Теоретические материалы.

Тема 2 Дифференциальное исчисление функций одной переменной

2.1 Определение производной и дифференциала. Таблица производных

1. Производной функции $y=f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что последнее стремится к нулю, т.е.

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

где $\Delta y=f\left(x\right)-f\left(x_0\right)$- приращение функции, $\Delta x=x-x_0$ - приращение аргумента.

Обозначается производная: $f'(x_0)$, $y'(x_0)$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dy}{dx}(x_0)$, $f_x'(x_0)$, f_x'.

2.Операция вычисления производной функции называется *дифференцированием*, если функция имеет производную в точке x_0, то *говорят, что функция дифференцируема в точке* x_0. Функция, дифференцируемая в каждой точке интервала (a,b), называется *дифференцируемой на интервале* (a,b).

3. Если функция $y=f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, а приращение Δy функции $y=f(x)$ в точке x_0 представимо в виде $\Delta y=A\Delta x+\alpha(\Delta x)\Delta x$, где A- постоянная, не зависящая от Δx, а $\alpha(\Delta x)$ – бесконечно малая функция при $\Delta x\to 0$, то функция $f(x)$ называется *дифференцируемой в точк*е x_0.

4. *Дифференциалом функции* $y=f(x)$ в точке x_0 называется главная линейная часть приращения функции в точке x_0 (произведение $A\Delta x$) и обозначается $df(x_0)$, df или dy.

Т е о р е м а 1. Для того чтобы функция $y = f(x)$ была дифференцируемой в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы эта функция имела в этой точке производную. При этом дифференциал и производная связаны равенством $dy = f'(x_0)dx$.

Основные правила дифференцирования

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ - функции, дифференцируемые в некоторой точке x_0, C– const (постоянная величина), тогда:

1) $C' = 0$

2) $(u+v)' = u' + v'$

3) $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$, $\quad (C \cdot u)' = C \cdot u'$

4) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

5) Пусть y - сложная функция, т.е. $y = f(u)$, $u = u(x)$ или $y = f(u(x))$,

где f - внешняя функция, u - внутренняя функция.

Производная сложной функции равна произведению производной внешней функции в своей точке на производную внутренней функции $(f(u))'_x = f'_u \cdot u'_x$.

Таблица производных

№		
1	$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$	$(u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$
2	$(a^x)' = a^x \ln a$	$(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$
3	$(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = e^u \cdot u'$
4	$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$	$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a}$

5	$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	$(\ln u)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$
6	$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
7	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
8	$(\mathrm{tg}\, x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$(\mathrm{tg}\, u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
9	$(\mathrm{ctg}\, x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$(\mathrm{ctg}\, u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$
10	$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
11	$(\arccos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos u)' = \dfrac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$
12	$(\mathrm{arctg}\, x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$	$(\mathrm{arctg}\, u)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$
13	$(\mathrm{arcctg}\, x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$	$(\mathrm{arcctg}\, u)' = \dfrac{-u'}{1+u^2}$

Если $u = x$, то $u' = x' = 1$.

2.2 Техника вычисления производных

П р и м е р 1. Вычислить производную функции

$$y = 6\sqrt{x} + \frac{x}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{4}{x^2} + 6x - x^2 + 4.$$

Р е ш е н и е. Преобразуем функцию, введя дробные и отрицательные показатели $y = 6 \cdot x^{\frac{1}{2}} + x^{1-\frac{2}{3}} - 4 \cdot x^{-2} + 6x - x^2 + 4$. Вычислим производную, используя правила 2,3 и формулу 1).

$$y' = 6\cdot\left(x^{\frac{1}{2}}\right)' + \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' - 4\cdot\left(x^{-2}\right)' + 6(x)' - \left(x^{2}\right)' + (4)' =$$

$$= 6\cdot\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} + \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} - 4\cdot\left(-2x^{-2-1}\right) + 6 - 2\cdot x^{2-1} =$$

$$= 3\cdot x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + 8\cdot x^{-3} + 6 - 2x = \frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{x^2}} + \frac{8}{x^3} - 2x + 6.$$

Ответ. $\left(6\sqrt{x} + \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{4}{x^2} + 6x - x^2 + 4\right)' = \dfrac{3}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{3\cdot\sqrt[3]{x^2}} + \dfrac{8}{x^3} - 2x + 6.$

П р и м е р 2. Вычислить производную функции $y = \dfrac{4\sqrt{x} - 1}{tg\, x}$.

