Справочные материалы

1. Действия со степенями

Если $p,q\in R$, $a>0, b>0$, то

$$a^p a^q = a^{p+q} \qquad \left(a^p\right)^q = a^{pq} \qquad (a\cdot b)^p = a^p b^p$$

$$a^{-p} = \frac{1}{a^p} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p} \qquad \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$

Если $m,n\in N$, $a\ge 0, b>0$, то

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m \quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} \quad \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

2. Корни квадратного уравнения. Разложение квадратного трёхчлена на множители.

Корни квадратного уравнения: $ax^2+bx+c=0$

равны $x_{1,2} = \dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Разложение на множители: $ax^2+bx+c = a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)$.

3.Формулы сокращенного умножения; формулы разложения на множители

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 \qquad a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \qquad a^3+b^3 = (a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)$$

$$(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 \qquad a^3-b^3 = (a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$$

4. Прогрессии $a_1, a_2, ..., a_i, a_{i+1}, ..., a_n$, $i=1,2...,n-1$.

Арифметическая: $a_{i+1}-a_i = d$, d – постоянная (разность прогрессии).

i -й член $a_i = a_1 + (i-1)d$; сумма n членов $s_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} n$.

Геометрическая: $\dfrac{a_{i+1}}{a_i} = q$, q – постоянная (знаменатель прогрессии).

i -й член $a_i = a_1 q^{i-1}$; сумма n членов $s_n = a_1 \dfrac{1-q^n}{1-q}$.

5. Определение и свойства логарифмов

Логарифмом числа $b > 0$ по основанию $a \, (a > 0, \; a \neq 1)$ называется показатель степени, в которую нужно возвести число a, чтобы получить число b.

$$\log_a a = 1, \; \ln e = 1, \; \log_a 1 = 0, \; \ln 1 = 0$$

$$a^{\log_a b} = b, \; e^{\ln b} = b, \; a^b = c^{b \cdot \log_c a}, \; a^b = e^{b \cdot \ln a}$$

$$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b \qquad \ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

$$\ln a^b = b \cdot \ln a \qquad \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \qquad \log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}$$

6. Тригонометрия

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1, \quad \operatorname{tg} a = \frac{\sin a}{\cos a}, \quad \operatorname{ctg} a = \frac{\cos a}{\sin a} = \frac{1}{\operatorname{tg} a}$$

$a =$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$\sin a =$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	-1	0
$\cos a =$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg} a =$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	–	0	–	0

$a =$	$-\alpha$	$\pi/2-\alpha$	$\pi/2+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$3\pi/2-\alpha$	$3\pi/2+\alpha$
$\sin a =$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$
$\cos a =$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$

$\text{tg}\, a =$	$-\text{tg}\, \alpha$	$\text{ctg}\, \alpha$	$-\text{ctg}\, \alpha$	$-\text{tg}\, \alpha$	$\text{tg}\, \alpha$	$\text{ctg}\, \alpha$	$-\text{ctg}\, \alpha$

$\sin a =$		$\sqrt{1-\cos^2 a}$	$\dfrac{tg\ a}{\sqrt{1+\text{tg}^2 a}}$
$\cos a =$	$\sqrt{1-\sin^2 a}$		$\dfrac{1}{\sqrt{1+\text{tg}^2 a}}$
$\text{tg}\, a =$	$\dfrac{\sin a}{\sqrt{1-\sin^2 a}}$	$\dfrac{\sqrt{1-\cos^2 a}}{\cos a}$	

$$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a \sin b \quad \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \quad \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\text{tg}(a+b) = \frac{\text{tg}\, a + \text{tg}\, b}{1 - \text{tg}\, a \cdot \text{tg}\, b} \qquad \text{tg}(a-b) = \frac{\text{tg}\, a - \text{tg}\, b}{1 + \text{tg}\, a \cdot \text{tg}\, b}$$

$$\sin 2a = 2\sin a \cos a \qquad \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a \qquad \text{tg}\ 2a = \frac{2\text{tg}\, a}{1-\text{tg}^2 a}$$

$$\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2} \qquad \cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b) - \cos(a+b)\right)$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b) + \cos(a+b)\right)$$

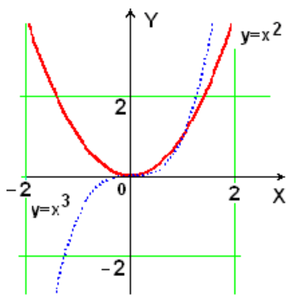
$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}\left(\sin(a-b) + \sin(a+b)\right)$$

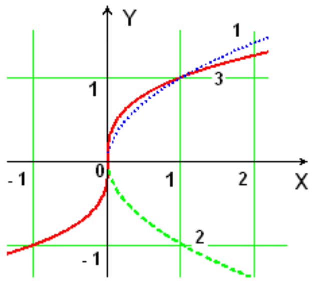
$$\sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} \qquad \sin a - \sin b = 2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$$

$$\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} \qquad \cos a + \cos b = -2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$$

