Теоретические материалы

Тема 1 Предел и непрерывность функций одной переменной.

Обозначения

Символ	Название	Как читается
$\forall$	Квантор всеобщности	«Для любого»; «для всех»; «для каждого».
$\exists$	Квантор существования	«Существует»; «найдется».
$\Rightarrow$	Знак следования	$A \Leftrightarrow B$; B следует из A; из A следует B; A – достаточное условие для B; B – необходимое условие для A.
$\Leftrightarrow$	Знак равносильности, эквивалентности.	A равносильно B; A – необходимо и достаточно для B; A – тогда и только тогда, когда B.
:		«Такой, что».
$\to$		«Выполняется неравенство (равенство)».
X		множество
$X \subset Y$		множество X является подмножеством множества Y.
$x \in X$		элемент x принадлежит множеству X.
$x \notin X$		элемент x не принадлежит множеству X.
$X = \{x\}$		множество X состоит из элементов x.
$\varnothing$		пустое множество
$X \cup Y$		объединение множеств X и Y; $x \in X \cup Y$ означает, что $x \in X$ *или* $x \in Y$.
$X \cap Y$		пересечение множеств X и Y; $x \in X \cap Y$ означает, что $x \in X$ *и* $x \in Y$.
$X \mid Y$		разность множеств X и Y; $x \in X \mid Y$ означает, что $x \in X$, но $x \notin Y$.
N	множество натуральных чисел.	
Z	множество целых чисел.	
Q	множество рациональных чисел	$Q = \left\{ q : q = \dfrac{m}{n},\ m \in Z;\ n \in N \right\}$ m, n – несократимые числа.
J	множество иррациональных чисел	

R	множество действительных чисел.	$R = Q \cup J$, $Q \cap J = \varnothing$.
R^2	множество пар упорядоченных действительных чисел	$R^2 = \{(x_1, x_2) : x_1 \in R, x_2 \in R\}$.
R^n	множество, элементы которого есть n упорядоченных действительных чисел	$R^n = \{(x_1, ..., x_n) : x_1 \in R, ..., x_n \in R\}$.

1.1 Основные определения

1. Совокупность чисел x, удовлетворяющих неравенству $|x-a|<\varepsilon$, $(\varepsilon>0)$, называется $\varepsilon-$ *окрестностью числа* a. Обозначается $U_\varepsilon(a)=\{x:|x-a|<\varepsilon\}$. *Проколотой* $\varepsilon-$ *окрестностью числа* a называется совокупность чисел x, удовлетворяющих неравенству $0<|x-a|<\varepsilon$ и обозначается $\dot{U}_\varepsilon(a)=U_\varepsilon(a)\setminus\{a\}$. На числовой прямой ε – окрестность числа a – это точки интервала $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$; проколотая $\varepsilon-$ окрестность числа a – это точки объединения интервалов $(a-\varepsilon, a)\cup(a, a+\varepsilon)$.

2. *Числовой последовательностью* $\{x_n\}$ называется функция, определенная на множестве всех натуральных чисел $n \in N$ и расположенная в порядке возрастания натуральных чисел. Число x_n называется n*-ым членом* последовательности, а индекс n – *номером* n-го члена последовательности.

3. Число a называется *пределом* числовой последовательностью $\{x_n\}$, если в любой ε – окрестности числа a находятся все члены последовательности, начиная с номера $n=N_\varepsilon+1$, где N_ε – натуральное число, зависящее от ε. Вне этой ε – окрестности может находиться лишь конечное число членов последовательности. При этом последовательность называется *сходящейся*. Обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

4. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, то числовая последовательность $\{x_n\}$ называется *бесконечно малой*.

5. Числовая последовательность $\{y_n\}$ называется *бесконечно большой*, если для любого $M > 0$ существует такое натуральное число N_M, что для всех членов последовательности с номерами $n > N_M$ выполняется неравенство $|y_n| > M$. Обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$. Например, $\left\{n^p\right\}$, бесконечно большая последовательность при $p > 0$.

6. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности числа a. Число A называется *пределом функции* $f(x)$ в точке a, если для любой $\varepsilon-$ окрестности числа A существует проколотая δ – окрестность числа a такая, что для всех x из этой $\delta-$ окрестности соответствующие значения функции будут находиться в $\varepsilon-$ окрестности числа A. Обозначение: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$. На рис. 2 приведена иллюстрация понятия предела функции и графически показано как можно находить δ – окрестность числа a по заданной $\varepsilon-$ окрестности числа A.

7. Число A_1 называется *пределом слева функции* $f(x)$ в точке a и обозначается $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ или $f(a-0)$, если для любой $\varepsilon-$ окрестности числа A_1 существует число $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in (a-\delta, \delta)$ соответствующие значения функции будут находиться в $\varepsilon-$ окрестности числа A_1 (рис. 3). Число A_2 называется *пределом справа функции* $f(x)$ в точке a и обозначается $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ или $f(a+0)$, если для любой $\varepsilon-$ окрестности числа A_2 существует число $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in (a, a+\delta)$ соответствующие значения функции будут находиться в $\varepsilon-$ окрестности числа A_2 (рис. 4). Числа A_1 и A_2 называются *односторонними пределами*. Из определений

односторонних пределов следует, что существование предела функции $f(x)$ в точке a эквивалентно выполнению равенств

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a-0} f(x) = \lim_{x\to a+0} f(x) = A$$

