ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Что такое числовой ряд?

Пусть задана некоторая бесконечная последовательность действительных чисел

$$\{a_n\} = a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ... \ .$$

Выражение (символ) вида

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ , \qquad (1)$$

составленное из этих чисел, называется *числовым рядом*, числа $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ – *членами ряда*, а число a_n – *n-м или общим членом ряда.*

2. Что такое сумма числового ряда? Существует ли она для любого числового ряда?

Сумма *n* первых членов ряда (1)

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

называется *n-й частичной суммой* (*или отрезком*) *данного ряда*. Имеем

$$S_1 = a_1, \ S_2 = a_1 + a_2, \ S_3 = a_1 + a_2 + a_3, ..., \ S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n, ... \ .$$

Если существует конечный предел последовательности $\{S_n\}$ частичных сумм ряда (1)

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \ ,$$

то ряд (1) называется *сходящимся*, а число *S* – *суммой данного ряда*:

$$S = a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ .$$

Данное определение придает символу (1) числовое содержание.Ряд (1) называется *расходящимся*, если предел $\lim_{n\to\infty} S_n$ не существует или бесконечен.

3. Что значит «исследовать числовой ряд на сходимость»? Какие задачи рассматриваются: а) в теории числовых рядов; б) в теории функциональных рядов?

Различают числовые ряды (составленные из чисел) и функциональные ряды (составленные из функций).

В теории числовых рядов рассматриваются две основные задачи.

Первая. Исследовать данный числовой ряд на сходимость, т. е. выяснить, сходится или расходится ряд; в случае сходимости определить ее характер (условная или абсолютная сходимость). Для этой цели применяют различные признаки сходимости: теоремы сравнения, необходимый признак сходимости, признаки Даламбера, Коши, интегральный признак, признак Лейбница и другие.

Вторая. Найти сумму заданного числового ряда. Подчеркнем здесь следующее важное обстоятельство. Как и определенный интеграл, сумма ряда представляет собой предел суммы все увеличивающегося числа слагаемых. Однако, как отмечалось в [38, гл. 8], в отличие от интегрального исчисления в теории числовых рядов до сих пор отсутствует (даже при наличии сходимости) универсальная формула, подобная формуле Ньютона–Лейбница для вычисления определенного интеграла, т. е. общая формула, которая позволяла бы найти сумму ряда конечным образом, не прибегая к вычислению результата «бесконечной» процедуры – вычислению предела. Существуют частные методы вычисления суммы числового ряда. Одним из распространенных методов является вычисление суммы числового ряда как значения суммы $S(x)$ некоторого подходящего функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ при некотором значении аргумента x.

В теории функциональных рядов изучают следующие основные задачи.

Первая. Исследовать данный функциональный ряд на сходимость. Здесь прежде всего требуется выяснить, при каких значениях переменной x ряд сходится или расходится, т. е. определить его *область сходимости.* При любом фиксированном значении аргумента x функциональный ряд представляет собой числовой ряд. Поэтому п о т о ч е ч н а я сходимость функционального ряда (в данной точке x) может быть, как и у числового ряда, условной или абсолютной. Для исследования сходимости функционального ряда можно применить все признаки сходимости числовых рядов. Однако у функциональных рядов возникает новое (по сравнению с числовыми рядами) качество или свойство, связанное с понятием *равномерной сходимости.*

Вторая. Определить сумму заданного функционального ряда. Как и в случае числовых рядов, общей формулы для решения этой задачи нет. Одним из эффективных методов вычисления суммы функционального ряда является почленное дифференцирование и интегрирование ряда.

Третья. Представить (разложить) данную функцию $f(x)$ в виде сходящегося функционального ряда определенного вида, например в виде степенного ряда (ряда Тейлора) или ряда Фурье. Здесь имеется довольно замкнутая теория, позволяющая получить разложение в степенной ряд или в ряд Фурье для функций из достаточно широких и практически важных классов. Эта задача имеет важный прикладной характер в механике, электротехнике и др.