Р е ш е н и е. Применим правило 4 и формулы 1) и 8):

$$y' = \frac{\left(4\sqrt{x} - 1\right)' \cdot tg\, x - (tg\, x)' \cdot \left(4\sqrt{x} - 1\right)}{tg^2\, x} =$$

$$= \frac{4\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\cdot tg\, x - \frac{1}{\cos^2 x}\cdot\left(4\sqrt{x} - 1\right)}{tg^2\, x} = \frac{\frac{2}{\sqrt{x}}\cdot\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{4\sqrt{x} - 1}{\cos^2 x}}{tg^2 x} =$$

$$= \frac{\left(2\sin x\cdot\cos x - 4 + \sqrt{x}\right)\cos^2 x}{\sqrt{x}\cdot\cos^2 x\cdot\sin^2 x} = \frac{\sin 2x + \sqrt{x} - 4}{\sqrt{x}\cdot\sin^2 x}.$$

Ответ. $\left(\dfrac{4\sqrt{x} - 1}{tg\, x}\right)' = \dfrac{\sin 2x + \sqrt{x} - 4}{\sqrt{x}\cdot\sin^2 x}.$

П р и м е р 3. Вычислить производную функции $y = \dfrac{x^3 + e^x \sin x}{5\ln x}$.

Р е ш е н и е.

$$y'=\left(\frac{x^3+e^x\sin x}{5\ln x}\right)'=\frac{1}{5}\left(\frac{x^3+e^x\sin x}{\ln x}\right)'=$$

$$=\frac{1}{5}\frac{\left(x^3+e^x\sin x\right)'\ln x-(\ln x)'\left(x^3+e^x\sin x\right)}{\ln^2 x}=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\left(x^3+e^x\sin x\right)'=\left(x^3\right)'+\left(e^x\sin x\right)'=\left(x^3\right)'+\left(e^x\right)'\sin x+e^x(\sin x)'=\\ \qquad =3x^2+e^x\sin x+e^x\cos x,\\ \qquad\qquad (\ln x)'=\dfrac{1}{x}\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{5}\frac{\left(3x^2+e^x\sin x+e^x\cos x\right)\ln x-\frac{1}{x}\left(x^3+e^x\sin x\right)}{\ln^2 x}.$$

Ответ.

$$\left(\frac{x^3+e^x\sin x}{5\ln x}\right)'==\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{\ln^2 x}\cdot\left[\left(3x^2+e^x\sin x+e^x\cos x\right)\ln x-\frac{1}{x}\left(x^3+e^x\sin x\right)\right]$$

П р и м е р 4. Вычислить производную функции $y=3^x\cdot(\log_3 x-x)$..

Р е ш е н и е. Применим правило 4 и формулы 2) и 4):

$$y'=\left(3^x\right)'\cdot(\log_3 x-x)-3^x\cdot(\log_3 x-x)'=3^x\cdot\ln 3(\log_3 x-3)-3^x\cdot\left(\frac{1}{x\ln 3}-1\right)=$$

$$=\frac{3^x\cdot\left(x\ln^2 3\cdot\log_3 x-3\cdot x\ln^2 3-1+x\ln 3\right)}{x\ln 3}.$$

Ответ. $\left(3^x\cdot(\log_3 x-x)\right)'=\dfrac{3^x\cdot\left(x\ln^2 3\cdot\log_3 x-3\cdot x\ln^2 3-1+x\ln 3\right)}{x\ln 3}$.

П р и м е р 5. Вычислить производную функции $y=2x\cdot\sqrt{x}+\ln\sin x+4^{3x}$.

Р е ш е н и е. Используем правила 2 и 3, применим теорему о производной сложной функции и по таблице производных имеем:

$$y' = 2\left(x^{\frac{3}{2}}\right)' + (\ln\sin x)' + \left(4^{3x}\right)' = 2\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sin x}\cdot(\sin x)' + 4^{3x}\cdot\ln 4\cdot(3x)' =$$

$$= 3\sqrt{x} + \frac{1}{\sin x}\cdot\cos x + 4^{3x}\cdot\ln 4\cdot 3 = 3\sqrt{x} + ctgx + 3\ln 4\cdot 4^{3x}.$$

Ответ. $\left(2x\cdot\sqrt{x} + \ln\sin x + 4^{3x}\right)' = 3\sqrt{x} + ctgx + 3\ln 4\cdot 4^{3x}$.

П р и м е р 6. Вычислить производную функции $y = 7^{arcctg\, x - \sqrt{x}}$.

Р е ш е н и е. Воспользуемся формулой 2):

$$y' = 7^{arcctg\, x-\sqrt{x}}\cdot\ln 7\cdot\left(arcctgx - \sqrt{x}\right)' = 7^{arcctgx-\sqrt{x}}\cdot\ln 7\left(\frac{-1}{1+x^2} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right) =$$

$$= -7^{arcctg\, x-\sqrt{x}}\cdot\ln 7\cdot\frac{2\sqrt{x}+1+x^2}{2\left(1+x^2\right)\sqrt{x}}.$$

Ответ. $\left(7^{arcctg\, x-\sqrt{x}}\right)' = -7^{arcctg\, x-\sqrt{x}}\cdot\ln 7\cdot\dfrac{2\sqrt{x}+1+x^2}{2\left(1+x^2\right)\sqrt{x}}$.