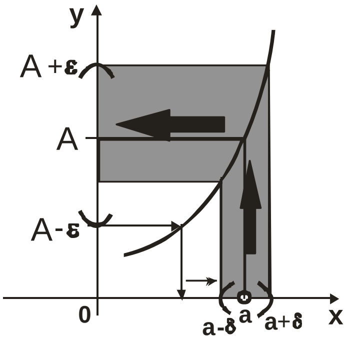


Рис. 1

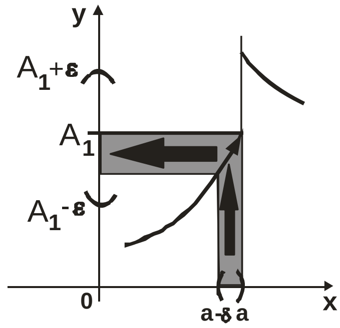


Рис. 2

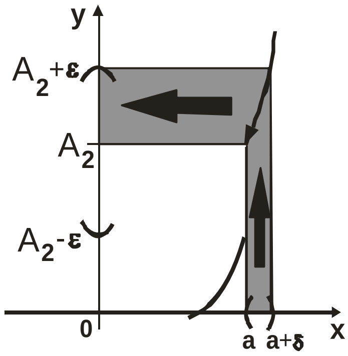


Рис. 3

8. Число A называется *пределом функции* $f(x)$ *при* $x \to -\infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует положительное число $M(\varepsilon)$ такое, что для всех $x < -M(\varepsilon)$ соответствующие значения функции будут находиться в $\varepsilon-$ окрестности числа A (рис. 5). Обозначение: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$.

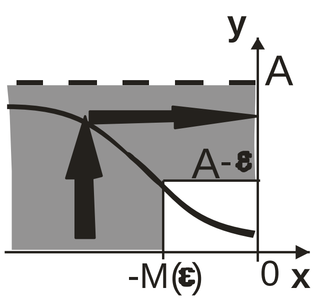


Рис. 5

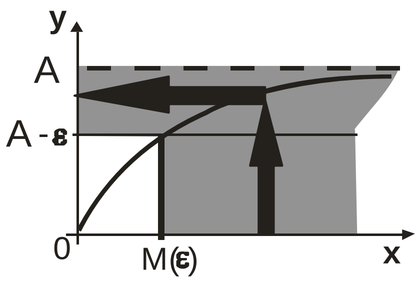


Рис. 6

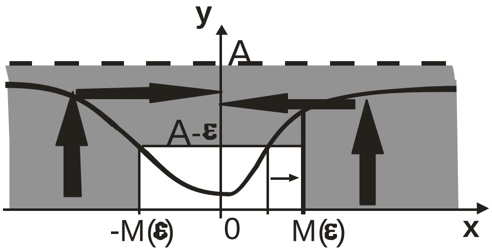


Рис. 7

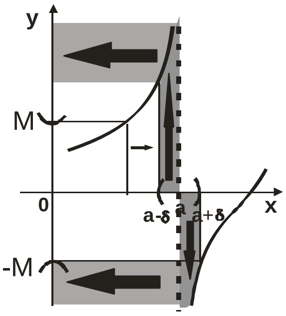


Рис. 8

Число A называется *пределом функции* $f(x)$ *при* $x \to +\infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует положительное число $M(\varepsilon)$ такое, что для всех $x > M(\varepsilon)$ соответствующие значения функции будут находиться в $\varepsilon -$ окрестности числа A (рис. 6). Обозначение: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$.

Число A называется *пределом функции* $f(x)$ *при* $x \to \infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует положительное число $M(\varepsilon)$ такое, что для всех $|x| > M(\varepsilon)$ соответствующие значения функции будут находиться в $\varepsilon -$ окрестности числа A (рис. 7). Обозначение: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$.

9. Если $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$, то функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой при* $x \to a$ (или *бесконечно малая в точке* $x = a$).

10. Функция $f(x)$, определенная в некоторой проколотой окрестности числа a, называется *бесконечно большой при* $x \to a$ (или *бесконечно большой в точке* $x = a$), если для любого $M > 0$ существует проколотая $\delta -$ окрестность числа a такая, что для всех x из этой $\delta -$ окрестности соответствующие значения функции удовлетворяют неравенству $|f(x)| > M$ (рис. 8). Обозначение: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$.

1.2 Основные теоремы о пределах. Непрерывность функции

Т е о р е м а 1. Если $x_n \neq 0$ для всех натуральных n, то последовательность $\{x_n\}$ является бесконечно большой тогда и только тогда, когда последовательность $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ является бесконечно малой.

З а м е ч а н и е. Для запоминания этого свойства иногда пользуются такой символьной записью: $\left[\dfrac{1}{\infty}\right]=0$ и $\left[\dfrac{1}{0}\right]=\infty$, понимая под операцией деления не арифметическое действие, а предельный переход.

Т е о р е м а 2. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют конечные пределы в точке a, причем $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A,$ $\lim\limits_{x\to a} g(x)=B$, то

а) $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)=A+B$; б) $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=A\cdot B$;

в) $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)/g(x)\right)=A/B$ при условии, что $B\neq 0$.

В частности, $\lim\limits_{x\to a}\left(Cf(x)\right)=C\lim\limits_{x\to a} f(x)$, где C – постоянный множитель.

