Глава 4
ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОГО АНАЛИЗА (ТЕОРИЯ ПОЛЯ)

§ 4.1. СОДЕРЖАНИЕ ВЕКТОРНОГО АНАЛИЗА (ТЕОРИИ ПОЛЯ)

Раздел математики, называемый *векторным исчислением*, содержит две части: *векторную алгебру* и *векторный анализ*, называемый часто *теорией поля*. Векторная алгебра рассматривает *постоянные* векторы и алгебраические операции над ними. Мы полагаем, что читатель знаком с векторной алгеброй: с линейными операциями над векторами (их сложением, вычитанием, умножением и делением вектора на скаляр), с понятиями линейной зависимости векторов, коллинеарных и компланарных векторов, скалярного и векторного произведения векторов, со свойствами и геометрическим смыслом этих понятий. Векторная алгебра содержится в курсах [24, 34].

Векторным анализом или *теорией поля* называется раздел векторного исчисления, изучающий *переменные* скалярные и векторные величины, т. е. скалярные и векторные функции одной или нескольких переменных (задающие *скалярные и векторные поля*), с помощью дифференциального и интегрального исчисления, т. е. средствами математического анализа (помимо средств векторной алгебры). Таким образом, предметом векторного анализа являются скалярные и векторные функции и операции над ними – не только алгебраические, но и дифференциальные. К последним относятся: производная скалярного поля u по направлению $\mathbf{l}$ $\left(\text{символ } \dfrac{\partial u}{\partial l}\right)$, градиент скалярного поля u (символ $\operatorname{grad} u$), производная векторного поля $\mathbf{v}$ по направлению $\mathbf{s}$, дивергенция и ротор (или вихрь) (символы $\operatorname{div}\mathbf{v}$ и $\operatorname{rot}\mathbf{v}$). Кроме того, векторный анализ определяет и применяет интегральные характеристики векторных полей, прежде всего поток векторного поля через данную поверхность или кривую и циркуляцию векторного поля по контуру.

Термин «векторный анализ» введен в 1881 г. Дж. У. Гиббсом*. Понятие поля (электрического и магнитного) ввел в 30-х годах XIX века М. Фарадей**.

Напомним понятие скаляра (скалярной величины) и вектора (векторной величины).

Многие явления и процессы, с которыми имеют дело в физике (в механике, гидродинамике, газовой динамике, в явлениях тепло- и массопереноса, электромагнетизма, гравитации и др.), описываются величинами двух типов.

Одни величины никак не связаны с понятием направления и полностью характеризуются своей числовой мерой; такие величины называются *скалярными* или *скалярами*. К ним относятся температура тела в данной точке в данный момент времени, плотность твердого тела, жидкости или газа в данной точке в данный момент, объем тела, его масса, энергия, длина пути (траектории), пройденного данной точкой от исходного положения на плоскости или в пространстве, и др. В частности, чтобы охарактеризовать плотность воздуха в данной точке в данный момент, достаточно измерить ее, например, в граммах на сантиметр в кубе (г/см^3); полученное число и будет величиной плотности. Поэтому одно из определений скаляра звучит следующим образом.

Определение. *Скаляром называется величина, вполне характеризуемая одним числом при выбранной единице измерения.*

Величины другого типа отличаются от скалярных тем, что они характеризуются не только числовой мерой, но и определенным направлением в пространстве. К ним принадлежат скорость движения точки, ее перемещение или смещение (не путать с длиной перемещения или пути), сила, ускорение и др. Например, для характеристики скорости движения точки или силы, действующей на материальную точку, недостаточно задать их величину. Необходимо еще задать и направление движения точки или направление действия силы.

---

* Дж. У. Гиббс (J.W. Gibbs) (1839–1903) – американский математик, физик, механик.

** М. Фарадей (M. Faraday) (1791–1867) – английский физик.

Определение. *Вектором или векторной величиной называется величина, характеризуемая как числом при выбранной единице измерения, так и направлением в пространстве.*

Любому скаляру можно поставить в соответствие число, равное его величине при выбранной единице измерения. Любому вектору можно поставить в соответствие направленный прямолинейный отрезок, который имеет длину, равную численному значению вектора (в некотором масштабе), и направление, совпадающее с направлением данного вектора. Поэтому при математическом изучении скалярных и векторных величин вводят отвлеченные понятия скаляра и вектора, абстрагируясь от их конкретного содержания, и принимают следующие определения.

Определение. *Скаляром называется любое действительное число*.

Определение. *Вектором называется направленный прямолинейный отрезок, имеющий определенную величину* (*длину*) *и определенное направление. Направление вектора задается тем, что одна его точка считается начальной точкой* (*началом вектора*), *а вторая – конечной точкой* (*концом вектора*). *При этом принимается, что вектор направлен от своего начала к своему концу.*

Определение. *Длиной, величиной или модулем вектора называется его численное значение.*

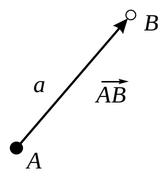


Рис. 1

На чертеже вектор изображается стрелкой (рис. 1). Ее длина определяет длину вектора, а направление указывает направление вектора.

