

## Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение функции одной переменной. Что называется областью определения функции? Какие существуют способы задания функции?
2. Сформулируйте теорему “о связи” функции с ее пределом в точке. Докажите теорему о пределе алгебраической суммы функций, имеющих предел в точке.
3. Докажите теорему о пределе произведения функций, имеющих предел в точке.
4. Сформулировать теорему о пределе алгебраической суммы функций, имеющих предел в точке. Найти предел  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2x^2 - 3x - 2}{3x^2 - x - 10}$   $x_0 = 2, \infty$ ;
5. Сформулировать теорему о пределе частного двух функций, имеющих предел в точке. Вычислить  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{3x^2 - 5x - 50}{x^2 - 4x - 5}$ ;  $x_0 = 5$ ,
6. Как определяется односторонний предел? Каковы условия существования предела функции в точке? Дайте геометрическую иллюстрацию предела функции в точке.
7. Дайте геометрическую иллюстрацию предела функции в точке.  
Вычислите  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}$ .
8. Дайте определение предела функции при  $x \rightarrow +\infty$  ( $x \rightarrow -\infty$ ).  
Вычислите  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 - 2x - 7}{(x-1)^2}$  (не используя правило Лопиталья-Бернулли).
9. Дайте определение предела функции на бесконечности (на  $+\infty$ ).  
Вычислите предел  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^4 + 1} + \sqrt{x}}{\sqrt{x^3 + x} - x^2}$ .
10. Сформулируйте “первый замечательный предел”, и вычислите, используя его  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2}$ .
11. Сформулируйте определение числа  $e$  (“второй замечательный предел”). Дайте определение основной логарифмической функции, ее графика и натурального логарифма.
12. Какая функция называется бесконечно малой в точке? Перечислите свойства бесконечно малых. Приведите пример бесконечно малой функции в точке  $x = 1$ .
13. Какая функция называется бесконечно большой в точке?

- Сформулируйте теорему “о связи” бесконечно большой функции с бесконечно малой. Приведите пример бесконечно большой функции.
14. Как сравниваются бесконечно малые (б.м.) функции? Как определяется порядок одной б.м. относительно другой? Сравните бесконечно малые в точке  $x_0 = 0$   $f(x) = \operatorname{tg} 2x$  и  $g(x) = \sin 3x$ .
  15. Какие бесконечно малые функции называются эквивалентными. Приведите пример эквивалентных б.м.
  16. Приведите определение непрерывности функции в точке. Как определяется односторонняя непрерывность? Дайте определение непрерывности функции на интервале и отрезке. Исследуйте функцию на непрерывность  $f(x) = 2^{\frac{1}{x-3}}$ .
  17. Дайте определение непрерывной функции в точке, на интервале и отрезке. Сформулируйте теоремы и дайте геометрическое пояснение: 1) об ограниченности непрерывной функции, 2) о нуле функции.
  18. Дайте определение непрерывности функции в точке. При каком значении параметра  $a$  функция  $f(x) = \begin{cases} 2x + 2, & x < 0, \\ a - \sin x, & x \geq 0 \end{cases}$  непрерывна?
  19. Что называется точкой разрыва функции? Дайте определение точек разрыва первого и второго рода. Приведите примеры. Исследуйте поведение функции  $f(x) = 2^{\frac{1}{x-3}}$  в точке разрыва.
  20. Укажите точку разрыва функции  $y(x) = 5 - \frac{1}{(x-1)^2}$  и исследуйте ее характер. Постройте график функции в окрестности точки разрыва.
  21. Сформулируйте правило Лопиталья-Бернулли для раскрытия неопределенности типа  $\left(\frac{0}{0}\right)$ . Для раскрытия каких еще неопределенностей применяется это правило? Вычислите с помощью правила Лопиталья-Бернулли  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\sin \pi x}$ .
  22. С помощью правила Лопиталья-Бернулли найдите предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}$
  23. Вычислите предел с помощью правила Лопиталья-Бернулли  $\lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\frac{1}{1-x}}$ .
  24. Как определяется производная функции в точке и какие применяются обозначения для нее? Как определяются односторонние производные? Теорема о непрерывности дифференцируемой функции. Найдите производную функции  $y = (x^3 + 1) \ln(x + 1)$ .