Определение. Функция $f(x)$, определенная в некоторой окрестности точки a, называется *непрерывной в точке* a, если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

З а м е ч а н и е. Равенство $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$ может быть записано так: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(\lim\limits_{x\to a} x)=f(a)$, которое означает, что если функция непрерывна в точке a, то символ предела можно вносить под знак функции. Эта операция служит основой методов вычисления пределов функции.

Т е о р е м а 3. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке a, то функции $f(x)+g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(g(a)\neq 0)$ непрерывны в точке a.

Т е о р е м а 4. Если функция $z = f(y)$ непрерывна в точке y_0, а функция $y = g(x)$ непрерывна в точке x_0, причем $y_0 = g(x_0)$, то в некоторой окрестности точки x_0 определена сложная функция $f(g(x))$, и эта функция непрерывна в точке x_0.

Из этих теорем следует непрерывность всех элементарных функций в их области определения.

1.3 Методы вычисления пределов

Случай $n \to \infty$ $(x \to \infty)$

П р и м е р 1. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n^4 + 3n^2 - 6n + 1}{2n^4 + 3n}$.

Р е ш е н и е. При вычислении этого предела мы не можем непосредственно воспользоваться теоремой 2, так как и в числителе, и в знаменателе находятся бесконечно большие последовательности. Здесь возникает так называемая неопределенность вида $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. Вынесем за скобки в числителе и знаменателе старшие степени:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^4\left(5 + \dfrac{3}{n^2} - \dfrac{6}{n^3} + \dfrac{1}{n^4}\right)}{n^4\left(2 + \dfrac{3}{n^3}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{5 + \dfrac{3}{n^2} - \dfrac{6}{n^3} + \dfrac{1}{n^4}}{2 + \dfrac{3}{n^3}}.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{C}{n^p} = 0$ для любого постоянного числа C и предел суммы сходящихся последовательностей равен сумме пределов этих последовательностей, то

$$\lim_{n\to\infty}\left(5 + \frac{3}{n^2} - \frac{6}{n^3} + \frac{1}{n^4}\right) = \lim_{n\to\infty} 5 + \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n^2} - \lim_{n\to\infty}\frac{6}{n^3} + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4} = \lim_{n\to\infty} 5,$$

$\lim\limits_{n\to\infty} 5 = 5$. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty}\left(5+\dfrac{3}{n^2}-\dfrac{6}{n^3}+\dfrac{1}{n^4}\right)=5$. Аналогично,

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\dfrac{3}{n^3}\right)=\lim\limits_{n\to\infty} 2+\ +\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{n^3}=2$. Так как предел отношения сходящихся последовательностей равен отношению их пределов, то получаем окончательный

Ответ: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^4+3n^2-6n+1}{2n^4+3n}=\dfrac{5}{2}$.

П р и м е р 2. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^4+3n^2}-\sqrt[3]{6n+1}}{\sqrt{2n^4+3n}+\sqrt[3]{n^2}-1}$.

Р е ш е н и е. Здесь опять неприменима теорема 2. Поэтому поступаем так же, как в предыдущем примере:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^4+3n^2}-\sqrt[3]{6n+1}}{\sqrt{2n^4+3n}+\sqrt[3]{n^2}-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^4\left(1+\dfrac{3}{n^2}\right)}-\sqrt[3]{n\left(6+\dfrac{1}{n}\right)}}{\sqrt{n^4\left(2+\dfrac{3}{n^3}\right)}+\sqrt[3]{n^2}-1}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\sqrt{1+\dfrac{3}{n^2}}-\sqrt[3]{n}\sqrt[3]{6+\dfrac{1}{n}}}{n^2\sqrt{2+\dfrac{3}{n^3}}+\sqrt[3]{n^2}-1}=\left|\begin{array}{l}\text{делим числитель и}\\ \text{знаменатель на } n^2\end{array}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\dfrac{3}{n^2}}-\dfrac{1}{n^{5/3}}\sqrt[3]{6+\dfrac{1}{n}}}{\sqrt{2+\dfrac{3}{n^3}}+\dfrac{1}{n^{4/3}}-\dfrac{1}{n^2}}=\left|\begin{array}{l}\text{используем}\\ \text{теорему 1}\end{array}\right|=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ответ: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^4+3n^2}-\sqrt[3]{6n+1}}{\sqrt{2n^4+3n}+\sqrt[3]{n^2}-1}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

П р и м е р 3. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5}{6}+\frac{13}{36}+\ldots+\frac{3^n+2^n}{6^n}\right)$.

Р е ш е н и е. В этом примере в скобке стоит сумма n слагаемых. Прежде всего, нужно просуммировать выражение в скобках. Так как $\frac{3^n+2^n}{6^n}=\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n$, то выражение в скобках можно сгруппировать: $\frac{5}{6}+\frac{13}{36}+\ldots+\frac{3^n+2^n}{6^n}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$. Получили суммы геометрических прогрессий со знаменателями $1/2$ и $1/3$, соответственно. Используя формулу суммы геометрической прогрессии:

$$a_1+a_1q+\ldots+a_1q^{n-1}=a_1\frac{1-q^n}{1-q},$$

находим: $\frac{5}{6}+\frac{13}{36}+\ldots+\frac{3^n+2^n}{6^n}=\frac{1}{2}\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{1}{3}\frac{1-\frac{1}{3^n}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}\frac{1}{2}$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}$.

