

ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ И ИХ ГРАФИКИ

К основным элементарным функциям относятся степенные, логарифмические, тригонометрические и обратные тригонометрические функции.

1. Степенная функция, $y = x^\alpha$. Здесь α – любое постоянное действительное число. На рис. 1–3 представлены графики степенных функций при различных значениях α .

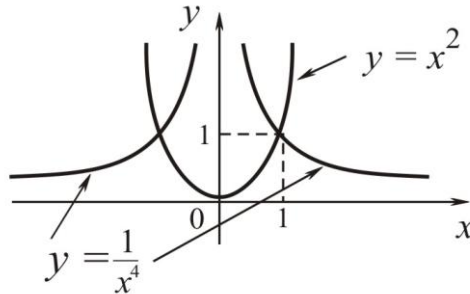


Рис. 1

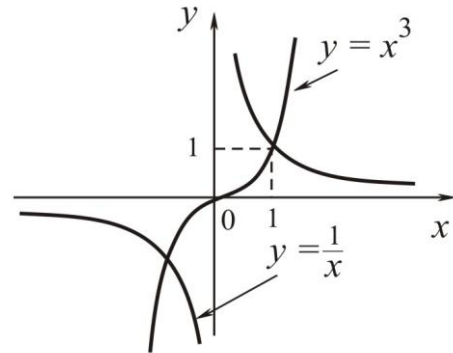


Рис. 2

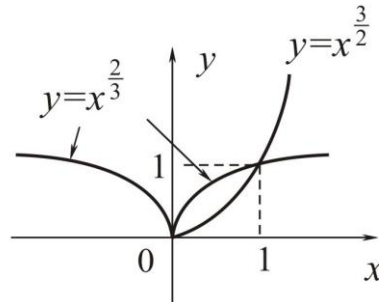


Рис. 3

2. Показательная функция, $y = a^x$. Здесь постоянная $a > 0$, $a \neq 1$. Функция определена на всех $x \in \mathbb{R}$. Графики функций показаны на рис. 4. Если $a = e$, то функция $y = e^x$ называется экспонентой (иногда пишут $y = \exp x$).

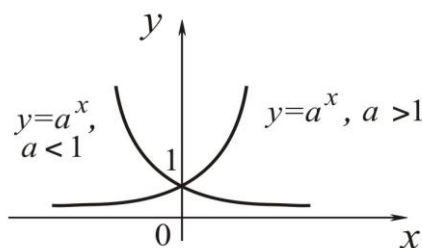


Рис. 4

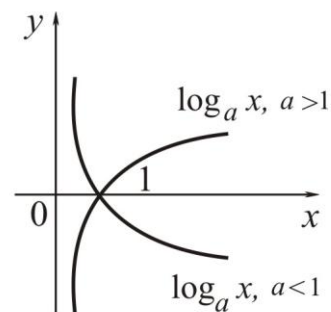


Рис. 5

3. Логарифмическая функция, $y = \log_a x$. Здесь постоянная $a > 0$, $a \neq 1$, функция определена для $x \in (0, \infty)$. Графики функций представлены на рис. 5. Если $a = e$, то функция $y = \ln x$ называется функцией натурального логарифма.

4. Тригонометрические функции, $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$. Функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$ определены для любых значений x , функция $y = \operatorname{tg} x$ определена

всюду, кроме значений $(2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, функция $y = \operatorname{ctg} x$ определена всюду, кроме значений $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Аргументы тригонометрических функций выражаются в радианах и что эти функции являются периодическими с периодом 2π для функций синус и косинус и с периодом π для функций тангенс и котангенс. На рис. 6, 7 приведены графики тригонометрических функций.