7. Графики элементарных функций

Степенные функции



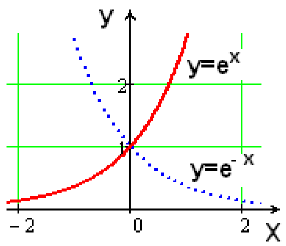


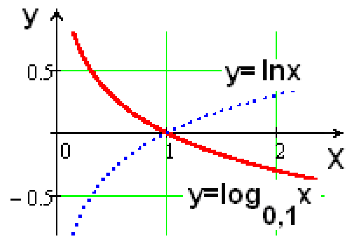
$1.\ y=\sqrt{x}\,, x\ge 0;$

$2.\ y=-\sqrt{x}\,, x\ge 0;$

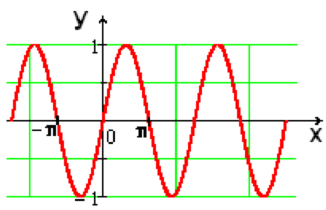
$3.\ y=\sqrt[3]{x}\,, x\in R.$

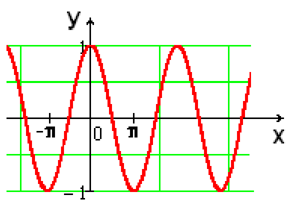
Показательная и логарифмическая функции



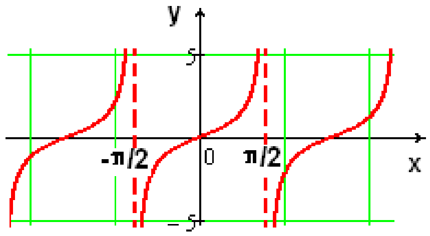


Тригонометрические функции

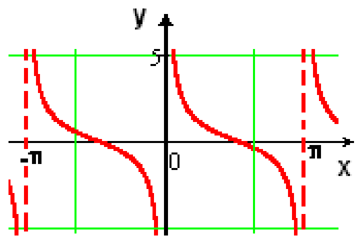




$y=\sin x,\ \ x\in R$ $\qquad$ $y=\cos x,\ \ x\in R$

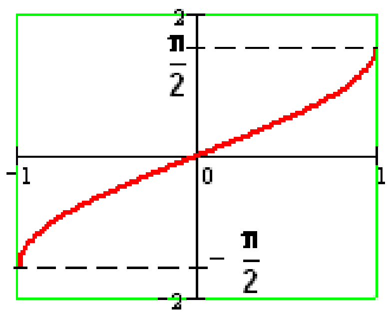


$y = \mathrm{tg}\, x, x \in \left(-\pi/2 + k\pi; \pi/2 + k\pi\right)$,

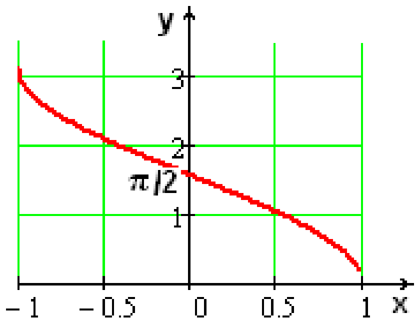


$y = \mathrm{ctg}\, x, x \in \left(k\pi; \pi + k\pi\right)$

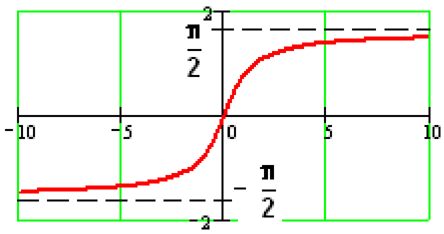
Обратные тригонометрические функции



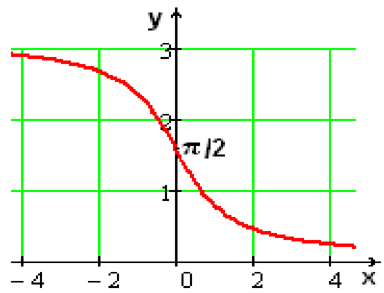
$y = \arcsin x,\ x \in [-1,1]$



$y = \arccos x,\ x \in [-1,1]$



$y = \mathrm{arctg} x,\ x \in \mathbb{R}$



$y = \mathrm{arcctg} x,\ x \in \mathbb{R}$

8. Модуль (абсолютная величина) действительного числа

По определению $|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$ Следовательно, всегда $|a| \geq 0$.

Свойства модуля действительного числа.

а) $|ab| = |a| \cdot |b|$;　　б) $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$;　　в) $-|a| \leq a \leq |a|$;

г) $|a+b| \leq |a| + |b|$;　　д) $|a-b| \geq \big||a| - |b|\big|$.