Ответ: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5}{6}+\frac{13}{36}+\ldots+\frac{3^n+2^n}{6^n}\right)=\frac{3}{2}$.

Определение. Факториалом натурального числа n называется произведение всех подряд натуральных чисел от 1 до n. Обозначение: $n!$ Таким образом, по определению, $n!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n$. Кроме того, по определению, $0!=1$.

П р и м е р 4. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!+(n+2)!}{(n-1)!+(n+2)!}$.

Р е ш е н и е. Выбираем наименьший из факториалов: $(n-1)!$, который, по определению, равен $(n-1)!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-1)$. Все остальные факториалы выражаем через этот, используя определение факториала:

$$n!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n=(n-1)!\cdot n,$$

$$(n+2)!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n\cdot(n+1)\cdot(n+2)=(n-1)!\cdot n\cdot(n+1)\cdot(n+2).$$

Подставляем в предел:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!+(n+2)!}{(n-1)!+(n+2)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)!n+(n-1)!n(n+1)(n+2)}{(n-1)!+(n-1)!n(n+1)(n+2)}=$$

$$=\left|\begin{matrix}\text{выносим } (n-1)! \text{ за скобки}\\ \text{в числителе и знаменателе}\end{matrix}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)!\left[n+n(n+1)(n+2)\right]}{(n-1)!\left[1+n(n+1)(n+2)\right]}=$$

$$=\left|\begin{matrix}\text{сокращаем на } (n-1)!\\ \text{и раскрываем скобки}\end{matrix}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+3n^2+3n}{n^3+3n^2+2n+1}=\left|\begin{matrix}\text{далее } - \text{ как}\\ \text{в примере 4}\end{matrix}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3\left(1+3/n+3/n^2\right)}{n^3\left(1+3/n+2/n^2+1/n^3\right)}=1.$$

Ответ: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!+(n+2)!}{(n-1)!+(n+2)!}=1$.

П р и м е р 5. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\sqrt{n^4+5}-\sqrt{n^4+1}\right)$.

Ошибка, допускаемая при решении этой задачи, состоит в следующем: полагается, что выражение в скобках стремится к нулю и поэтому ответ в задаче будет нулем. Это неверно, так как $\left[\infty-\infty\right]$ и $\left[\infty\cdot 0\right]$ – это не нули, а неопределенности, которые более подробно будут рассматриваться в следующих разделах.

Р е ш е н и е. Избавимся, прежде всего, от иррациональности, используя формулу: $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$. Для этого выполняем преобразования:

$$n^2\left(\sqrt{n^4+5}-\sqrt{n^4+1}\right)=\left|\begin{matrix}\text{умножим и разделим выражение}\\ \text{на } \sqrt{n^4+5}+\sqrt{n^4+1}\end{matrix}\right|=$$

$$=n^2\frac{\left(\sqrt{n^4+5}-\sqrt{n^4+1}\right)\left(\sqrt{n^4+5}+\sqrt{n^4+1}\right)}{\sqrt{n^4+5}+\sqrt{n^4+1}}=$$

$$=\left|\begin{matrix}\text{в числителе применяем}\\ \text{формулу } (a-b)(a+b)=a^2-b^2\end{matrix}\right|=$$

$$=n^2\frac{\left(n^4+5\right)-\left(n^4+1\right)}{\sqrt{n^4+5}+\sqrt{n^4+1}}=\left|\begin{matrix}\text{в знаменателе выносим } n^2 \text{ и}\\ \text{сокращаем с } n^2 \text{ в числителе}\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{4}{\sqrt{1+5/n^4}+\sqrt{1+1/n^4}}=\frac{4}{2}.$$

В результате получаем

Ответ: $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\sqrt{n^4+5}-\sqrt{n^4+1}\right)=2$.

З а м е ч а н и е. Рассмотренные здесь примеры иллюстрируют методы вычисления числовых последовательностей. Учитывая схожесть для вычисления пределов функций при $x\to\infty$, в которых возникают неопределенности вида $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ или $[\infty-\infty]$, осуществляется такими же методами.

Случай $x\to a$ $a\in R$

П р и м е р 6. Вычислить $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x+1}{x^2-4}$.

Р е ш е н и е. Проверяем выполнение условия непрерывности функции $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2-4}$ в точке $x=1$. Функция определена в точке $x=1$ и $f(1)=-1$.

Таким образом, функция $f(x)$ является непрерывной в точке $x=1$ и поэтому

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x+1}{x^2-4}=\left(\frac{2x+1}{x^2-4}\right)_{x=1}=-1.$$

Задачи подобного вида очень простые. Часто возникают случаи, когда требуется найти:

1) $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$. В этом случае вычисление предела называют «раскрытием неопределенности» вида $\left[\frac{0}{0}\right]$;

2) $\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot g(x)$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$, т. е. «раскрытие неопределенности» вида $[0\cdot\infty]$;

3) $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)-g(x)\right)$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$, т. е. «раскрытие неопределенности» вида $[\infty-\infty]$;

4) $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)}$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$, т. е. «раскрытие неопределенности» вида $\left[1^{\infty}\right]$.

5) «Раскрытие неопределенности» вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ рассмотрено выше.

Название – «неопределенность» – возникло из того, что во всех перечисленных случаях возникает ситуация, запрещенная правилами арифметики. Поэтому при раскрытии неопределенностей невозможно напрямую, как это сделано в примере 6, вычислить предел, исходя из определения непрерывной функции.