4. Пусть для числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ имеем: 1) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$; 2) $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$. Следует ли отсюда, что в случае 1 ряд сходится, а в случае 2 – что он расходится?

В случае 1 ряд может быть как сходящимся, так и расходящимся. В случае 2 ряд расходится.

5. *Пусть числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ сходится. Следует ли отсюда, что сходится каждый из рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$?*

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ сходится, то ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ могут расходиться. Например, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(n + (-n))$ сходится, а ряды $\sum_{n=1}^{\infty} n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} -n$ расходятся.

5. Чем отличаются признаки Даламбера и радикальный признак Коши для положительных рядов от этих же признаков для знакопеременных рядов?

Рассмотрим два числовых ряда: данный знакопеременный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (1)$$

и положительный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots \qquad (2)$$

Числовой ряд (1) называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд (2). Числовой ряд (1) называется *условно сходящимся* или *не абсолютно сходящимся*, если ряд (1) сходится, а ряд (2) расходится.

Поскольку ряд (2) является положительным, для исследования знакопеременного ряда (1) на абсолютную сходимость могут быть использованы все признаки с х о д и м о с т и положительных рядов, рассмотренные выше, применительно к ряду (2): если ряд (2) в силу некоторого такого признака сходится, то сходится (абсолютно) заданный ряд (1). Однако не так однозначно, вообще говоря, решается вопрос о р а с х о д и м о с т и ряда (1) с помощью признаков расходимости положительных рядов: если ряд (2) расходится в силу одного из таких признаков, то ряд (1) тем не менее может оказаться сходящимся (не абсолютно, условно). Только признаки Даламбера и Коши (радикальный) являются исключением в этом отношении: если согласно одному из этих двух признаков ряд (2) расходится, то расходится и ряд (1). Причина этого заключается в следующем. В случаях когда признак Даламбера или Коши (радикальный) утверждает расходимость ряда (2), общий член $|a_n|$ ряда (2) не стремится к нулю. Следовательно, и общий член a_n ряда (1) не стремится к нулю при $n \to \infty$, т. е. необходимое условие сходимости ряда нарушается. Поэтому признаки Даламбера и Коши (радикальный) могут быть переформулированы для произвольных знакопеременных рядов.

Теорема 1 (признак Даламбера для знакопеременных рядов). *Пусть для ряда* (2) *существует предел*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = r .$$

Тогда при $r < 1$ *ряд* (1) *сходится абсолютно, а при* $r > 1$ *он расходится.*

Теорема 2 (радикальный признак Коши для знакопеременных рядов). *Пусть для ряда* (2) *существует предел*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = r .$$

Тогда при $r < 1$ *ряд* (1) *сходится абсолютно, а при* $r > 1$ *он расходится.*

6. Имеет ли смысл применять признак Даламбера для исследования на сходимость рядов вида $\sum_{n=1}^{\infty} \{P_k(n)/Q_m(n)\}$, где $P_k,\ Q_m$ –многочлены степени k и m соответственно?

Для исследования на сходимость рядов вида $\sum_{n=1}^{\infty} \{P_k(n)/Q_m(n)\}$ целесообразно применять признак сравнения в предельной форме.

7. *Допустим, что предел* $\lim_{n\to\infty} (a_{n+1}/a_n)$ *из признака Даламбера* $(a_n \ge 0\ \forall n \in N)$ *не существует. Означает ли это, что ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится?*

Теорема 1 (признак Даламбера). *Пусть все члены числового положительного ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (1)$$

начиная с некоторого номера N отличны от нуля ($a_n \neq 0$) *и удовлетворяют неравенству*

$$D_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} \le q \ \ \forall n \ge N, \qquad (2)$$

где q *– постоянное* (*т. е. не зависящее от* n) *число, меньшее единицы. Тогда ряд* (1) *сходится. Если же начиная с некоторого номера N*

$$D_n \ge 1 \ \forall n \ge N, \qquad (3)$$

то ряд расходится.