9. Основные правила дифференцирования

Пусть $u=u(x)$ и $v=v(x)$ - функции, дифференцируемые в некоторой точке x_0, C– const (постоянная величина), тогда:

1) $C'=0$

2) $(u+v)'=u'+v'$

3) $(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'$, $(C\cdot u)'=C\cdot u'$

4) $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$

5) Пусть y - сложная функция, т.е. $y=f(u)$, $u=u(x)$ или $y=f(u(x))$, где f - внешняя функция, u - внутренняя функция.

Производная сложной функции равна произведению производной внешней функции в своей точке на производную внутренней функции $(f(u))'_x=f'_u\cdot u'_x$.

10.Таблица производных

№	$(C)'=0$, C– const		$(100)'=0$
1	$(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$	$(u^{\alpha})'=\alpha\cdot u^{\alpha-1}\cdot u'$	$(\cos^2 x)'=2\cos x\cdot(-\sin x)$
2	$(a^x)'=a^x\ln a$	$(a^u)'=a^u\ln a\cdot u'$	$(2^{\operatorname{tg} x})'=2^{\operatorname{tg} x}\ln 2\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}$
3	$(e^x)'=e^x$	$(e^u)'=e^u\cdot u'$	$(e^{\operatorname{arctg} x})'=e^{\operatorname{arctg} x}\cdot\dfrac{1}{1+x^2}$
4	$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$	$(\log_a u)'=\dfrac{u'}{u\ln a}$	$(\log_2\sin x)'=\dfrac{\cos x}{\sin x\ln 2}$
5	$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$	$(\ln u)'=\dfrac{1}{u}\cdot u'$	$(\ln\sin x)'=\dfrac{1}{\sin x}\cos x$
6	$(\sin x)'=\cos x$	$(\sin u)'=\cos u\cdot u'$	$(\sin\ln x)'=\cos\ln x\cdot\dfrac{1}{x}$
7	$(\cos x)'=-\sin x$	$(\cos u)'=-\sin u\cdot u'$	$y'=(\cos x^2)'=-\sin x^2\cdot 2x$

8	$\left(\operatorname{tg}x\right)'=\frac{1}{\cos^2 x}$	$(\operatorname{tg}u)'=\frac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$	$(\operatorname{tg}x^3)'=\frac{1}{\cos^2 x^3}\cdot 3x^2$
9	$\left(\operatorname{ctg}x\right)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\operatorname{ctg}u)'=-\frac{u'}{\sin^2 u}$	$(\operatorname{ctg}a^x)'=-\frac{a^x\ln a}{\sin^2 a^x}$
10	$\left(\arcsin x\right)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arcsin u)'=\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$(\arcsin\ln x)'=\frac{1/x}{\sqrt{1-\ln^2 x}}$
11	$\left(\arccos x\right)'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos u)'=\frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$(\arccos x^2)'=\frac{-2x}{\sqrt{1-(x^2)^2}}$
12	$\left(\operatorname{arctg}x\right)'=\frac{1}{1+x^2}$	$(\operatorname{arctg}u)'=\frac{u'}{1+u^2}$	$(\operatorname{arctg}e^x)'=\frac{e^x}{1+(e^x)^2}$
13	$\left(\operatorname{arcctg}x\right)'=-\frac{1}{1+x^2}$	$(\operatorname{arcctg}u)'=\frac{-u'}{1+u^2}$	$(\operatorname{arcctg}3^x)'=\frac{-3^x\ln 3}{1+(3^x)^2}$

11.Таблица неопределенных интегралов

№		№	
1	$\int u^n du=\frac{u^{n+1}}{n+1}+C\ n\neq-1$	9	$\int\frac{du}{\sin u}=\ln\left\|\operatorname{tg}\frac{u}{2}\right\|+C$
2	$\int\frac{du}{u}=\ln\|u\|+C$	10	$\int\frac{du}{\cos u}=\ln\left\|\operatorname{tg}\left(\frac{u}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\|+C$
3	$\int\sin u du=-\cos u+C$	11	$\int\frac{du}{a^2+u^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a}+C$
4	$\int\cos u du=\sin u+C$	12	$\int\frac{du}{a^2-u^2}=\frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{a+u}{a-u}\right\|+C$
5	$\int a^u du=\frac{a^u}{\ln a}+C$	13	$\int\frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}=\arcsin\frac{u}{a}+C$
6	$\int e^u du=e^u+C$	14	$\int\frac{du}{\sqrt{u^2\pm a^2}}=\ln\left\|u+\sqrt{u^2\pm a^2}\right\|+C$

7	$\int \mathrm{tg}\, u du = -\ln\lvert\cos u\rvert + C$	15	$\int \frac{du}{\cos^2 u} = \mathrm{tg}\ u + C$
8	$\int \mathrm{ctg}\, u du = \ln\lvert\sin u\rvert + C$	16	$\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\mathrm{ctg}\ u + C$