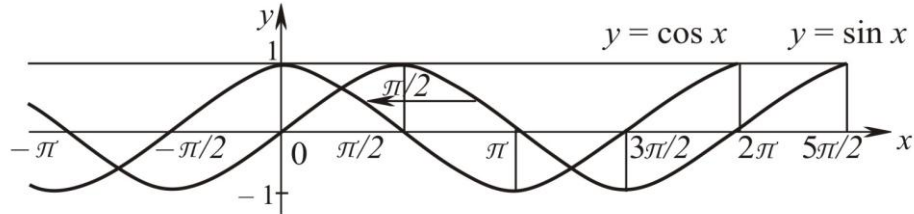


Рис. 6

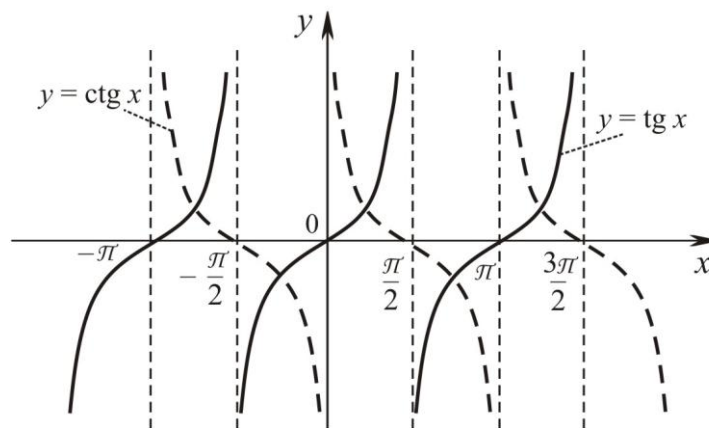


Рис. 7

5. Обратные тригонометрические функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$ определяются как обратные к функциям $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, заданным соответственно на промежутках $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $[0, \pi]$, $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $(0, \pi)$.

Таким образом, равенство $y = \arcsin x$ означает, что $\sin y = x$ и $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$. Аналогично:

$$y = \arccos x \Leftrightarrow \cos y = x, \quad 0 \leq y \leq \pi,$$

$$y = \operatorname{arctg} x \Leftrightarrow \operatorname{tg} y = x, \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2},$$

$$y = \operatorname{arcctg} x \Leftrightarrow \operatorname{ctg} y = x, \quad 0 < y < \pi.$$

Обратные тригонометрические функции однозначны, непрерывны, и их свойства следуют из свойств тригонометрических функций. Область определения для $\arcsin x$ и $\arccos x$ $D = [-1, 1]$, для $\operatorname{arctg} x$ и $\operatorname{arcctg} x$ — $\mathbb{R}$. На рис. 8–11 приведены графики обратных тригонометрических функций.

Обратные тригонометрические функции связаны следующими соотношениями:

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad -1 \leq x \leq 1,$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}, \quad -\infty < x < \infty.$$