Теорема 2 (признак Даламбера в предельной форме). *Пусть для положительного ряда* (1) *отношение* $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ *имеет конечный предел*, *меньший единицы*:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r < 1. \qquad (4)$$

Тогда ряд (1) *сходится. Если же это отношение имеет предел* (*конечный или нет*), *больший единицы*:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r > 1, \qquad (5)$$

то ряд (1) *расходится*.

Имеются ряды, для которых предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ не существует, и, следовательно, теорема 2 неприменима, однако сходимость ряда можно доказать с помощью теоремы 1. Приведем такой пример.

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{2^2\cdot 3} + \frac{1}{2^2\cdot 3^2} + \ldots + \frac{1}{2^n 3^n} + \frac{1}{2^{n+1}3^n} + \frac{1}{2^{n+1}3^{n+1}} + \ldots \ .$$

Р е ш е н и е . Для данного ряда отношение $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ не имеет предела при $n \to \infty$. Действительно,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{если } n \text{ четное}, \\ \frac{1}{3}, & \text{если } n \text{ нечетное}. \end{cases}$$

Поэтому теорему 2 применить нельзя. Однако $\forall n \in N$ выполняется неравенство $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{1}{2}$ и в силу теоремы 1 ряд сходится.

8. *Как оценивается остаток r_n ряда Лейбница? Имеет ли r_n знак своего первого члена $(-1)^n a_{n+1}$?*

Пусть $a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n,\ ...$ – последовательность положительных чисел,

$$a_n > 0\ \forall n \in N.$$

Тогда ряд вида $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ... + (-1)^{n-1}a_n + ..., \qquad (1)$$

члены которого поочередно меняют знак (т. е. знак перемежается), называется *знакочередующимся рядом.*

Теорема (признак Лейбница). *Пусть члены знакочередующегося ряда* (1) *удовлетворяют условиям*:

$$1)\ a_n \ge a_{n+1}\ \forall n \in N; \quad 2)\ \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Тогда ряд (1) *сходится, а его суммаSне превосходит первого члена, т.е.* $S \le a_1$.

Следствие. *Остаток* $r_n = (-1)^n(a_{n+1} - a_{n+2} + ...)$ *ряда Лейбница удовлетворяет неравенству* $|r_n| \le a_{n+1}$ и, следовательно, r_n имеет знак своего первого члена $(-1)^n a_{n+1}$.

9. Может ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (A) расходиться, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\ (A^*)$ сходиться? И, наоборот, может ли ряд (A^*) расходиться, а ряд (A) сходиться? Как в последнем случае называется ряд (A)?

Рассмотрим два числовых ряда: данный знакопеременный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ... \qquad (1)$$

и положительный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| = |a_1| + |a_2| + ... + |a_n| + ... \qquad (2)$$

Числовой ряд (1) называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд (2). Числовой ряд (1) называется *условно сходящимся* или *не абсолютно сходящимся*, если ряд (1) сходится, а ряд (2) расходится.

Теорема (Коши). *Если ряд* (1) *сходится абсолютно* (*т. е. сходится ряд* (2)), *то он сходится*.

10. Для каких рядов сходящийся ряд всегда является абсолютно сходящимся рядом?

Пусть задан числовой ряд, члены которого неотрицательны:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ..., \quad a_n \geq 0 \;\; \forall n \in N . \qquad (1)$$

Такой ряд называется *знакоположительным* (*или положительным*).
Сходящийся знакоположительный ряд всегда является абсолютно сходящимся рядом

11. Следует ли поточечная сходимость функционального ряда из его равномерной сходимости? И наоборот?

Любой равномерно сходящийся функциональный ряд сходится поточечно. Обратное неверно.

12. Является ли всякий функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ числовым рядом при фиксированном x? Каково соображение, позволяющее применять все признаки сходимости числового ряда для исследования сходимости функционального ряда?