П р и м е р 7. Вычислить производную функции $y = \sqrt{\sin^2 4x - x^2}$.

Р е ш е н и е. $y' = \left(\left(\sin^2 4x - x^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\left(\sin^2 4x - x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(\sin^2 4x - x^2\right)' =$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\sin^2 4x - x^2}}\cdot\left(2\sin 4x\cdot(\sin 4x)' - 2x\right) = \frac{2\sin 4x\cdot\cos 4x\cdot 4 - 2x}{2\sqrt{\sin^2 4x - x^2}} =$$

$$= \frac{4\sin 8x - 2x}{2\sqrt{\sin^2 4x - x^2}} = \frac{2\sin 8x - x}{\sqrt{\sin^2 4x - x^2}}.$$

Ответ. $\left(\sqrt{\sin^2 4x - x^2}\right)' = \dfrac{2\sin 8x - x}{\sqrt{\sin^2 4x - x^2}}$.

Особое внимание необходимо обратить на пример следующего вида.

П р и м е р 8. Вычислить производную функции $y = (\sin x)^{\cos x}$.

Р е ш е н и е. Указанная функция относится к типу $f(x)^{g(x)}$ и называется степенно – показательной функцией. Она сочетает в себе признаки и степенной функции и показательной. <u>*Такой функции нет в таблице производных*</u>. Для вычисления ее производной необходимо, прежде всего, преобразовать функцию, используя свойство логарифмической функции: $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$. Тем самым, функция превратилась в сложную показательную функцию, от которой уже можно находить производную. В нашем примере получим $y = (\sin x)^{\cos x} = \; = e^{\cos x \cdot \ln \sin x}$. Поэтому:

$$y' = e^{\cos x \cdot \ln \sin x}(\cos x \ln \sin x)' =$$

$$= e^{\cos x \cdot \ln \sin x}\left(-\sin x \ln \cos x + \cos x \frac{\cos x}{\sin x}\right) =$$

$$= (\sin x)^{\cos x} \cdot \frac{\cos^2 x - \sin^2 x \ln \sin x}{\sin x}.$$

В некоторых случаях для вычисления производных применяется метод логарифмического дифференцирования.

П р и м е р 9. Вычислить производную функции $y = \dfrac{\sqrt[3]{x+7} \cdot (x-6)^5}{\sqrt[4]{x-4} \cdot \sqrt{x+1}}$.

Р е ш е н и е. Если попытаться находить производную «напрямую» от этой функции, возникнут столь громоздкие выражения, в которых легко сделать ошибки. Можно существенно упростить задачу, воспользовавшись свойствами логарифма. Для этого, прежде всего, прологарифмируем заданную функцию:

$$\ln y=\ln\frac{\sqrt[3]{x+7}\cdot(x-6)^5}{\sqrt[4]{x-4}\cdot\sqrt{x+1}}=\left|\ln\frac{a}{b}=\ln a-\ln b\right|=$$

$$=\ln\left[\sqrt[3]{x+7}\cdot(x-6)^5\right]-\ln\left[\sqrt[4]{x-4}\cdot\sqrt{x+1}\right]=\left|\begin{array}{l}\ln(ab)=\ln a+\ln b,\\ \ln a^b=b\ln a\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{3}\ln(x+7)+5\ln(x-6)-\frac{1}{4}\ln(x-4)-\frac{1}{2}\ln(x+1).$$

Таким образом, $\ln y=\frac{1}{3}\ln(x+7)+5\ln(x-6)-\frac{1}{4}\ln(x-4)-\frac{1}{2}\ln(x+1)$. Теперь дифференцируем это равенство по переменной x. В левой части:

$$\left(\ln y\right)'_x=\left|\begin{array}{c}\text{учитывая, что у зависит от } x: y(x),\\ \text{получаем в скобке сложную функцию}\end{array}\right|=$$

$$=\left(\ln y(x)\right)'_x=\frac{1}{y(x)}\cdot y'=\frac{y'}{y}.$$

В правой части: $\left(\frac{1}{3}\ln(x+7)+5\ln(x-6)-\frac{1}{4}\ln(x-4)-\frac{1}{2}\ln(x+1)\right)'=$

$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+7}+5\cdot\frac{1}{x-6}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x-4}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1}$. Получаем равенство:

$\frac{y'}{y}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+7}+5\cdot\frac{1}{x-6}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x-4}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1}$. Отсюда, находим

$$y'=y\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+7}+5\cdot\frac{1}{x-6}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x-4}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1}\right)=\left|\begin{array}{c}\text{так как}\\ y=\frac{\sqrt[3]{x+7}\cdot(x-6)^5}{\sqrt[4]{x-4}\cdot\sqrt{x+1}}\end{array}\right|=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{x+7}\cdot(x-6)^5}{\sqrt[4]{x-4}\cdot\sqrt{x+1}}\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+7}+5\cdot\frac{1}{x-6}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x-4}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1}\right).$$

Ответ: $y'=\frac{\sqrt[3]{x+7}\cdot(x-6)^5}{\sqrt[4]{x-4}\cdot\sqrt{x+1}}\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+7}+5\cdot\frac{1}{x-6}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x-4}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1}\right)$.