Скаляры, как и величина в обычной алгебре, обозначаются буквами или записываются цифрами: $a,\ b,\ u,\ v,\ \alpha,\ \beta;\ 3,\ 7{,}5$. Векторы обозначаются двумя способами: либо жирными буквами: $\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{M_0M},\ \mathbf{v},\ \mathbf{i},\ \mathbf{j},\ \mathbf{k}$, либо символом $\overrightarrow{AB}$ (или $\overline{AB}$), где A – начальная точка вектора, а B – конечная. Длина вектора обозначается той же буквой, но не жирной, или с помощью знака модуля: $|\mathbf{a}| = a,\ |\mathbf{v}| = v,\ |\overrightarrow{AB}| = AB$.

За нулевой вектор, обозначаемый жирным нулем ($\mathbf{0}$), принимается точка; его направление считается неопределенным. Модуль вектора равен нулю тогда и только тогда, когда этот вектор нулевой: $|\mathbf{0}| = 0$.

Определение. *Единичным вектором называется вектор, модуль которого равен единице.*

Определение. *Направлением или ортом данного вектора* $\mathbf{v}$ *называется единичный вектор, направленный одинаково с данным вектором.*

Орт вектора $\mathbf{v}$ часто обозначается через $\mathbf{v}_0$. Имеем $|\mathbf{v}_0| = 1,\ \mathbf{v}_0 = \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$.

Итак, всякий вектор $\mathbf{v}$ имеет модуль v и направление $\mathbf{v}_0$, при этом $\mathbf{v} = v\mathbf{v}_0$. Орты осей Ox, Oy, Oz декартовой системы координат обозначаются обычно как $\mathbf{i},\ \mathbf{j},\ \mathbf{k}$ соответственно (рис. 2 и 3).

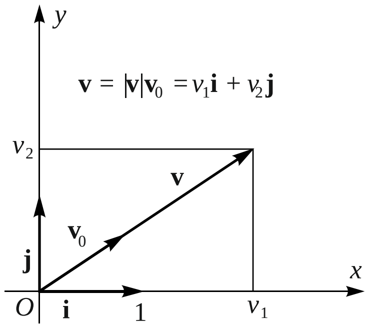


Рис. 2

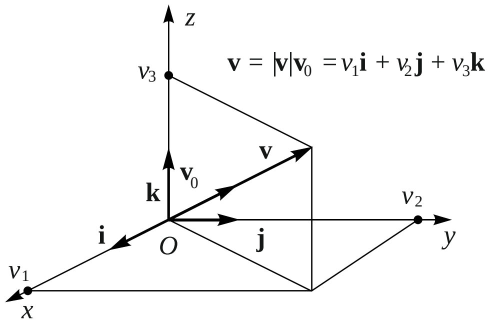


Рис. 3

Два вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ считаются равными тогда и только тогда, когда они имеют один и тот же модуль и одно и то же направление; их равенство обозначается так: $\mathbf{a} = \mathbf{b}$.

Любой вектор $\mathbf{v}$ на плоскости представляется в виде (рис. 2)

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} \text{ или } \mathbf{v} = (v_1,\ v_2),$$

а в трехмерном пространстве – в виде (рис. 3)

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k} \text{ или } \mathbf{v} = (v_1,\ v_2,\ v_3),$$

где $v_1,\ v_2,\ v_3$ – проекции вектора $\mathbf{v}$ по осям $x,\ y,\ z$ соответственно.

Приведенные выше понятия относятся к постоянным (фиксированным) скалярам и векторам. Однако во многих задачах физики и техники скалярные и векторные величины являются переменными:

скалярная величина и длина и (или) направление векторной величины могут изменяться с изменением положения точки в пространстве и с течением времени. Пусть $M = M(x_1, x_2, ..., x_n)$ – точка n-мерного пространства R^n или его части – области $D \subset R^n$; t – момент времени, $t \in T = [t_0, t_1]$.

Определение. *Скалярной функцией* $u(x_1, x_2, ..., x_n, t) = u(M, t)$ называется обычная числовая функция $u(x_1, x_2, ..., x_n, t)$ нескольких переменных $x_1, x_2, ..., x_n, t$, определенная при $M \in D$, $t \in T$ и принимающая действительные значения.

Определение. *Говорят, что в области* $D \times T$ *задана векторная функция точки* $M \in D \subseteq R^n$ *и времени* $t \in T$, *если каждой паре* (M, t) *по определенному правилу* (*закону, предписанию*) *ставится в соответствие один вектор* $\mathbf{v} = \mathbf{v}(M, t)$, *называемый значением векторной функции в точке* (M, t).

Скалярные и векторные поля представляют собой математические модели конкретных явлений или процессов. С физической точки зрения справедливо следующее

Определение. *Скалярным* (*векторным*) *полем называется часть пространства, в каждой точке которого определено число* (*вектор*), *имеющее конкретный физический смысл и характеризующее физическое явление в этой области.*

Таким образом, скалярное поле характеризуется в каждой точке одним числом (скаляром), а векторное поле характеризуется в каждой точке одним вектором (т. е. набором чисел). Примерами скалярных полей являются поле времени пробега сигнала (возмущения, волны) любой природы от источника до данной точки, поле температур, поле давлений, поле освещенности, поле плотности распределения масс или электрических зарядов. Примеры векторных полей: поле перемещений (смещений) точек при деформации в теории упругости и пластичности, поле скоростей точек движущейся жидкости или газа, поле силы тяжести (гравитационное поле), напряженность электрического и магнитного поля. В описании многих процессов одновременно участвуют несколько скалярных и векторных полей. Например, гидродинамические уравнения Эйлера, описывающие движение идеальной жидкости [25, 36, 48, 52, 56], содержат скалярные поля – плотность ρ, давление P и векторные поля – скорость движения частиц жидкости $\mathbf{v}$ и внешнюю массовую силу $\mathbf{F}$. Уравнения Максвелла, описывающие электромагнитное поле [24, 43], в случае изотропной среды содержат скалярные поля – плотность электрических зарядов ρ, проводимость τ, электрическую проницаемость ε и магнитную проницаемость μ и векторные поля – напряженность электрического поля $\mathbf{E}$, напряженность магнитного поля $\mathbf{H}$, ток проводимости $\mathbf{j}$.

