y=0$ и кривой $y=\ln x$ (рис. 8).

Р е ш е н и е. Используя формулу $V_{Oy}=2\pi\int\limits_a^b xy(x)dx$, находим: $V_{Oy}=2\pi\int\limits_1^e x\ln x dx$. Этот интеграл был вычислен в примере 52: $\int\limits_1^e x\ln x dx=\frac{e^2+1}{4}$.

Ответ: $V_{Oy}=2\pi\frac{e^2+1}{4}=\pi\frac{e^2+1}{2}$.