2.3. Вычисление производных высших порядков. Производные параметрически заданных функций и функций заданных неявно

5. Пусть функция $f(x)$ имеет производную во всех точках интервала (a,b). Тогда на (a,b) определена новая функция $f'(x)$. Если функция $f'(x)$ дифференцируема в точке $x_0 \in (a,b)$, то ее производная называется *второй производной* или *производной второго порядка* функции $f(x)$ *в точке* x_0 и обозначается $f''(x_0)$ или $\frac{d^2y}{dx^2}$. Аналогично, вводятся производные третьего и последующего порядков.

П р и м е р 10. Вычислить вторую производную функции $y = x^2 \sin 2x$.

Р е ш е н и е. Вычисляем первую производную: $y' = \left(x^2 \sin 2x\right)' =$

$= 2x\sin 2x + 2x^2 \cos 2x$. От полученной функции находим еще раз производную: $y'' = \left(2x\sin 2x + 2x^2\cos 2x\right)' =$

$$= 2\left(x\sin 2x\right)' + 2\left(x^2\cos 2x\right)' = 2\sin 2x + 4x\cos 2x + 4x\cos 2x - -4x^2\sin 2x.$$

Ответ: $y'' = \left(x^2\sin 2x\right)'' = 2\left(\sin 2x + 4x\cos 2x - 2x^2\sin 2x\right)$.

6. Пусть $x = x(t)$, $y = y(t)$ – функции, определенные на некотором отрезке $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, причем функция $x = x(t)$ непрерывна и строго монотонна. Тогда на отрезке $[a,b]$, где $a = x(t_0 - \delta), b = x(t_0 + \delta)$, определена функция $t = t(x)$, обратная к функции $x = x(t)$, непрерывная и строго монотонная. Пусть также существуют $x'(t_0)$ и $y'(t_0)$, причем $x'(t_0) \neq 0$. Тогда сложная функция $y = y(t) = y(t(x))$ дифференцируема по x в точке $x_0 = x(t_0)$. Функцию $y = y(t(x))$ называют *параметрически заданной* уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$. По правилу дифференцирования сложной функции имеем

$\frac{dy}{dx} = y'_x = y'_t t'_x$, где согласно правилу дифференцирования обратной функции, $t'_x = 1/x'_t$. Следовательно, справедлива следующая формула

$$\begin{cases} y'_x = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'_t}{x'_t}, \\ x = x(t). \end{cases} \tag{1}$$

Рассмотрим теперь функции $x = x(t)$ и $z(t) = y'_x(t)$. Если для этой функции выполняются все выше сформулированные условия, то из формулы (1) найдем $\frac{dz}{dx} = \frac{z'_t}{x'_t}$ или

$$\begin{cases} y''_{xx} = \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t}, \\ x = x(t). \end{cases} \tag{2}$$

П р и м е р 11. Вычислить вторую производную функции, заданной параметрическими уравнениями $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 < |t| < \pi$.

Р е ш е н и е. Вычисляем производные первого порядка: $x'_t = -\sin t$, $y'_t = \cos t$ и по формуле (1) находим $y'_x = -\frac{\cos t}{\sin t} = -\operatorname{ctg} t$. Далее $\left(y'_x\right)'_t = \left(-\operatorname{ctg} t\right)' = \frac{1}{\sin^2 t}$. Из формулы (2) находим $y''_{xx} = -\frac{1}{\sin^3 t}$.

7. Если дифференцируемая функция $y = y(x)$ задана неявно уравнением $F(x, y) = 0$, то производная $y' = y'(x)$ этой *неявной функции* может быть найдена из уравнения $\frac{d}{dx}F(x, y(x)) = 0$, где $F(x, y(x))$ рассматривается как сложная функция переменной x.

П р и м е р 12. Вычислить вторую производную функции, заданной неявно уравнением $x^2+y^2=1,\ -1<x<1,\ y>0$.

Р е ш е н и е. Здесь $F(x,y(x))=x^2+\left(y(x)\right)^2-1=0$. Будем дифференцировать по x равенство $x^2+y^2=1$, помня, что $y=y(x)$. Получим $2x+2yy'=0$. Решая это уравнение относительно y', находим $y'=-\dfrac{x}{y}$. Далее, дифференцируем по x полученное равенство еще раз:

$y''=\left(-x/y\right)'=-\dfrac{x'y-xy'}{y^2}=-\dfrac{y-xy'}{y^2}$. Подставив первую производную,

получим: $y''=-\dfrac{y+x^2/y}{y^2}$. Принимая во внимание, что $x^2+y^2=1$,

приходим к ответу: $y''=-1/y^3$.