Определение. *Процесс называется стационарным, если характеризующее его скалярное или векторное поле не зависит от времени t; иначе процесс называется нестационарным.*

В данной главе рассматриваются только стационарные процессы. Заметим, что всякий нестационарный процесс, рассматриваемый в фиксированный момент времени t, является стационарным; переменная t играет при этом роль параметра.

В физике рассматривают также более сложные величины направленного характера, чем вектор, называемые *тензорами*. Например, распределение напряжений на различно ориентированных плоских элементах в некоторой точке упругого деформированного тела приводит к понятию тензора напряжений в теории упругости. Понятие тензора представляет собой некоторое обобщение понятия вектора. Изучение тензоров является предметом тензорного анализа (см., например, [24]).

Векторному анализу, как и всему векторному исчислению, присущи следующие качества. Как отмечает Г.Ф. Лаптев [34, с. 10], «во-первых, векторные представления адекватно передают суть многих понятий и закономерностей геометрии и физики. Во-вторых, в векторном исчислении достигается единство аналитического и геометрического методов исследования, благодаря чему векторные формулы и выводы отличаются сжатостью, ясностью и наглядностью. В-третьих, векторные формулы, выражающие физические закономерности, не зависят от выбора той или иной координатной системы, т. е. имеют инвариантный характер и отражают сущность явления в чистом виде». Благодаря этим свойствам векторный анализ хорошо приспособлен для изучения тех явлений геометрии и физики, «в которых большую роль играет направление величин» [24, с. 8]. На основе векторного анализа излагаются курсы механики сплошной среды, гидродинамики, газовой динамики [23, 25, 3, 52, 56], теории упругости [35], теории электромагнетизма [43], дифференциальной геометрии [23, 41] и др.

§ 4.2. СКАЛЯРНОЕ ПОЛЕ И ЕГО ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ. ПОВЕРХНОСТИ И ЛИНИИ УРОВНЯ

Дадим *математическое* определение скалярного поля. Пусть D – область пространства R^n, $D \subseteq R^n$, $M = M(x_1, x_2, ..., x_n) = M(\mathbf{r})$ – произвольная точка области D, $\mathbf{r}$ – радиус-вектор точки $M(x_1, x_2, ..., x_n)$. (Каждую точку можно определять либо ее координатами $x_1, x_2, ..., x_n$, либо ее радиусом-вектором **r**.)

Определение. *Говорят, что в области* $D \subseteq R^n$ *определено* (*задано*) *скалярное* (*стационарное скалярное*) *поле* $u = u(M)$, *если в каждой точке* $M \in D$ *определена скалярная функция*

$$u = u(M) = u(x_1, x_2, ..., x_n) = u(\mathbf{r}), \tag{1}$$

причем функция $u = u(M)$ *является однозначной и принимает действительные значения в* D.

Таким образом, скалярное поле задается скалярной функцией точки $u = u(M)$; ее значением в каждой точке M является скаляр (действительное число) $u(M)$. Поэтому с математической точки зрения понятие скалярного поля ничем не отличается от понятия скалярной функции или обычной числовой функции точки M (нескольких переменных) и, следовательно, не вносит ничего нового по сравнению с последним понятием.

Основными характеристиками скалярного поля являются:

1) поверхности уровня или линии уровня;

2) производная скалярного поля или производная функции $u(M)$ по направлению **l**;

3) градиент скалярного поля.

Пусть $R^n = R^3$, т. е. $n = 3$, и в трехмерном пространстве R^3 введена декартова система координат x, y, z и область $D \subseteq R^3$. Тогда

$x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z$ и скалярное поле $u = u(M)$ можно рассматривать как функцию трех скалярных независимых переменных $x,\ y,\ z$ (координат точки $M \in D$)

$$u = u(x,\ y,\ z) \tag{2}$$

или как функцию одной векторной независимой переменной $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ – радиуса-вектора точки $M \in D$: $u = u(\mathbf{r})$.

Если в R^3 введена цилиндрическая система координат $\rho,\ \varphi,\ z$, где $\rho,\ \varphi$ – полярный радиус и полярный угол проекции M' точки M на плоскость Oxy, z – аппликата точки M, то положим $x_1 = \rho,\ x_2 = \varphi,\ x_3 = z$, т. е. величины $x_1,\ x_2,\ x_3$ определяются выбором системы координат.

Определение. *Поверхностью уровня скалярного поля* (1) или *его эквипотенциальной поверхностью* называется множество (*геометрическое место*) точек M, в которых функция $u(M)$ принимает одно и то же значение. В пространстве R^3 уравнение поверхности уровня скалярного поля (2) имеет вид

$$u = u(x,\ y,\ z) = c = \text{const}. \tag{3}$$

Постоянная c принимает такие значения, для которых равенство (3) имеет смысл.