Пусть $f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_n(x), \ldots$ – последовательность функций одной и той же переменной *x*, определенных на некотором множестве $X \in R$. Ряд вида

$$f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \qquad (1)$$

членами которого являются функции $f_n(x)$, называется *функциональным* рядом.

При каждом фиксированном значении $x_0 \in X$ выражение (1) представляет собой числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$. Если числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ сходится, то x_0 называется *точкой сходимости функционального ряда* (1), а сам ряд (1) – *сходящимся в точке* x_0. Множество *E* всех точек сходимости функционального ряда (1) называется его *областью сходимости*. Очевидно, $E \subseteq X$.

Для определения области сходимости и области абсолютной сходимости функционального ряда (1) применяют весь аппарат исследования числовых рядов на сходимость: эталонные ряды и теоремы сравнения, необходимый и достаточные признаки сходимости числовых рядов. При этом предел *r*, фигурирующий в признаках Даламбера и Коши (радикальном), будет, вообще говоря, функцией переменной *x*: $r = r(x)$. Решение неравенства $|r(x)| < 1$ дает множество E' точек *x*, принадлежащих области сходимости *E*. Множество E' может представлять собой интервал $(a,\ b)$ или систему интервалов $(a_k,\ b_k)$, а также содержать изолированные точки. В частности, E' может быть одной точкой или совпадать со всей числовой осью $x \in (-\infty,\ \infty)$ или быть пустым множеством. При этом в граничных точках $a,\ b$ (или $a_k,\ b_k$) интервалов $(a,\ b)$ (или (a_k, b_k)) имеем $r = 1$, и признаки Даламбера и Коши (радикальный) не дают ответа на вопрос о сходимости ряда (1) в этих граничных точках. Поэтому сходимость ряда (1) в этих точках исследуют особо, изучая соответствующие числовые ряды, получаемые из ряда (1) при подстановке $x = a$, $x = b$ $\left(\text{или } x = a_k,\ x = b_k\right)$, с помощью других признаков сходимости или расходимости числовых рядов. Присоединяя к множеству E' те граничные точки, в которых ряд сходится, получают область сходимости *E* ряда (1).

13. Имеет ли смысл говорить о равномерной сходимости числового ряда?

Функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \qquad (1)$$

называется *равномерно сходящимся в области E к функции* $S(x)$, если для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$, не зависящий от *x*, что

$$|r_n(x)| = |S(x) - S_n(x)| < \varepsilon \ \forall n > n_0(\varepsilon), \quad \forall x \in E. \qquad (2)$$

Подчеркнем, что при р а в н о м е р н о й сходимости ряда (1) неравенство (2) выполняется для всех $x \in E$ одновременно и n_0 зависит только от ε, но не зависит от *x*. В отличие от р а в н о м е р н о й сходимости, при п о т о ч е ч н о й сходимости (которую называют также *неравномерной*) номер n_0, вообще говоря, зависит не только от ε, но и от $x \in E$, т. е. $n_0 = n_0(\varepsilon, x)$, и поэтому номера n_0, обеспечивающего выполнение неравенства (2) для всех $x \in E$ одновременно, может и не существовать.
Таким образом, говорить о равномерной сходимости числового ряда нет смысла.

14. Пусть сумма $S(x)$ функционального ряда имеет разрыв в некоторой точке области сходимости E. Может ли этот ряд сходиться в области E равномерно?

Теорема. *Пусть функции* $f_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ *определены и непрерывны на множестве* $x \in E$ *и ряд*

$$f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \qquad (1)$$

сходится равномерно в области E.Тогда его сумма $S(x)$ *непрерывна в области E.*
Следствие. *Если сумма* $S(x)$ *функционального ряда* (1) *с непрерывными членами* $f_n(x)$ *имеет разрыв в области E, то ряд* (1) *сходится в области E неравномерно*.