П р и м е р 7. Вычислить $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^3-4x^2-3x+18}{x^3-5x^2+3x+9}$.

Р е ш е н и е. Проверяем выполнение условия непрерывности функции в точке $x=3$: $\left(\dfrac{x^3-4x^2-3x+18}{x^3-5x^2+3x+9}\right)_{x=3} = \left[\dfrac{0}{0}\right]$, т. е. имеем неопределенность.

Для ее раскрытия замечаем, что $x=3$ является корнем числителя и знаменателя. Это дает возможность, разложив на множители, выделить двучлен $x-3$ и упростить имеющуюся функцию. Напомним метод разложения многочлена на множители. Так как $x=3$ – корень числителя и знаменателя, то многочлены $x^3-4x^2-3x+18$ и x^3-5x^2+3x+9 делятся нацело на $x-3$ (теорема Безу). Напомним метод деления «столбиком» («уголком»):

$$\begin{array}{r|l} -\;x^3-4x^2-3x+18 & x-3 \\ \underline{x^3-3x^2} & x^2-x-6 \\ -\;-x^2-3x+18 & \\ \underline{-x^2+3x} & \\ -\;-6x+18 & \\ \underline{-6x+18} & \\ = & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} -\;x^3-5x^2+3x+9 & x-3 \\ \underline{x^3-3x^2} & x^2-2x-3 \\ -\;-2x^2+3x+9 & \\ \underline{-2x^2+6x} & \\ -\;-3x+9 & \\ \underline{-3x+9} & \\ = & \end{array}$$

В результате получаем: $x^3-4x^2-3x+18=(x-3)(x^2-x-6)$ и $x^3-5x^2+3x+9=(x-3)(x^2-2x-3)$. Раскладывая далее квадратные трёхчлены на множители, окончательно получим: $x^3-4x^2-3x+18= =(x-3)^2(x+2)$ и $x^3-5x^2+3x+9=(x-3)^2(x+1)$. Подставляя эти разложения в функцию и производя упрощения, находим:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-4x^2-3x+18}{x^3-5x^2+3x+9} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)^2(x+2)}{(x-3)^2(x+1)} =$$

$$= \left|\begin{matrix}\text{сокращаем} \\ \text{на } (x-3)^2\end{matrix}\right| = \lim_{x\to 3}\frac{x+2}{x+1} = \frac{5}{4}.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-4x^2-3x+18}{x^3-5x^2+3x+9} = \dfrac{5}{4}.$

П р и м е р 8. Вычислить $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[3]{3x-5}}{x-2}$.

Р е ш е н и е. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[3]{3x-5}}{x-2}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Прежде всего необходимо преобразовать числитель так, чтобы освободиться от иррациональностей. Здесь мы имеем кубические корни и для того, чтобы избавиться от этих корней используем формулу

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3.$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[3]{3x-5}}{x-2}=\left|\begin{array}{c}\text{домножаем числитель и знаменатель}\\ \text{на неполный квадрат суммы числителя}\end{array}\right|=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[3]{3x-5}\right)\left(\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{x-1}\sqrt[3]{3x-5}+\sqrt[3]{(3x-5)^2}\right)}{(x-2)\left(\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{x-1}\sqrt[3]{3x-5}+\sqrt[3]{(3x-5)^2}\right)}=$$

$$=\left|\begin{array}{c}\text{используем формулу}\\ (a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3\end{array}\right|=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{-2(x-2)}{(x-2)\left(\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{x-1}\sqrt[3]{3x-5}+\sqrt[3]{(3x-5)^2}\right)}=$$

$$=\left|\begin{array}{c}\text{сокращаем}\\ \text{на } (x-2)\end{array}\right|=\lim_{x\to 2}\frac{-2}{\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{x-1}\sqrt[3]{3x-5}+\sqrt[3]{(3x-5)^2}}=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\text{получили непрерывную}\\ \text{в точке } x=2 \text{ функцию}\end{array}\right|=\frac{-2}{3}.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[3]{3x-5}}{x-2}=-\dfrac{2}{3}$.

П р и м е р 9. Вычислить $\lim\limits_{x\to -3}\left(\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{2}{x^2+8x+15}\right)$.

Р е ш е н и е. $\lim\limits_{x\to-3}\left(\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{2}{x^2+8x+15}\right)=\{\infty-\infty\}$. Успех в раскрытии такой неопределенности обычно достигается вычитанием дробей:

$$\lim_{x\to-3}\left(\frac{1}{x+3}-\frac{2}{x^2+8x+15}\right)=\lim_{x\to-3}\frac{x+5-2}{(x+3)(x+5)}=\lim_{x\to-3}\frac{1}{x+5}=\frac{1}{2}.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to-3}\left(\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{2}{x^2+8x+15}\right)=\dfrac{1}{2}$.

1.4 Тригонометрические функции. Первый замечательный предел

При вычислении пределов от функций, содержащих тригонометрические функции, используется первый замечательный предел.

Первый замечательный предел

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad (1)$$

Следствия: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1 \quad \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{tg}\, x}{x}=1 \quad \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{arc}\,tgx}{x}=1 \qquad (2)$

Во многих случаях при решении задач используется метод замены переменной, основанный на следующей теореме.