2.4 Вычисление пределов при помощи правила Лопиталя

При вычислении предела отношения $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ при $x\to a$ в случае, когда функции f и g одновременно являются либо бесконечно малыми, либо бесконечно большими, иногда удобно применить так называемое «правило Лопиталя», позволяющее заменять предел отношения функций пределом отношения их производных. Правило Лопиталя позволяет раскрывать неопределенности вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ и $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$.

Т е о р е м а *Лопиталя.* Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в некоторой окрестности точки x_0 и $g'(x)\neq 0$ в этой окрестности. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ являются одновременно бесконечно малыми при

$x \to x_0$ (либо бесконечно большими при $x \to x_0$) и существует $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$,

то существует $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ и имеет место равенство

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \qquad (3)$$

П р и м е р 13. Вычислить предел $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^a}$, $a > 0$.

Р е ш е н и е. Данный предел имеет неопределенность $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. Применяем формулу (3): $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^a} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\ln x)'}{(x^a)'} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1/x}{ax^{a-1}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{ax^a} = 0$. Ответ: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^a} = 0$.

П р и м е р 14. Вычислить предел $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{-1/x^2}}{x^4}$.

Р е ш е н и е. Пример имеет неопределенность $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Можно применять правило Лопиталя. Однако вычисление упростится, если перед этим произведем замену: $t = 1/x^2$, $x \to 0 \Leftrightarrow t \to +\infty$. В результате получим следующую цепочку вычислений:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x^4} = \lim_{t \to +\infty} \frac{t^2}{e^t} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{t \to +\infty} \frac{\left(t^2\right)'}{\left(e^t\right)'} = \lim_{t \to +\infty} 2\frac{t}{e^t} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \left|\begin{matrix}\text{снова применяем} \\ \text{правило Лопиталя}\end{matrix}\right| = 2\lim_{t \to +\infty} \frac{(t)'}{\left(e^t\right)'} = 2\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{e^t} = 0.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-1/x^2}}{|x|^4}=0$.

Этот пример интересен тем, что показывает возможность применения правила Лопиталя несколько раз. Кроме того, при вычислении пределов важно уметь сочетать различные методы. Это значительно облегчает решение задачи.

П р и м е р 15. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to +0} x\ln x$.

Р е ш е н и е. Здесь возникает неопределенность вида $\left[0\cdot\infty\right]$.

Непосредственно применять правило Лопиталя нельзя. Необходимо преобразовать функцию так, чтобы получилась требуемая неопределенность.

Возможны два варианта преобразования: либо $x\ln x=\dfrac{x}{1/\ln x}$, либо

$x\ln x=\dfrac{\ln x}{1/x}$. В первом случае будет неопределённость вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, а во втором

– $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ (проверьте). В обоих случаях можно применять правило Лопиталя.

Какой вариант выбрать? Если пойдем по первому варианту, то получим

$$\lim_{x\to +0} x\ln x=\lim_{x\to +0}\frac{x}{1/\ln x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$\lim_{x\to +0}\frac{x'}{\left(1/\ln x\right)'}=-\lim_{x\to +0}\frac{x}{1/\ln^2 x}=-\lim_{x\to +0} x\ln^2 x=\left[0\cdot\infty\right].$$ Неопределенность не устранилась. Более того, функция сделалась более сложной, чем исходная.

Испытаем второй вариант: $\lim\limits_{x\to +0} x\ln x=$

$$=\lim_{x\to +0}\frac{(\ln x)'}{\left(1/x\right)'}=-\lim_{x\to +0}\frac{1}{x\left(1/x^2\right)}=-\lim_{x\to +0}\frac{x^2}{x}=0.$$ Мы получили

Ответ: $\lim\limits_{x\to +0} x\ln x=0$.

Возникшая ситуация (перебор различных вариантов) – типичная для неопределенностей вида $\left[0\cdot\infty\right]$.

П р и м е р 16. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 1} x^{1/(1-x)}$.

Р е ш е н и е. Здесь возникает неопределенность вида $\left[1^{\infty}\right]$. Преобразуем функцию, добиваясь нужной неопределенности: $\lim\limits_{x\to 1} x^{1/(1-x)} = \lim\limits_{x\to 1} e^{\frac{\ln x}{1-x}}$. В показателе имеем теперь функцию $\dfrac{\ln x}{1-x}$, которая при $x\to 1$ приводит к неопределенности вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Поэтому $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{1-x} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(\ln x)'}{(1-x)'} = -\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x} = -1$, следовательно $\lim\limits_{x\to 1} e^{\frac{\ln x}{1-x}} = e^{-1}$.

Таким же методом раскрываются неопределённости вида $\left[0^0\right]$ и $\left[\infty^0\right]$.

2.5 Исследование функций. Основные определения и теоремы

Асимптоты. Если выполнено хотя бы одно из условий $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=\infty$, то прямую $x=x_0$ называют *вертикальной асимптотой графика функции* $y=f(x)$. Следовательно, вертикальную асимптоту необходимо искать в тех точках, в которых функция $y=f(x)$ не определена или на границах области определения функции.