Пример 1. Найти поверхность уровня скалярного поля:

а) $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$;

б) $u = x^2 + y^2$;

в) $u = z - k\sqrt{x^2 + y^2}$ $(k = \text{const} > 0)$;

г) $u = z - a(x^2 + y^2)$, $a = \text{const}$.

Р е ш е н и е. а) Согласно определению (3) уравнение поверхности уровня есть $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = c$, или $x^2 + y^2 + z^2 = c^2$ $(c > 0)$. Это семейство сфер радиусом c с центром в начале координат.

б) Уравнение поверхности уровня есть $x^2 + y^2 = c^2$ $(c > 0)$; описывает семейство круговых цилиндров радиусом c с осью, совпадающей с осью Oz.

в) Имеем $z-k\sqrt{x^2+y^2}=c$ или $z=k\sqrt{x^2+y^2}+c$; поверхности уровня образуют семейство круговых конусов с вершиной $(0,\ 0,\ c)$ и осью, совпадающей с осью Oz.

г) Получаем $z-a(x^2+y^2)=c$, или $z=a(x^2+y^2)+c$. Поверхностями уровня являются параболоиды вращения с вершиной $(0,\ 0,\ c)$ и осью вращения Oz.

Любые две поверхности $u(M)=c_1$ и $u(M)=c_2$, где $c_1 \neq c_2$, не имеют общих точек. т. е. не пересекаются и не касаются друг друга. При изменении параметра c из уравнения (3) поверхности уровня, соответствующие различным значениям c, заполняют сплошным образом всю область D, в которой определено скалярное поле $u(M)$. Поэтому задание семейства всех поверхностей уровня и соответствующих им значений параметра c однозначно определяет поле $u(M)$. Чем больше сближаются (отдаляются друг от друга) поверхности уровня в окрестности некоторой точки M, тем быстрее (медленнее) изменяется функция $u(M)$ в этой окрестности. Поэтому поверхности уровня, являясь геометрическими характеристиками скалярного поля $u(M)$, дают наглядное геометрическое описание этого поля.

Определение. *Скалярное поле называется плоским (плоскопараллельным), если поле принимает одно и то же значение на всех плоскостях, параллельных некоторой плоскости.*

Если упомянутую в определении плоскость выбрать в качестве плоскости xOy, то функция $u(M)$, описывающая скалярное поле, не будет зависеть от координаты z, т. е.

$$u=u(x,\ y), \tag{4}$$

и скалярное поле u можно рассматривать на плоскости. Аналогом поверхности уровня для плоского поля является *линия уровня*.

Определение. *Линией уровня плоского скалярного поля* (4) *называется множество (геометрическое место) точек плоскости, в которых функция $u(x,\ y)$ принимает одно и то же значение c. Уравнение линии уровня в декартовых координатах x, y имеет вид*

$$u(x,\ y)=c, \text{ где } c=\text{const}. \tag{5}$$

Линии уровня лежат в основе различных карт. Например, если функция $u(x,\ y)$ задает высоту точек земной поверхности над уровнем моря, то линии уровня (5) являются горизонталями, изображающими рельеф на топографической карте. Если $u(x,\ y)$ задает температуру, то линии уровня представляют собой изотермы (линии равных температур) на синоптической карте. Если функция $u(x,\ y)$ определяет отклонение Δg ускорения g силы тяжести от некоторого среднего значения g_0, то линии уровня задают изолинии аномалий силы тяжести на гравиметрической карте и т. д.

Пример 2. Найти линии уровня плоского скалярного поля: а) $u(x,\ y) = x^2 + y^2$; б) $u(x,\ y) = x^2 - y$; в) $u = x^2 - y^2$.

Решение. а) Уравнение линий уровня принимает вид $x^2 + y^2 = c \quad (c > 0)$. Это множество концентрических окружностей радиусом c с центром в начале координат.

б) Получаем $x^2 - y = c$ или $y = x^2 - c$, т. е. семейство парабол с вершиной $(0, -c)$ и осью Oy.

в) Уравнение линий уровня: $x^2 - y^2 = c$. При $c = 0$ имеем две прямые $y = x$, $y = -x$. При $c \neq 0$ получаем семейство гипербол.

§ 4.3. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ ИЛИ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ ПО НАПРАВЛЕНИЮ

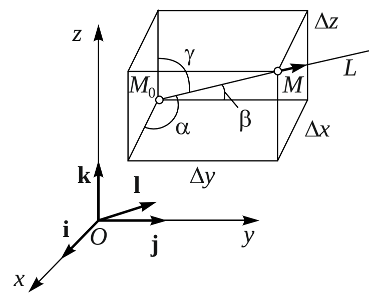


Рис. 1

Пусть в области $D \subseteq R^3$ задано скалярное поле, определяемое скалярной функцией $u = u(M)$. Возьмем точку $M_0 \in D$ и выберем фиксированное направление, определяемое единичным вектором $\mathbf{l}$. Проведем прямую L через точку M_0, параллельную вектору $\mathbf{l}$, и возьмем на ней другую точку M так, чтобы вектор $\mathbf{M_0M}$ имел направление $\mathbf{l}$ (рис. 1). Обозначим длину $|\mathbf{M_0M}|$ вектора $\mathbf{M_0M}$ через Δl, а приращение функции $u(M)$, соответствующее перемещению Δl, через $\Delta u \overset{\text{def}}{=} u(M)-u(M_0)$. Отношение

$$\frac{\Delta u}{\Delta l}=\frac{u(M)-u(M_0)}{\Delta l} \tag{1}$$

представляет собой *среднюю* скорость изменения скалярного поля $u(M)$ (функции $u(M)$) на единицу длины в данном направлении $\mathbf{l}$.