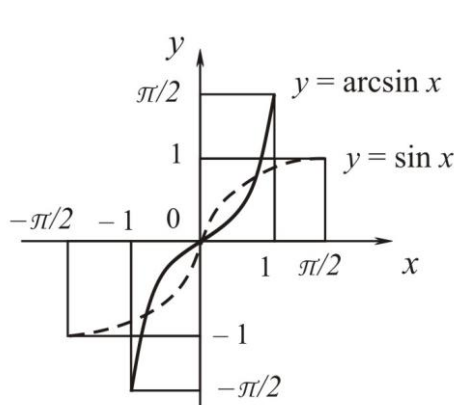


Рис. 8

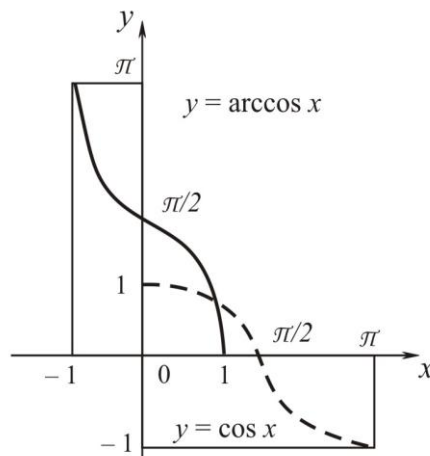


Рис. 9

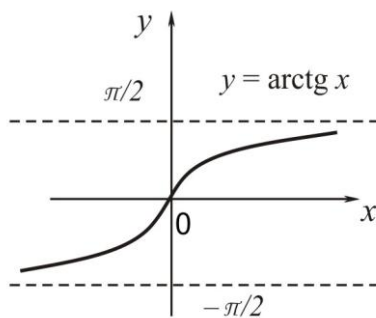


Рис. 10

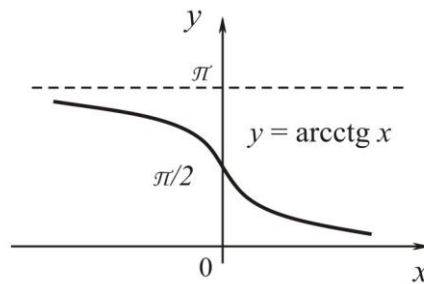


Рис. 11

ОБЗОР ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

Определение. Элементарными называются функции, полученные из основных элементарных функций с помощью алгебраических операций и суперпозиций, применяемых конечное число раз.

К числу алгебраических функций относятся элементарные функции следующего вида.

1. Целая рациональная функция или многочлен

$$y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n,$$

где $a_0, a_1, \dots, a_n$ — постоянные числа, называемые коэффициентами, n — целое неотрицательное число, называемое степенью многочлена.

2. Дробно-рациональная функция (рациональная функция) определяется как отношение двух многочленов

$$y = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m}.$$

3. Иррациональная функция — функция, полученная с помощью конечного числа суперпозиций и четырех арифметических действий над степенными функциями как с

целыми, так и с дробными показателями и не являющаяся рациональной.

Определение. Алгебраической функцией называется функция $y = f(x)$, удовлетворяющая уравнению

$$P_0(x)y^n + P_1(x)y^{n-1} + \dots + P_n(x) = 0, \quad (1)$$

где $P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x)$ – некоторые многочлены от x .

Определение. Функция, не являющаяся алгебраической, называется трансцендентной, т. е. трансцендентные функции – функции, «выходящие за пределы» алгебраических.

Представляют интерес, особенно в технических вопросах, следующие элементарные функции:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad - \text{гиперболический синус},$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad - \text{гиперболический косинус},$$

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad - \text{гиперболический тангенс},$$

$$\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \quad - \text{гиперболический котангенс}.$$

Гиперболические функции определены для всех значений x , исключая $\operatorname{cth} x$, который теряет смысл при $x=0$, свойства гиперболических функций выводятся из свойств функции $y = e^x$, графики приведены на рис. 12, 13.

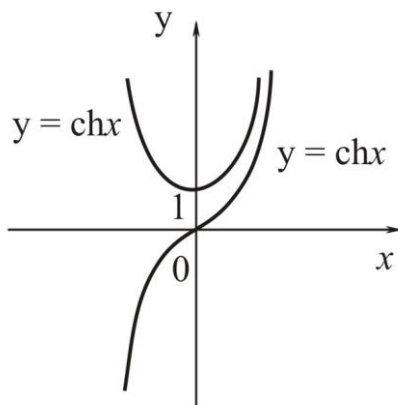


Рис. 12

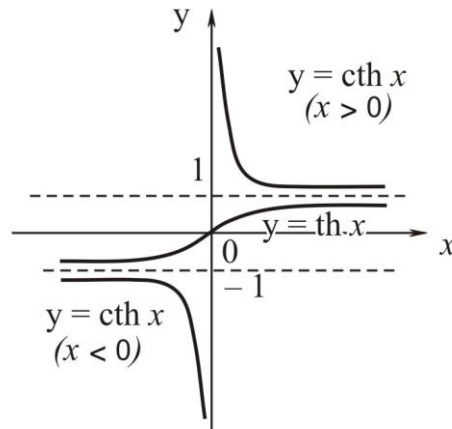


Рис. 13

К элементарным функциям также относятся тригонометрические функции $y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$ (секанс) и $y = \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$ (косеканс), которые используются реже, чем основные тригонометрические функции.