Прямую $y=kx+b$ называют *наклонной асимптотой графика функции* $y=f(x)$ при $x\to\pm\infty$, если $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-(kx+b)\right)=0$. В частности, если $k=0$, то прямую $y=b$ называют горизонтальной асимптотой.

На рис. 1 приведен график функции

$$y = \frac{x^2+4}{2(x-1)} + \frac{3}{2}\frac{e^{\sin 8x}}{x^2+1},$$

имеющий вертикальную ($x=1$) и наклонную ($y = x/2$) асимптоты.

На рис. 2 функция $y = \dfrac{x^2}{2\left(|x|-1\right)}$ имеет две наклонные асимптоты: $y = x/2$ и $y = -x/2$ и две вертикальные: $x=-1$ и $x=1$.

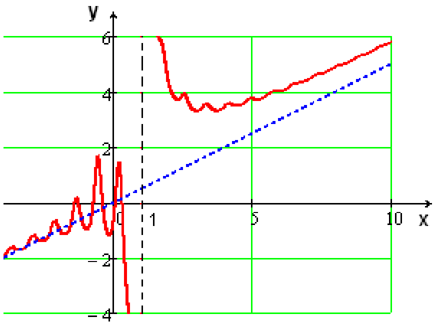


Рис.1

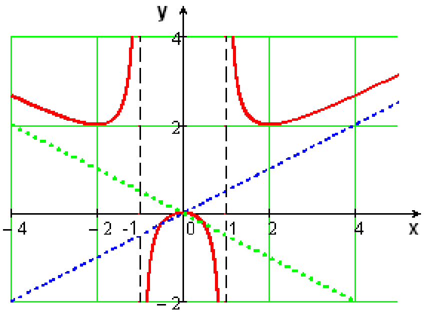


Рис. 2

Т е о р е м а 2. Для того чтобы прямая $y = kx + b$ была наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$), необходимо и достаточно, чтобы существовали конечные пределы $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k$,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-kx\right)=b, \left(\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=k, \ \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-kx\right)=b\right).$$

<u>Интервалы монотонности.</u> Пусть функция $f(x)$ определена на интервале (a,b).

Функция $f(x)$ называется:

а) *возрастающей (неубывающей) на интервале* (a,b), если

$$\forall x_1, x_2 \in (a,b): x_1 < x_2 \to f(x_1) \le f(x_2), \tag{4}$$

б) *строго возрастающей на интервале* (a,b), если

$$\forall x_1, x_2 \in (a,b): x_1 < x_2 \to f(x_1) < f(x_2), \tag{5}$$

в) *убывающей (невозрастающей) на интервале* (a,b), если

$$\forall x_1, x_2 \in (a,b): x_1 < x_2 \to f(x_1) \geq f(x_2), \tag{6}$$

г) *строго убывающей на интервале* (a,b), если

$$\forall x_1, x_2 \in (a,b): x_1 < x_2 \to f(x_1) > f(x_2). \tag{7}$$

Убывающие и возрастающие функции объединяют названием *монотонные*, а строго возрастающие и строго убывающие – названием *строго монотонные.*

Т е о р е м а 3.

1) Для того чтобы дифференцируемая на (a,b) функция $f(x)$ была возрастающей на этом интервале, необходимо и достаточно, чтобы $f'(x) \geq 0$ при всех $x \in (a,b)$.

2) Для того чтобы дифференцируемая на (a,b) функция $f(x)$ была убывающей на этом интервале, необходимо и достаточно, чтобы $f'(x) \leq 0$ при всех $x \in (a,b)$.

3) Если $\forall x \in (a,b)$ выполняется условие $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$), то функция $f(x)$ строго возрастает (строго убывает) на интервале (a,b).

<u>Точки экстремума.</u> Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и выполнено одно из следующих условий:

$$\forall x \in U_\delta(x_0) \to f(x) \geq f(x_0), \tag{8}$$

или

$$\forall x \in U_\delta(x_0) \to f(x) \leq f(x_0). \tag{9}$$

Тогда говорят, что функция $f(x)$ имеет в точке x_0 *локальный экстремум*, причем в случае (8) x_0 называется точкой *локального минимума*, а в случае (9) – точкой *локального максимума*. Если в условиях (8), (9) заменить нестрогие неравенства на строгие, то точка x_0 называется точкой *строгого минимума* или *строгого максимума*, соответственно.

Т е о р е м а Ферма. Если функция $f(x)$ имеет локальный экстремум в точке x_0 и дифференцируема в этой точке, то $f'(x_0)=0$.