Пусть точка M стремится к M_0, двигаясь по прямой L; тогда Δl стремится к нулю. Если при этом предел отношения (1) существует, то он выражает *истинную* скорость изменения функции $u(M)$ в точке M_0 в направлении вектора $\mathbf{l}$.

Определение. *Производной функции* $u(M)$ (*скалярного поля* $u(M)$) *в точке* M_0 *по данному направлению* $\mathbf{l}$ (*по направлению вектора* $\mathbf{l}$) *называется предел* (*если он существует*) *отношения* (1) *приращения* Δu *функции* $u(M)$ *к величине перемещения* $\Delta l=\left|\mathbf{M}_0\mathbf{M}\right|$ при $\Delta l\to 0$.

Эту производную обозначают символом $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{l}}\right|_{M_0}$ или $\dfrac{\partial u(M_0)}{\partial \mathbf{l}}$:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \mathbf{l}}\right|_{M_0}=\frac{\partial u(M_0)}{\partial \mathbf{l}}=\lim_{\Delta l\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta l}=\lim_{\Delta l\to 0}\frac{u(M)-u(M_0)}{\Delta l}. \tag{2}$$

Заметим, что данное определение, т. е. данная характеристика $\partial u(M_0)/\partial \mathbf{l}$ скалярного поля, никак не связано с выбором системы координат, т. е. значение $\partial u(M_0)/\partial \mathbf{l}$ инвариантно по отношению к системе координат (не зависит от ее выбора).

Найдем формулу, выражающую производную по направлению в декартовой системе координат x, y, z в предположении, что функция $u=u(M)=u(x, y, z)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Пусть $u(M)$ – значение функции $u(M)$ в точке $M(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z)$, где $M\in L$. Полное приращение функции $u(M)$, дифференцируемой в точке $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$, представимо в виде

$$\Delta u = u(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y,\ z_0+\Delta z) - u(x_0,\ y_0,\ z_0) =$$

$$= \frac{\partial u(M_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u(M_0)}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u(M_0)}{\partial z}\Delta z + o(\Delta l)\,, \qquad (3)$$

где $\Delta l = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$, $o(\Delta l)$ – бесконечно малая более высокого порядка, чем Δl, при $\Delta l \to 0 \Leftrightarrow \Delta x \to 0,\ \Delta y \to 0,\ \Delta z \to 0$, т. е. $\lim\limits_{\Delta l \to 0}\{o(\Delta l)/\Delta l\} = 0$. Отсюда, разделив обе части равенства (3) на Δl и переходя к пределу при $\Delta l \to 0$, получим

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial \mathbf{l}} = \lim_{\Delta l \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta l} = \frac{\partial u(M_0)}{\partial x}\lim_{\Delta l \to 0}\frac{\Delta x}{\Delta l} +$$

$$+ \frac{\partial u(M_0)}{\partial y}\lim_{\Delta l \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta l} + \frac{\partial u(M_0)}{\partial z}\lim_{\Delta l \to 0}\frac{\Delta z}{\Delta l}\,. \qquad (4)$$

Здесь $\frac{\Delta x}{\Delta l} = \cos\alpha,\ \frac{\Delta y}{\Delta l} = \cos\beta,\ \frac{\Delta z}{\Delta l} = \cos\gamma$, где $\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma$ – направляющие косинусы вектора $\mathbf{M_0M} = \Delta x\mathbf{i} + \Delta y\mathbf{j} + \Delta z\mathbf{k}$ (рис. 1). Но векторы $\mathbf{M_0M}$ и $\mathbf{l}$ имеют одно и то же направление, поэтому их направляющие косинусы равны, т. е.

$$\mathbf{l} = \cos\alpha\mathbf{i} + \cos\beta\mathbf{j} + \cos\gamma\mathbf{k}\,,\ |\mathbf{l}| = 1\,.$$

При $M \to M_0$ точка M все время остается на прямой L, параллельной $\mathbf{l}$, так что углы $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ при $\Delta l \to 0$ остаются постоянными. Отсюда

$$\lim_{\Delta l \to 0}\frac{\Delta x}{\Delta l} = \cos\alpha,\ \lim_{\Delta l \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta l} = \cos\beta,\ \lim_{\Delta l \to 0}\frac{\Delta z}{\Delta l} = \cos\gamma\,. \qquad (5)$$

Из равенств (4), (5) получаем искомую формулу

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial \mathbf{l}} = \frac{\partial u(M_0)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u(M_0)}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u(M_0)}{\partial z}\cos\gamma\,. \qquad (6)$$

В случае *плоского* скалярного поля $u = u(x, y)$ имеем $\cos\gamma = 0$, $\beta = \pi/2 - \alpha$, $\cos\beta = \sin\alpha$, $\mathbf{l} = \cos\alpha\mathbf{i} + \sin\alpha\mathbf{j}$ и для производной функции $u(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ по направлению $\mathbf{l}$ имеем формулу

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial \mathbf{l}} = \frac{\partial u(M_0)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u(M_0)}{\partial y}\sin\alpha, \tag{7}$$

где α – угол между осью Ox и единичным вектором $\mathbf{l}$, отсчитываемый от оси Ox против часовой стрелки (рис. 2).