Т е о р е м а 5. Если существуют $\lim\limits_{x\to a} g(x)=b$, $\lim\limits_{y\to b} f(y)=A$, причем для всех x из некоторой проколотой окрестности точки a выполняется условие $g(x)\neq b$, то в точке a существует предел сложной функции $f(g(x))$ и справедливо равенство $\lim\limits_{x\to a} f(g(x))=\lim\limits_{y\to b} f(y)$.

П р и м е р 10. Вычислить $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 7x}{\mathrm{tg}3x}$.

Р е ш е н и е.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{\operatorname{tg}3x}=\left|\begin{array}{c}\text{выделим пределы (1), (2), домножив}\\ \text{числитель и знаменатель на } 3x \text{ и на } 7x\end{array}\right|=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{7x}\cdot\frac{3x}{\operatorname{tg}3x}\cdot\frac{7x}{3x}=\frac{7}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{7x}\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\operatorname{tg}3x}=\frac{7}{3}.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{\operatorname{tg}3x}=\dfrac{7}{3}$.

П р и м е р 11. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2/2}$.

Р е ш е н и е. Так как $1-\cos x=2\sin^2\dfrac{x}{2}$, то $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2/2}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2(x/2)}{x^2/2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x/2)}{x/2}\right)^2=1.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2/2}=1$.

П р и м е р 12. Вычислить $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin 7x}{\operatorname{tg}3x}$.

Р е ш е н и е. Обратим внимание, что пределы в этом примере и в примере 10 вычисляются в разных точках. Воспользоваться первым замечательным пределом можно лишь тогда, когда $x\to 0$. Чтобы этого добиться, введем замену переменной: $x=t+\pi$. Тогда $x\to\pi\Leftrightarrow t\to 0$,

$\sin 7x=\sin(7t+7\pi)=-\sin 7t$, $\operatorname{tg}3x=\operatorname{tg}(3t+3\pi)=\operatorname{tg}3t$. Поэтому

$$\lim_{x\to \pi}\frac{\sin 7x}{\operatorname{tg}3x}=-\lim_{t\to 0}\frac{\sin 7t}{\operatorname{tg}3t}=-\frac{7}{3}.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin 7x}{\operatorname{tg}3x}=-\dfrac{7}{3}$.

П р и м е р 13. Вычислить $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$.

Р е ш е н и е. Здесь возникает неопределенность $[0\cdot\infty]$. Вводим замену переменной: $t=x-1$. Тогда $x\to 1\Leftrightarrow t\to 0$ и

$\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}==\operatorname{tg}\left(\frac{\pi t}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=-\operatorname{ctg}\frac{\pi t}{2}=-\frac{1}{\operatorname{tg}(\pi t/2)}$. Поэтому $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}=$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\operatorname{tg}\frac{\pi t}{2}}=\left|\text{используем (2)}\right|=\frac{2}{\pi}\lim_{t\to 0}\frac{\pi t/2}{\operatorname{tg}\frac{\pi t}{2}}=\frac{2}{\pi}.$$

Ответ: $\frac{2}{\pi}$.

1.5 Второй замечательный предел

Неопределенности вида $\left[1^{\infty}\right]$ раскрываются с помощью второго замечательного предела

Второй замечательный предел

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$ (3), где e обозначает иррациональное число; $e\approx 2,718281$.

Следствия. Справедливы следующие соотношения

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e; \qquad (4)$$

$$\lim_{x\to a}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}=e, \qquad (5)$$

где $f(x)$ – бесконечно большая функция при $x\to a$;

$$\lim_{x\to a}(1+\alpha(x))^{1/\alpha(x)}=e, \qquad (6)$$

где $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция при $x\to a$.

П р и м е р 14. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x+3}\right)^{x}$.

Р е ш е н и е. Неопределенность вида $\left[1^{\infty}\right]$. Преобразуем функцию:

$$\left(\frac{x+5}{x+3}\right)^{x}=\left(1+\left(\frac{x+5}{x+3}-1\right)\right)^{x}=\left(1+\frac{2}{x+2}\right)^{x}=\left|\begin{matrix}\text{преобразуем к}\\ \text{функции вида (5)}\end{matrix}\right|=$$

$$=\left[\left(1+\frac{1}{(x+2)/2}\right)^{\frac{x+2}{2}}\right]^{\frac{2x}{x+2}}.$$ Используя (3) с функцией $f(x)=\dfrac{x+2}{2}$, находим

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{(x+2)/2}\right)^{\frac{x+2}{2}}=e$. Так как $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{x+2}=2$ и показательная функция

является непрерывной, то по теореме о непрерывности сложной функции

получим: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x+3}\right)^{x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{x+2}}=e^{2}$.

П р и м е р 15. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x}{1+x^{2}}\right)^{1/x}$.

Р е ш е н и е. Неопределенность вида $\left[1^{\infty}\right]$. Преобразуем функцию, как в

предыдущем примере: $\left(\dfrac{1+x}{1+x^{2}}\right)^{1/x}=\left(1+\left(\dfrac{1+x}{1+x^{2}}-1\right)\right)^{1/x}=$

$$=\left(1+x\frac{1-x}{1+x^{2}}\right)^{1/x}=\left|\begin{matrix}\text{преобразуем к}\\ \text{функции вида (6)}\end{matrix}\right|=\left[\left(1+x\frac{1-x}{1+x^{2}}\right)^{\frac{1}{x}\cdot\frac{1+x^{2}}{1-x}}\right]^{\frac{1-x}{1+x^{2}}}.$$

Из (6) при $\alpha(x) = x\dfrac{1-x}{1+x^2}$ следует, что $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x\dfrac{1-x}{1+x^2}\right)^{\frac{1}{x}\cdot\frac{1+x^2}{1-x}} = e$ и, так как

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-x}{1+x^2} = 1$, получим

Ответ: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x}{1+x^2}\right)^{x} = e$.