Необходимое условие точек экстремума. Из теоремы Ферма следует, что если $f(x)$ дифференцируема во всех точках интервала (a,b), то экстремум следует искать среди тех точек, в которых $f'(x)=0$. Такие точки называются *стационарными точками*. Однако, существуют экстремумы в таких точках, в которых функция $f(x)$ непрерывна, но $f'(x)$ не существует. Например, функция $y=|x|$ имеет в точке $x=0$ минимум, хотя производная в этой точке не существует. Точки, в которых функция $f(x)$ непрерывна, а ее производная либо равна нулю, либо не существует, называются *критическими точками*. Таким образом, *необходимое условие экстремума* состоит в том, что *точки экстремума функции $f(x)$ содержатся только среди ее критических точек.*

Первое достаточное условие строгого экстремума. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой проколотой окрестности точки x_0 и непрерывна в точке x_0. Тогда:

1) Если $f'(x)$ меняет знак с минуса на плюс при переходе через точку x_0, то x_0 – точка строгого минимума функции $f(x)$;

2) Если $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус при переходе через точку x_0, то x_0 – точка строгого максимума функции $f(x)$.

Второе достаточное условие строгого экстремума. Пусть x_0 – стационарная точка функции $f(x)$, т.е. $f'(x_0)=0$, и пусть существует $f''(x_0)$. Тогда:

1) Если $f''(x_0)>0$, то x_0 – точка строгого минимума функции $f(x)$;

2) Если $f''(x_0)<0$, то x_0 – точка строгого максимума функции $f(x)$.

Выпуклость функции. Непрерывная функция $y=f(x)$ называется:

а) *выпуклой вверх на отрезке* $[a,b]$ (рис. 3), если

$$\forall x_1, x_2 \in [a,b] \to f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}; \tag{10}$$

б) *выпуклой вниз на отрезке* $[a,b]$ (рис. 4), если

$$\forall x_1, x_2 \in [a,b] \to f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}. \tag{11}$$

Если неравенства (10), (11) являются строгими при любых $x_1, x_2 \in [a,b]$ таких, что $x_1 \neq x_2$, то функция $y = f(x)$ называется *строго выпуклой вверх на отрезке* $[a,b]$ или строго выпуклой вниз на отрезке $[a,b]$, соответственно.

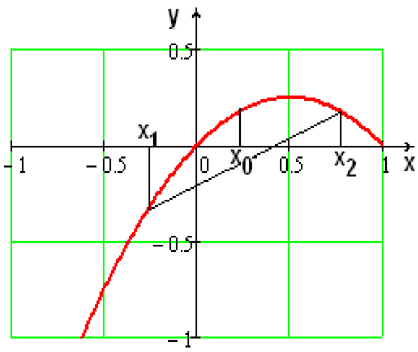


Рис.3

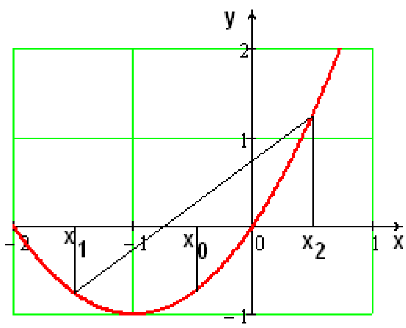


Рис. 4

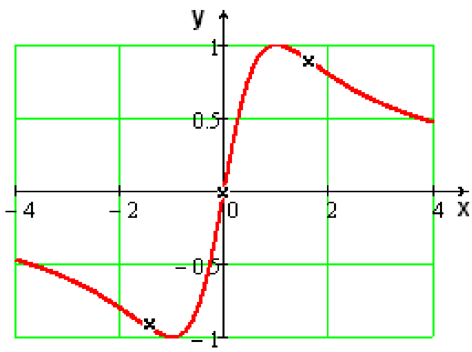


Рис. 5

<u>Достаточные условия выпуклости</u>. Пусть $f'(x)$ существует на отрезке $[a,b]$, а $f''(x)$ существует на интервале (a,b). Тогда:

1) Если $\forall x \in (a,b) \to f''(x) \geq 0$, то функция $y = f(x)$ выпукла вниз на отрезке $[a,b]$;

2) Если $\forall x \in (a,b) \to f''(x) \le 0$, то функция $y = f(x)$ выпукла вверх на отрезке $[a,b]$;

3) Если $\forall x \in (a,b) \to f''(x) > 0$ $(f''(x) < 0)$, то функция $y = f(x)$ строго выпукла вниз (вверх) на отрезке $[a,b]$.

Точки перегиба графика функции. Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и имеет в этой точке либо конечную, либо бесконечную производную. Тогда, если эта функция при переходе через точку x_0 меняет направление выпуклости, то x_0 называют *точкой перегиба функции* $y = f(x)$.

На рис. 5 изображен график функции $y = \dfrac{2x}{x^2+1}$, имеющей три точки перегиба: $x = -\sqrt{3}$, $x = 0$ и $x = \sqrt{3}$. На графике они отмечены крестиками.