Величина $\partial u(M_0)/\partial\mathbf{l}$ выражает *скорость изменения функции* $u(M)$ (*скалярного поля* $u(M)$) *в данной точке* M_0 *по данному направлению* $\mathbf{l}$ и зависит от направления $\mathbf{l}$, т. е. число $\partial u(M_0)/\partial\mathbf{l}$ для различных $\mathbf{l}$ может быть различным. Если $\partial u(M_0)/\partial\mathbf{l} > 0$, то скалярное поле в точке M_0 возрастает по направлению $\mathbf{l}$, если $\partial u(M_0)/\partial\mathbf{l} < 0$, то убывает.

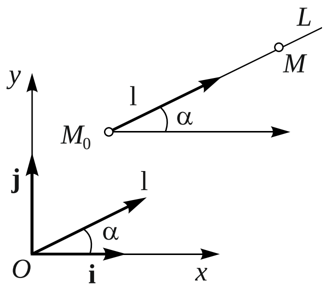


Рис. 2

Формула (6) справедлива и в случае, когда точка M стремится к точке M_0, двигаясь не по прямой, а по кривой S, проходящей через точку M_0 и имеющей в точке M_0 касательную L.

Тогда $\mathbf{l} = (\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$ в формуле (6) – направляющий вектор этой касательной, и (6) дает выражение для скорости изменения функции $u(M)$ по направлению касательной к этой кривой S в точке M_0. Если кривая S лежит на поверхности уровня $u(M) = c$, то вдоль S приращение $\Delta u = 0$, а вектор $\mathbf{l}$, касательный к S, лежит в плоскости, касательной к поверхности уровня, и, значит, является касательным к поверхности уровня. Поэтому *производная функции* $u(M)$ *по любому направлению* $\mathbf{l}$, *касательному к ее поверхности уровня, равна нулю*:

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{l}} = 0\,. \tag{8}$$

Заметим, что частные производные $\partial u/\partial x,\ \partial u/\partial y,\ \partial u/\partial z$ являются производными функции $u(M)$ по направлению координатных осей Ox, Oy, Oz соответственно и, следовательно, понятие производной функции по направлению обобщает понятие частной производной (см. гл. 1).

Пример. Найти скорость изменения скалярного поля $u(x,\ y,\ z) = 1/r$, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ в точке $M_0(3,\ 4,\ 0)$ в направлении вектора $\mathbf{M_0M}$, если точка M имеет координаты $(5,\ 6,\ 1)$.

Решение. Имеем $\mathbf{M_0M} = (2, 2, 1)$, $|\mathbf{M_0M}| = \sqrt{9} = 3$, орт (направление) вектора $\mathbf{M_0M}$ есть

$$\mathbf{l} = \frac{\mathbf{M_0M}}{|\mathbf{M_0M}|} = (\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma) = \left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right).$$

Находим значения частных производных поля $u(x,\ y,\ z)$ в точке $M_0(3,\ 4,\ 0)$:

$$\frac{\partial u(M)}{\partial x} = \left.\frac{x}{r}\right|_{M_0} = \frac{3}{5},\quad \frac{\partial u(M)}{\partial y} = \left.\frac{y}{r}\right|_{M_0} = \frac{4}{5},\quad \frac{\partial u(M)}{\partial z} = \left.\frac{z}{r}\right|_{M_0} = 0.$$

Подставляя все числовые значения в формулу (6), получаем

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \mathbf{l}}\right|_{M_0(3,\,4,\,0)} = \frac{3}{5}\frac{2}{3} + \frac{4}{5}\frac{2}{3} + 0\cdot\frac{1}{3} = \frac{14}{15} > 0.$$

Значит, поле $u(M)$ в точке M_0 в данном направлении возрастает.

§ 4.4. ГРАДИЕНТ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ И ЕГО СВОЙСТВА

Пусть в некоторой окрестности точки $M \in R^3$ задано скалярное поле $u = u(M) = u(x,\ y,\ z)$ и существуют частные производные $\partial u/\partial x,\ \partial u/\partial y,\ \partial u/\partial z$ в точке M.

Определение. *Градиентом скалярного поля* $u(M)$ (*скалярной функции* $u(M)$) в данной точке $M(x,\ y,\ z) \in R^3$ называется вектор, обозначаемый символом $\operatorname{grad} u(M)$ или $\operatorname{grad} u$ и определяемый равенством

$$\operatorname{grad} u(M) \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial u(M)}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u(M)}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial u(M)}{\partial z}\mathbf{k}$$

или

$$\operatorname{grad} u \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k}\,. \qquad (1)$$

Таким образом, координатами, или проекциями градиента на оси прямоугольной системы координат $x,\ y,\ z,$ являются частные производные функции $u(x,\ y,\ z)$ по соответствующим переменным. Эти частные производные вычисляются в той же точке M, в которой определяется вектор $\operatorname{grad} u$. Очевидно, что этот вектор зависит и от функции $u(M)$, и от точки M; он является векторной характеристикой скалярного поля $u(M)$.