15. Пусть функциональный ряд сходится абсолютно в области E. Следует ли отсюда, что он сходится равномерно в этой области?

Нет, не следует

Признак Вейерштрасса. *Если для функционального ряда*

$$f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \qquad (1)$$

можно указать такой сходящийся положительный числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ (a_n \geq 0), \qquad (2)$$

что для всех $n \in N$ (*или для всех* $n \geq n_0$) и $\forall x \in E$ *выполняются неравенства*

$$|f_n(x)| \leq a_n, \qquad (3)$$

то ряд (1) *сходится абсолютно и равномерно в области E*.

16. Для решения каких задач можно применять почленное дифференцирование и почленное интегрирование функционального ряда?

Почленное дифференцирование и почленное интегрирование функционального ряда применяют, в частности, для исследования сходимости и вычисления сумм функциональных и числовых рядов.

Пример 1. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{arctg} \frac{x}{n}$.

Р е ш е н и е . Заметим, что

$$\frac{1}{n} \operatorname{arctg} \frac{x}{n} = \int_0^x \frac{dt}{n^2+t^2},$$

и рассмотрим ряд

$$\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{2^2+x^2}+\frac{1}{n^2+x^2}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x^2}. \qquad (1)$$

Он мажорируется числовым рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, поскольку $\frac{1}{n^2+x^2} \leq \frac{1}{n^2}$ $\forall x \in R$.Поэтому ряд (1) по признаку Вейерштрасса сходится равномерно на всей оси $-\infty < x < \infty$. Интегрируя его почленно на отрезке $[0,\ x]$, получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x \frac{1}{n^2+t^2}dt = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\operatorname{arctg}\frac{x}{n}.$$

Заданный ряд сходится равномерно на оси $-\infty < x < \infty$.

Пример 2. Найти сумму $S(x)$ ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$. Затем вычислить суммы числовых рядов: 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{e}\right)^n}{n}$.

Р е ш е н и е . Заметим, что $(x^n/n)' = x^{n-1}$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$, составленный из производных исходного ряда, сходится равномерно на любом отрезке $[-q,\ q]$, где $0<q<1$ (как ряд из членов бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем *x*). Его сумма равна $1/(1-x),\ x\in(-1,\ 1)$. Значит, заданный ряд, получаемый почленным интегрированием ряда $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$, также сходится в интервале $(-1,\ 1)$. Почленное дифференцирование ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} = S(x)$ дает $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$.

Отсюда $\int_0^x S'(t)dt = S(x)-S(0) = \int_0^x \frac{dt}{1-t} = -\ln(1-x)$. Так как $S(0)=0$, то $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$, $-1<x<1$. Полагая в последнем равенстве последовательно $x=-1$, $x=\frac{1}{2}$ и $x = 1-\frac{1}{e}$, найдем суммы заданных числовых рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\ldots = \ln(1-x)\big|_{x=-1} = \ln 2\,;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n} = \frac{1}{2}+\frac{1}{4\cdot 2}+\frac{1}{8\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{2^n n}+\ldots = \ln 2\,; \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{e}\right)^n}{n} = 1\,.$$

17. Можно ли почленно дифференцировать и интегрировать сходящийся числовой ряд?

Почленно дифференцировать и интегрировать можно функциональные ряды.

Теорема .Пусть функции $f_n(x)$ непрерывны на отрезке $[a,\ b]$ $\forall n \in N$ и ряд

$$f_1(x)+f_2(x)+...+f_n(x)+...=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \qquad (1)$$

сходится к функции $S(x)$ равномерно на $[a,\ b]$. Тогда ряд (1) можно почленно интегрировать на любом отрезке $[x_0,\ x] \subset [a,\ b]$, т.е. имеет место равенство

$$\int_{x_0}^{x} S(t)dt=\int_{x_0}^{x} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} f_m(t) \right\} dt=\sum_{m=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} f_m(t)dt\,. \qquad (2)$$

При этом функциональный ряд $\sum_{m=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} f_m(t)dt$ (3)

сходится равномерно на отрезке $[a,\ b]$.