25. Выведите формулы производных: 1) суммы функций, 2) произведения функций. Приведите примеры применения этих формул.
26. Выведите формулы производных: 1) постоянной, 2) произведения постоянной на функцию  $f(x)$ .
27. В чем заключается геометрический смысл производной? Составьте уравнения касательной и нормали к кривой. Как поступать в случае бесконечной производной.
28. Написать уравнение касательной к графику функции  $y = e$ .
29. Запишите формулы дифференцирования функций  $y(x) = \cos x$ ,  $y(x) = \sin x$ ,  $y(x) = \operatorname{tg} x$ . Найдите производную функции  $y = (e^{3x} - \sin 3x)^2$ .
30. Получите формулу дифференцирования сложной функции. Обобщите ее на любое (конечное) число промежуточных аргументов. С помощью дифференцирования сложной функции найдите производную степенной функции  $y = x^\alpha$  ( $\alpha$  - любое действительное число).
31. Как вводится понятие обратной функции? Как связаны производные прямой и обратной функций (докажите теорему о производной обратной функции). Примените эту теорему для вывода формул дифференцирования функции  $y = a^x$ ,  $y = \arcsin x$ .
32. Сформулируйте теорему о связи производных прямой и обратной функций. Примените эту теорему для вывода формул дифференцирования функций  $y(x) = \arcsin x$ ,  $y(x) = \operatorname{arctg} x$ . Найдите производную функции  $y = (x + e^x) \arcsin x$ .
33. Запишите формулы дифференцирования функций  $y(x) = \ln x$ ,  $y(x) = \log_a x$ . Найдите производную функции  $y = \ln \operatorname{tg} 2x$ .
34. Как определяется производная? Получите формулу для дифференцирования степенно-показательной функции  $y = [u(x)]^{v(x)}$ . Найдите производную функции  $y = x^{x^2}$ .
35. Как определяется дифференциал функции? Для каких функций он вводится? В чем заключается геометрический смысл дифференциала. Найдите дифференциал функции  $y = \ln \sin x$  в точке  $x_0 = \pi/4$  при  $\Delta x = \pi/10$ .
36. Запишите дифференциал функции  $y = (3x^2 + x - 5)$  в точке  $x_0 = 1$ , если  $\Delta x = 0,2$ .
37. Найдите  $y'_x$  и  $y''_x$  функции  $y(x)$ , заданной параметрически: 
$$\begin{cases} x = e^{-2t}, \\ y = t^3 + 1, \end{cases}$$
  $t=0$ .

38. Найдите  $y'_x$  и  $y''_x$  функции  $y(x)$ , заданной параметрически:  $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = t^3, \end{cases}$   
 $t=e$ .
39. Напишите уравнение касательной к кривой, заданной параметрически  $\begin{cases} x = \cos t + \sin t \\ y = \sin 2t \end{cases}$  в точке, определяемой значением параметра  $t_0 = \pi / 2$ .
40. Как дифференцировать функции, заданные неявно? Найдите  $y'$  и  $y''$  для функции  $y(x)$ , заданной неявно:  $x^2 + \sin y = y$ .
41. Найдите производную  $y'_x$  и дифференциал от функции  $y(x)$ , заданной неявно уравнением  $x^3 - \operatorname{arctg} y + xy = 1$ .
42. Найдите  $y'_x$  и дифференциал  $dy$  от функции  $y(x)$  заданной неявно уравнением  $\ln y + \frac{x}{y} = c$ .
43. Дайте определение производной второго, третьего, вообще  $n$ -го порядков для функции  $f(x)$ . Как они обозначаются? Найдите вторую производную функции  $f(x) = e^{4x} \cdot \sin 2x$ .
44. Дайте определение экстремумов функции – максимума и минимума. Сформулируйте теорему о необходимом признаке экстремума в данной точке. Какая точка называется “критической точкой первого рода”.  
 Найдите экстремумы функции  $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$ .
45. Сформулируйте первый достаточный признак экстремума. Найдите экстремумы функции  $y(x) = \frac{x-4}{x^2+9}$ .
46. Дайте определение монотонно не убывающей (не возрастающей) функции в некотором промежутке. Какая функция называется монотонной на промежутке? Докажите необходимый признак монотонности функции. Найдите интервалы монотонности функции  $y = x^3 e^{-x}$ .
47. Дайте определение выпуклой и вогнутой функции на интервале. Сформулируйте достаточное условие выпуклости (вогнутости) функции на интервале. Найдите интервал выпуклости  $y = x e^{-x}$ .
48. Найдите локальный экстремум функции  $y(x) = \ln(x^2 - 2x + 2)$  и точки перегиба.
49. Найдите точки перегиба и интервалы выпуклости и вогнутости для функции  $y(x) = 3x^5 - 5x^3$ .
50. Приведите определение асимптоты графика функции. Как найти

вертикальную и наклонную асимптоты? Найдите асимптоты к графику функции  $y(x) = \frac{x^2}{x-1}$ .

51. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции  $y(x) = \frac{e^x}{x}$  на отрезке  $[1; 2]$ .