Найдем связь между производной скалярного поля по направлению и его градиентом.

Пусть $\mathbf{l}$ – единичный вектор (орт), определяющий данное направление:

$$\mathbf{l} = \cos\alpha\mathbf{i} + \cos\beta\mathbf{j} + \cos\gamma\mathbf{k}\,, \quad |\mathbf{l}|^2 = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

где $\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma$ – направляющие косинусы вектора $\mathbf{l}$ (его проекции на оси $Ox,\ Oy,\ Oz$). Для любых двух векторов $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ и $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ их скалярное произведение $(\mathbf{a},\ \mathbf{b})$ выражается через координаты векторов по известной формуле $(\mathbf{a},\ \mathbf{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$. Поэтому формула (6) в § 4.3 принимает вид равенства

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{l}} = (\operatorname{grad} u, \mathbf{l})\,, \qquad (2)$$

выражающего искомую связь. Таким образом, *производная скалярного поля* u (*функции* u) *по направлению* $\mathbf{l}$ *равна скалярному произ-*

ведению градиента этого поля u (*функции u*) *на единичный вектор* (*орт*) $\mathbf{l}$ *заданного направления.*

Подчеркнем, что в формулах (6), (7) в § 4.3 и в (2) фигурирует именно единичный вектор данного направления. Если производную скалярного поля u требуется вычислить по направлению произвольного вектора $\mathbf{a}$, то следует сначала найти его орт $\mathbf{l}$ по формуле $\mathbf{l} = \mathbf{a}/|\mathbf{a}|$, а уже затем подставить этот единичный вектор $\mathbf{l}$ в упомянутые формулы.

Сформулируем основные свойства градиента.

Теорема 1. *Модуль* (*длина, величина*) *градиента скалярного поля u* (*функции u*) *в данной точке M равен наибольшему значению производной* $\partial u/\partial \mathbf{l}$ *поля u по направлению в данной точке M среди всех возможных направлений* $\mathbf{l}$*, выходящих из данной точки, т. е. наибольшей скорости изменения скалярного поля u* (*функции u*)*. Градиент поля u имеет направление наискорейшего увеличения* (*возрастания*) *функции u.*

∇ Скалярное произведение двух любых векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ есть $(\mathbf{a},\mathbf{b}) \overset{\text{def}}{=} |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\varphi = |\mathbf{b}|\,\text{пр}_b\mathbf{a} = |\mathbf{a}|\,\text{пр}_a\mathbf{b}$, где φ – угол между обоими векторами, $\text{пр}_b\mathbf{a}$ – проекция вектора $\boldsymbol{a}$ на направление вектора $\mathbf{b}$. Из формулы (2) получаем

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{l}} = (\operatorname{grad} u, \mathbf{l}) = |\operatorname{grad} u|\cos\varphi = \text{пр}_l \operatorname{grad} u, \tag{3}$$

где φ – угол между векторами $\operatorname{grad} u$ и $\mathbf{l}$ (рис. 1). Так как $\cos\varphi$ принимает наибольшее значение, равное 1, при $\varphi = 0$, т. е. для направления $\mathbf{l}$, совпадающего с направлением вектора $\operatorname{grad} u$, то производная $\partial u/\partial \mathbf{l}$ достигает наибольшего значения также для этого направления, причем это наибольшее значение равно модулю градиента:

$$\max\frac{\partial u}{\partial \mathbf{l}} = |\operatorname{grad} u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}, \tag{4}$$

где $\max \partial u/\partial \mathbf{l}$ выбирается по всем возможным направлениям в точке M. #

Формула (3) означает, что *производная скалярного поля* u (*функции* u) *по направлению* $\mathbf{l}$ *равна проекции градиента* $\operatorname{grad} u$ *на это направление* (рис. 1).

Теорема 2. *Градиент скалярного поля* $u(M)$ *в данной точке* M *направлен по нормали к поверхности уровня поля* $u(M)$ (*к линии уровня в случае плоского поля* u), *проходящей через точку* M.

∇ Пусть вектор $\mathbf{l}$ лежит в касательной плоскости к поверхности уровня $u = \mathrm{const}$, проведенной через данную точку M (рис. 2). Тогда из равенства (2) и формулы (8) § 4.3 получаем $(\operatorname{grad} u, \mathbf{l}) = 0$, что равносильно (при $\operatorname{grad} u \neq \mathbf{0}$) условию взаимной ортогональности (перпендикулярности) векторов $\operatorname{grad} u$ и $\mathbf{l}$. Так как $\mathbf{l}$ – произвольный касательный вектор к поверхности уровня, то вектор $\operatorname{grad} u$ перпендикулярен к самой поверхности уровня в точке M и, значит, направлен по нормали к ней. #