Теорема Пусть: 1) функции $f_n(x)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ ...)$ определены и непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a,\ b]$; 2) ряд (1) с членами $f_n(x)$ сходится к функции $S(x)$ на $[a,\ b]$; 3) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$, составленный из производных, сходится равномерно на $[a,\ b]$. Тогда исходный ряд (1) сходится равномерно на $[a,\ b]$, его сумма $S(x)$ является непрерывно дифференцируемой функцией, причем

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)\,. \qquad (4)$$

18. Может ли область сходимости степенного ряда состоять: а) из одной точки; б) двух точек; в) двух непересекающихся интервалов; быть пустым множеством?

Пусть $\{a_n\}$ – последовательность действительных чисел, $x_0 \in R.$ Ряд вида

$$a_0+a_1(x-x_0)+...+a_n(x-x_0)^n+...=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\ , \qquad (1)$$

где $a_n,\ x,\ x_0$ – действительные числа, членами которого являются степенные функции, называется *степенным рядом по степеням* $x-x_0$, а числа a_n – *коэффициентами степенного ряда.*

При $x_0 = 0$ получаем степенной ряд по степеням *x*:

$$a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \ . \qquad (2)$$

Заменой $x - x_0 = x'$ ряд (1) приводится к ряду (2). Поэтому достаточно ограничиться рассмотрением рядов (2). Очевидно, что степенной ряд является частным случаем функционального ряда, поэтому к степенному ряду применимы понятия области сходимости, поточечной, абсолютной и равномерной сходимости и т. д.

Степенной ряд (2) всегда сходится в точке $x = 0$; при $x \neq 0$ он может как сходиться, так и расходиться. Ниже установим, что область сходимости степенного ряда имеет своеобразную структуру. Первостепенное значение при этом имеет

Таким образом, область сходимости степенного ряда (2) имеет следующее строение: она всегда представляет собой сплошной интервал $(-R,\ R)$, симметричный относительно точки $x = 0$, с возможным присоединением одного или обоих его концов $x = \pm R$. Общее утверждение о сходимости степенного ряда (2) в концах $x = \pm R$ интервала $(-R,\ R)$ отсутствует; в этих точках сходимость ряда (2) надо исследовать особо.

19. Допустим, что в формуле $R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ для радиуса сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ предел не существует. Следует ли отсюда, что этот степенной ряд расходится всюду, кроме точки $x = x_0$? Как в этом случае вычисляется его радиус сходимости?

Неотрицательное число *R* такое, что степенной ряд

$$a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \ . \qquad (1)$$

сходится при $|x| < R$ и расходится при $|x| > R$, называют *радиусом сходимости*, а интервал $(-R,\ R)$ – *интервалом сходимости степенного ряда* (1).

Для определения радиуса сходимости степенного ряда применяют признаки Даламбера и Коши (радикальный).

Теорема. *Пусть существует* (*конечный или бесконечный*) *предел* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = r$. *Тогда радиус сходимостиR степенного ряда* (1) *может быть вычислен по формуле*

$$R = \frac{1}{r} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \ . \qquad (2)$$

Теорема. *Пусть существует* (*конечный или бесконечный*) предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=r$. *Тогда для радиуса сходимости R ряда* (1) *справедлива формула*

$$R=\frac{1}{r}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}\ . \qquad (3)$$

Подчеркнем, что формулы (2) и (3) применимы только в случаях, когда пределы в этих формулах существуют. Существуют степенные ряды, для которых эти пределы не существуют; однако радиус сходимости для них можно вычислить, применяя признаки Коши или Даламбера непосредственно.

Пример. Найти радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2^n}$.