1.6 Метод эквивалентных замен

Определение. Если в некоторой проколотой окрестности точки a определены функции $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ такие, что $f(x) = g(x)h(x)$, $\lim\limits_{x\to a} h(x) = 1$, то функции $f(x)$ и $g(x)$ называются *эквивалентными при* $x \to a$ и обозначаются $f(x) \sim g(x)$ при $x \to a$ или $f(x) \overset{x\to a}{\sim} g(x)$.

Т е о р е м а 6. Функции $f(x)$ и $g(x)$, не имеющие нулей в проколотой окрестности точки a, эквивалентны при $x \to a$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)} = 1.$$

Эквивалентные функции при $x \to 0$

$\sin x \sim x$	$\operatorname{arctg} x \sim x$	$\ln(1+x) \sim x$
$e^x - 1 \sim x$	$1-\cos x \sim x^2/2$	$(1+x)^a - 1 \sim ax$
$\arcsin x \sim x$	$\operatorname{tg} x \sim x$	

З а м е ч а н и е. Таблица легко обобщается на случай, если аргумент x заменить на аргумент более общего вида; важно, чтобы новый аргумент также стремился к нулю. Например, при $x \to 0$ $\sin 2x \sim 2x$,

$a^x - 1 = e^{x\ln a} - 1 \sim x\ln a$ и т. д.

Т е о р е м а 7. Если при $x \to a$ $f(x) \sim f_1(x)$ и $g(x) \sim g_1(x)$, то из существования предела функции $\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$ при $x \to a$ следует существование предела функции $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ при $x \to a$ и справедливость равенства

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{g_1(x)}.$$

П р и м е р 16. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt[3]{1+x}-1\right)(\arcsin 3x + \sin 2x)}{\ln(1+x^2)}$.

Р е ш е н и е. Из таблицы эквивалентных функций определяем, что

$\sqrt[3]{1+x}-1 = = (1+x)^{1/3}-1 \overset{x\to 0}{\sim} x/3$, $\arcsin 3x \overset{x\to 0}{\sim} 3x$, $\sin 2x \overset{x\to 0}{\sim} 2x$,

$\ln(1+x^2) \overset{x\to 0}{\sim} x^2$. Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{1+x}-1\right)(\arcsin 3x + \sin 2x)}{\ln(1+x^2)} = \left|\begin{matrix}\text{применяем}\\ \text{теорему 7}\end{matrix}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{x}{3}\cdot\frac{3x+2x}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{5x^2}{3x^2} = \frac{5}{3}.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt[3]{1+x}-1\right)(\arcsin 3x + \sin 2x)}{\ln(1+x^2)} = \dfrac{5}{3}$.

З а м е ч а н и е. Важно помнить, что таблица составлена только для случая, когда $x \to 0$. Если требуется вычислить предел $x \to a$, $a \neq 0$, то перед тем как пользоваться таблицей эквивалентных функций необходимо произвести такую замену переменной, чтобы эта переменная стремилась к нулю.

П р и м е р 17. Вычислить $\lim\limits_{x\to \pi/4}\dfrac{2\sqrt{2}-(\cos x + \sin x)^3}{1-\sin 2x}$.

Р е ш е н и е. $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{2\sqrt{2}-(\cos x+\sin x)^3}{1-\sin 2x}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=\left|\begin{array}{l} x=t+\dfrac{\pi}{4}, \\ x\to\dfrac{\pi}{4}\Leftrightarrow t\to 0\end{array}\right|=$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{2\sqrt{2}-\left(\cos\left(t+\pi/4\right)+\sin\left(t+\pi/4\right)\right)^3}{1-\sin\left(2t+\pi/2\right)}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{2\sqrt{2}-\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos t-\sin t\right)+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\sin t+\cos t\right)\right)^3}{1-\cos 2t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{2\sqrt{2}-2\sqrt{2}\cos^3 t}{2\sin^2 t}=\lim_{t\to 0}\frac{2\sqrt{2}\left(1-\cos t\right)\left(1+\cos t+\cos^2 t\right)}{2\sin^2 t}=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\sin t\overset{t\to 0}{\sim} t, \\ 1-\cos t\overset{t\to 0}{\sim} t^2/2\end{array}\right|=\lim_{t\to 0}\frac{2\sqrt{2}\cdot t^2}{2\cdot 2t^2}\lim_{t\to 0}\left(1+\cos t+\cos^2 t\right)=\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{2\sqrt{2}-(\cos x+\sin x)^3}{1-\sin 2x}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

1.7 Исследование функций на непрерывность

Определение. Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* a, если выполняются следующие условия: а) функция определена в некоторой окрестности точки a; б) существует $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$; в) $A=f(a)$.