Необходимое условие наличия точки перегиба. Если x_0 – точка перегиба функции $f(x)$ и если функция $f(x)$ имеет в некоторой окрестности точки x_0 вторую производную, непрерывную в точке x_0, то $f''(x_0) = 0$.

Из этой теоремы следует, что точки перегиба ищутся среди тех точек, в которых $f''(x) = 0$. Однако существуют точки перегиба и там, где функция определена, но второй производной не существует.

Примером такой функции служит $y = \sqrt[3]{x}$, определенная на всей числовой оси. В точке $x = 0$ вторая производная $y'' = -\dfrac{2}{9}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^5}}$ не существует, но при переходе через нее меняется направление выпуклости, т. е. $x = 0$ – точка перегиба.

Таким образом, как и в случае экстремумов, точки перегиба ищутся среди тех точек из области определения функции, в которых либо $f''(x) = 0$, либо вторая производная не существует.

Достаточное условие наличия точки перегиба. Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, имеет в этой точке конечную или бесконечную производную и если функция $f''(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0, то x_0 – точка перегиба функции $f(x)$.

2.6 Полное исследование и построение графика функции

Схема проведения полного исследования функции включает следующие элементы:

1. Нахождение области определения функции;
2. Установление некоторых общих свойств функции, не требующих привлечения средств математического анализа: точек пересечения графика с осями координат; наличия четности или нечетности функции; периодичность и т.д.;
3. Определение наличия асимптот – вертикальных и горизонтальных;
4. Вычисление производных первого и второго порядков;
5. Нахождение нулей производных и точек, в которых производные не существуют;
6. Заполнение таблицы свойств графика функции (смотрите ниже).

П р и м е р 17. Провести полное исследование и построить график функции $y=\sqrt[3]{x^3+x^2}$.

1. Функция определена на R.

2. $y<0$ при $x<-1$, $y>0$ при $x>-1$, $y(0)=0$. Функция не имеет симметрии: $y(-x)\neq y(x)$, $y(-x)\neq -y(x)$.

3. Асимптоты. Так как функция определена на R, то вертикальных асимптот нет. Наклонные асимптоты $y=kx+b$:

$$k=\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\frac{y(x)}{x}=\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\frac{\sqrt[3]{x^3+x^2}}{x}=1,$$

$$b=\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\left[y(x)-kx\right]=\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\left[\sqrt[3]{x^3+x^2}-x\right]=\frac{1}{3}.$$

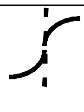
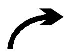
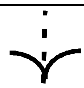
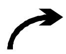
Следовательно, существует наклонная асимптота $y = x + 1/3$.

4. Вычисление производных:

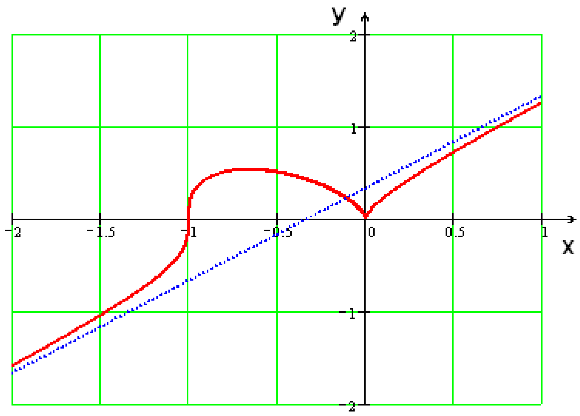
$$y' = \frac{1}{3}\frac{3x+2}{\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{(x+1)^2}}, \; y'' = -\frac{2}{9}\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}\sqrt[3]{(x+1)^5}}.$$

5. Нахождение нулей производных и точек, в которых производные не существуют: $y'(x) = 0$ при $x = -2/3$, $y''(x) \neq 0$. При $x = -1,\ x = 0$ производные не существуют.

6. Заполнение таблицы. В строке x помещаются нули производных и «иксы» точек, в которых не существуют функции и/или производные. Эти точки разделяются интервалами. После этого заполняются строки производных, по которым в строке y изображается поведение графика функции на интервалах и в окрестностях точек. В последней строке записываются координаты точек.

x	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;-2/3)$	$-2/3$	$(-2/3;0)$	0	$(0;+\infty)$
y'	$+$	∞	$+$	0	$-$	$-\infty,+\infty$	$+$
y''	$+$	$+\infty,-\infty$	$-$	$-$	$-$	$-\infty$	$-$
y							
		$(-1,0)$		$(-2/3,\sqrt[3]{4}/3)$		$(0,0)$	

7. Построение графика. Данная таблица позволяет легко строить график функции. Прежде всего, на координатной плоскости строятся все асимптоты. Затем из таблицы выбираются координаты характерных точек графика: точки экстремумов и перегиба (нижняя строка). После этого на координатную плоскость переносятся эскизы строки y и плавно связываются между собой недостающими линиями. В результате, получается следующий график исследуемой функции.


y
2
1
−1
−2
−2
−1.5
−1
−0.5
0
0.5
1
x