Решение. Имеем $a_{2n}=0$, $a_{2n+1}=1/2^n$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[2n]{|a_{2n}|}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[2n+1]{|a_{2n+1}|}=1/\sqrt{2}$, так что предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ не существует. Однако непосредственное применение радикального признака Коши дает $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{|x|^{2n+1}}{2^n}}=\frac{x^2}{2}$ и, значит, данный ряд сходится абсолютно при $x^2/2<1$ и расходится при $x^2/2>1$, т. е. $R=\sqrt{2}$.

20. Для каких функциональных рядов область сходимости представляет собой один сплошной промежуток? (Привести пример.)

Теорема. *Для каждого степенного ряда*

$$a_0+a_1x+...+a_nx^n+...=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\ . \qquad (1)$$

если он не является всюду расходящимся, т. е. если степенной ряд (1) *сходится хотя бы в одной точке* $x\neq 0$, *всегда существует такое число* $R>0$, *что степенной ряд сходится* (*абсолютно*) *для* $|x|<R$ *и расходится для* $|x|>R$.

Как мы увидим ниже из примеров, при $x=\pm R$ ряд (1) может как сходиться (абсолютно или нет), так и расходиться.

Таким образом, область сходимости степенного ряда (1) имеет следующее строение: она всегда представляет собой сплошной интервал $(-R,\ R)$, симметричный относительно точки $x=0$, с возможным присоединением одного или обоих его концов $x=\pm R$. Общее утверждение о сходимости степенного ряда (1) в концах $x=\pm R$ интервала $(-R,\ R)$ отсутствует; в этих точках сходимость ряда (1) надо исследовать особо.

Неотрицательное число *R* такое, что степенной ряд (1) сходится при $|x|<R$ и расходится при $|x|>R$, называют *радиусом сходимости*, а интервал $(-R,\ R)$ – *интервалом сходимости степенного ряда* (1).
Если ряд (1) сходится только в точке $x=0$, то $R=0$; если же он сходится для всех $x\in R$, то $R=\infty$.

Пример. Найти радиус сходимости рядов: 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$.

Р е ш е н и е . 1) Так как существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2}=1$, то находим: $R=1$.

2) По формуле (3) $R=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=\infty$, т. е. ряд сходится на всей оси $-\infty<x<\infty$.

21. *Изменяется ли радиус сходимости степенного ряда после его почленного дифференцирования или почленного интегрирования?*

Будем рассматривать ряд

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\ . \qquad (1)$$

Теорема. *Степенной ряд* (1) *с радиусом сходимости* $R>0$ *можно почленно интегрировать на любом отрезке* $[x_0,\ x]$, *принадлежащем интервалу сходимости* $(-R,\ R)$, *так что*

$$\int\limits_{x_0}^{x}S(t)dt=\int\limits_{x_0}^{x}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n\right\}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_{x_0}^{x}a_nt^ndt=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}-\frac{a_n}{n+1}x_0^{n+1}\right)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x_0^{n+1}\,, \qquad (2)$$

где $S(x)$ *– сумма ряда* (1). *При этом операция почленного интегрирования ряда* (1) *не изменяет радиуса сходимости, т. е. радиус сходимости ряда* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}-\frac{a_n}{n+1}x_0^{n+1}\right)$ *в* (2) *равен R.*

Теорема. *Степенной ряд* (1) *с радиусом сходимости* $R>0$ *можно почленно дифференцировать в любой точке его интервала сходимости* $(-R,\ R)$, *при этом*

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}\,, \qquad (3)$$

где $S(x)$ *– сумма ряда* (1), *и операция почленного дифференцирования ряда* (1) *не изменяет радиуса сходимости, т. е. радиус сходимости степенного ряда в формуле* (3) *равен R.*

22. Является ли всякий ряд Тейлора степенным рядом? Обратно, является ли всякий сходящийся степенной ряд в интервале сходимости рядом Тейлора для своей суммы?