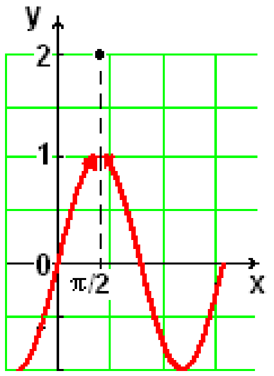
Определение. Если функция $f(x)$ либо не определена в точке a, либо определена, но не является непрерывной в точке a, то такая точка называется *точкой разрыва функции* $f(x)$.

Отсюда следует классификация точек разрыва функции одной переменной.

Точка устранимого разрыва. Это такая точка a, в которой функция $f(x)$: а) определена, но $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$ или б) неопределенна, хотя $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ существует и конечен.

Пример функции, имеющей точку устранимого разрыва: $y=\begin{cases}\sin x, & x\neq \pi/2, \\ 2, & x=\pi/2,\end{cases}$ (рис. 9). Эта функция непрерывна при всех $x\neq\pi/2$. В точке $x=\pi/2$ условия непрерывности функции нарушаются: $\lim\limits_{x\to\pi/2}\sin x=1$, $y(\pi/2)=2\neq 1$.

Другой пример: $y=\dfrac{\sin x}{x}$. Функция (рис. 10) непрерывна во всех точках, кроме точки $x=0$, в которой функция неопределенна. Можно доопределить эту функцию до непрерывной: так как $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, то, положив $f(0)=1$, получим функцию $y=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0, \\ 1, & x=0\end{cases}$, которая будет непрерывной во всех точках.



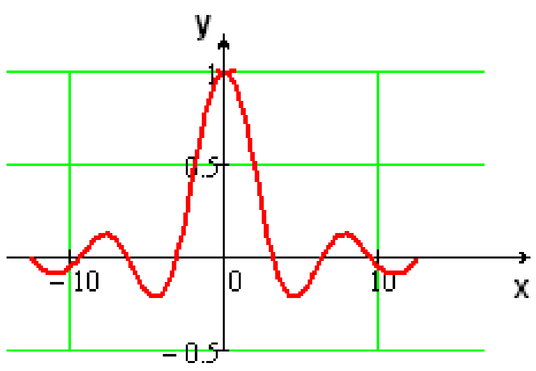


Рис. 9. $y=\begin{cases}\sin x, & x\neq\pi/2,\\ 2, & x=\pi/2,\end{cases}$ *Рис*. 10. $y=\dfrac{\sin x}{x}$

<u>*Точка разрыва первого рода.*</u> Это такая точка a, в которой существуют конечные односторонние пределы: $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$, но $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)\neq\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$.

П р и м е р 18. Исследовать на непрерывность функцию

$$y=\begin{cases}x^2, & x\in(-\infty,1),\\ 2x, & x\in[1,+\infty)\end{cases}.$$

Р е ш е н и е. Во всех точках $x\neq 1$ функция непрерывна, так как в этих точках она представлена многочленами (которые непрерывны на всей числовой оси). В точке $x=1$ существуют односторонние пределы: $\lim\limits_{x\to 1-0} y(x)=1$, $\lim\limits_{x\to 1+0} y(x)=2$. Но $\lim\limits_{x\to 1-0} y(x)\neq\lim\limits_{x\to 2+0} y(x)$. Следовательно, $x=1$ точка разрыва 1-го рода (рис. 11).

<u>*Точка разрыва второго рода.*</u> Это такая точка a, в которой: а) либо предел функции не существует; б) либо хотя бы один из односторонних пределов – бесконечный.

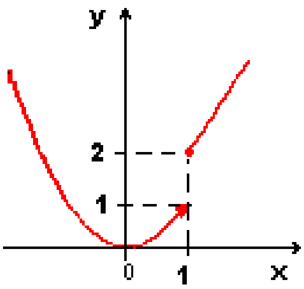


Рис. 11

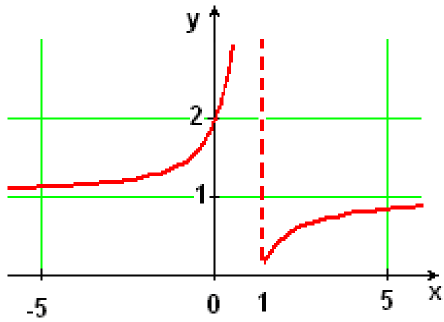


Рис. 12

П р и м е р 19. Исследовать на непрерывность функцию $f(x)=2^{1/(1-x)}$.

Р е ш е н и е. Во всех точках $x\neq 1$ функция непрерывна, так как в этих точках она представляет собой сложную функцию: показательная функция от рациональной дроби. Исследуем точку $x=1$. Вычисляем односторонние пределы:

$$\lim_{x\to 1-0} 2^{1/(1-x)} = \left|\begin{array}{c}\text{функция } (1-x)>0 \text{ и бесконечно малая при } x\to 1-0,\\ 1/(1-x)-\text{бесконечно большая при } x\to 1-0\end{array}\right| =$$

$$=\left[2^{+\infty}\right]=+\infty,$$

$$\lim_{x\to 1+0} 2^{1/(1-x)} = \left|\begin{array}{c}\text{функция } (1-x)<0 \text{ и бесконечно малая при } x\to 1+0,\\ 1/(1-x)-\text{бесконечно большая при } x\to 1+0\end{array}\right| =$$

$=\left[2^{-\infty}\right]=0$ Один из пределов бесконечный. Поэтому $x=1$ – точка разрыва 2-го рода (рис. 12).