Пусть функция $f(x)$ имеет в некоторой окрестности точки x_0 производные любого порядка (и, значит, непрерывные). Поставим ей в соответствие степенной ряд

$$f(x) \sim f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \qquad (1)$$

который называется рядом Тейлора функции $f(x)$ в точке x_0 независимо от того, сходится ли он и имеет ли действительно в качестве своей суммы $f(x)$. Его коэффициенты $a_n = f^{(n)}(x_0)/n!$ называются коэффициентами Тейлора.

Допустим теперь, что данный степенной ряд по степеням $(x - x_0)$ сходится в интервале сходимости $(\ |x - x_0| < R)$ к своей сумме – некоторой функции $f(x)$:

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots\ . \qquad (2)$$

Спрашивается, является ли степенной ряд (2) рядом Тейлора по отношению к своей сумме $f(x)$? Ответ на этот вопрос дает

Теорема. Функция $f(x)$, представляемая степенным рядом (2) в его интервале сходимости $(x_0 - R,\ x_0 + R)\ (R > 0)$, имеет в этом интервале производные любого порядка. Сам ряд (2) по отношению к этой функции $f(x)$ (к своей сумме) является рядом Тейлора в этом интервале, т.е. $a_n = f^{(n)}(x_0)/n!$.

23. Чем ряд Тейлора отличается от ряда Маклорена?

Если *в формуле* (1) $x_0 = 0$, то ряд Тейлора имеет вид

$$f(x) \sim f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

и называется рядом Маклорена.

24. Чем разложение функции $f(x)$ в ряд Тейлора отличается от формулы Тейлора для $f(x)$? Всегда ли частичная сумма $S_n(x)$ ряда Тейлора совпадает с многочленом Тейлора $P_n(x)$ из формулы Тейлора? Всегда ли совпадает остаточный член $r_n(x)$ ряда Тейлора с остаточным членом $R_n(x)$ формулы Тейлора?

Возможны следующие случаи: 1) радиус сходимости степенного ряда (1) $R=0$; 2) $R>0$, но сумма $S(x)$ ряда (1) не совпадает с функцией $f(x)$; 3) $R>0$, и ряд Тейлора сходится к функции $f(x)$, по которой он построен, т. е. $S(x)=f(x)$ в интервале $(x_0-R,\ x_0+R)$. В последнем случае функция $f(x)$ называется разложимой в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 (или по степеням $(x-x_0)$).
Частичные суммы ряда (1)

$$S_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

представляют собой многочлены Тейлора $P_n(x)$ функции $f(x)$ в точке x_0 в формуле Тейлора

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{k}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x)=P_n(x)+R_n(x), \qquad (2)$$

где $R_n(x)$ – остаточный член ф о р м у л ы Тейлора (следует отличать его от остаточного члена р я д а Тейлора $r_n(x)=S(x)-S_n(x)$, где $S(x)$ – сумма ряда (1). В общем случае величины $R_n(x)$ и $r_n(x)$ не совпадают, так как $S(x)$ может не совпадать с $f(x)$). При сделанном предположении (о существовании производных функции $f(x)$ любого порядка) формула (2) справедлива в рассматриваемой окрестности для любого сколь угодно большого *n*. При этом остаточный член $R_n(x)$ формулы Тейлора может быть представлен в одной из следующих форм:

- форма Лагранжа –

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1};\ \ \xi\in(x_0,x)\ (\text{или}\ \ \xi\in(x,\ x_0)); \qquad (3)$$

- форма Пеано –

$$R_n(x)=o\Big((x-x_0)^n\Big),\ \ x\to x_0.$$

Формулу (2) можно записать в виде

$$f(x)=S_n(x)+R_n(x). \qquad (4)$$

Из формулы (4) следует

Теорема. *Для того чтобы функция* $f(x)$, *бесконечное число раз дифференцируемая в окрестности точки* x_0, *разлагалась в ряд Тейлора в окрестности этой точки, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \quad \forall x \in (x_0 - R,\ x_0 + R)\ .$$