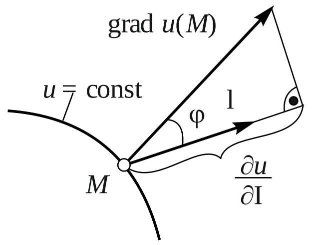


Рис. 1

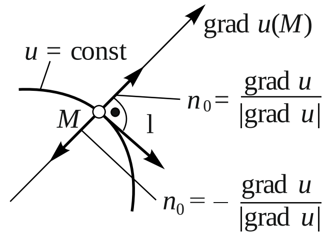


Рис. 2

В каждой точке M поверхности уровня имеется две единичные нормали, выражаемые по формуле $\mathbf{n}_0 = \pm\operatorname{grad} u / |\operatorname{grad} u|$ $\left(|\mathbf{n}_0| = 1\right)$, где знак соответствует той или иной ориентации поверхности уровня (рис. 2). Очевидно, нормаль $\mathbf{n}_0$, направление которой совпадает с направлением вектора $\operatorname{grad} u$ в точке M, отвечает знаку «+». Одна нормаль $\mathbf{n}_0$ к поверхности уровня ориентирована (направлена) в сторону возрастания функции $u(M)$, другая – в сторону ее убывания (противоположную).

Теорема 3. *Градиент направлен в сторону возрастания скалярного поля* (*функции* u).

∇ Пусть $\mathbf{n}_0$ – нормаль к поверхности уровня, направленная в сторону возрастания функции $u(M)$ (рис. 3). Производная функции $u(M)$

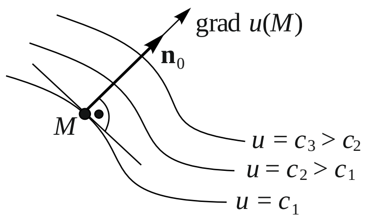


Рис. 3

в направлении этой нормали есть $\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \overset{\text{def}}{=} \left.\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{l}}\right|_{\mathbf{l}=\mathbf{n}_0} = \lim\limits_{\Delta l \to 0} \dfrac{u(M') - u(M)}{\Delta l}$, где $\Delta l = |\mathbf{MM}'|$ и $M' \to M$ вдоль $\mathbf{n}_0$. Так как по условию $u(M') > u(M)$, то $\Delta u = u(M') - u(M) > 0$, и, следовательно, $\partial u / \partial \mathbf{n} = (\operatorname{grad} u, \mathbf{n}_0) \geq 0$ и в силу (3) $\text{пр}_{\mathbf{n}_0} \operatorname{grad} u \geq 0$. Поэтому вектор $\operatorname{grad} u$ имеет то же направление, что и выбранная нормаль $\mathbf{n}_0$, т. е. в сторону возрастания поля $u(M)$. #

Если $\operatorname{grad} u = \mathbf{0}$ в точке *M*, то в силу (1) или (4) в этой точке $\partial u / \partial x = \partial u / \partial y = \partial u / \partial z = 0$. Поэтому, если в области *D* $\operatorname{grad} u = \mathbf{0}$, то $u \equiv \text{const}$ в *D*, и обратно. Если $u \neq \text{const}$ в *D*, то точки, в которых $\operatorname{grad} u = \mathbf{0}$, называются *особыми точками поля*; в этих точках направление $\operatorname{grad} u$, как и всякого нулевого вектора, считается неопределенным.

Определение. *Характеристики, или величины, выражающие свойства изучаемого понятия или объекта и не зависящие от выбора системы координат, называются инвариантами данного объекта.*

Например, длина вектора – его инвариант, длина дуги кривой и ее кривизна в данной точке – ее инварианты, площадь куска поверхности – его инвариант, данная поверхность уровня скалярного поля – инвариант этого поля, нормаль к данной поверхности в данной ее точке – инвариант этой поверхности. Напротив, угол наклона вектора к оси *Ox* (или *Oy*, *Oz*) и его проекции на оси *Ox*, *Oy*, *Oz* – это не инварианты вектора, угол между касательной к кривой и осью *Ox* – не инвариант кривой, частные производные $\partial u / \partial x,\ \partial u / \partial y,\ \partial u / \partial z$ – не инварианты скалярного поля $u(x,\ y,\ z)$, если направления осей *Ox*, *Oy*, *Oz* не фиксировать. (Все эти величины изменяются, если поворачивать оси *Ox*, *Oy*, *Oz*.)

Определение. *Определение данного понятия или объекта* (*в частности, данной величины*) *называется инвариантным, если оно сформулировано в терминах инвариантов, т. е. в терминах понятий или величин, не зависящих от выбора системы координат.*

Из свойств градиента, выражаемых теоремами 1–3, вытекает следующее *инвариантное определение градиента.*

Определение. *Градиентом скалярного поля $u(M)$ (скалярной функции $u(M)$) называется вектор, направленный по нормали к поверхности уровня в сторону возрастания функции $u(M)$ (это направление является направлением наибольшего возрастания функции $u(M)$) и имеющий модуль, равный наибольшей производной по направлению в данной точке (для всех возможных направлений) или равный значению производной поля $u(M)$ по упомянутому направлению.*

Перечислим *основные правила для вычисления градиента.*

1. $\operatorname{grad} u_0 = 0$, если $u_0 = \text{const}$.

2. Операция grad является линейной, т. е. $\operatorname{grad}(\alpha u + \beta v) = \alpha \operatorname{grad} u + \beta \operatorname{grad} v$, где $\alpha = \text{const},\ \beta = \text{const}$.

3. $\operatorname{grad}(uv) = v \operatorname{grad} u + u \operatorname{grad} v$.

4. $\operatorname{grad}\dfrac{u}{v} = \dfrac{v \operatorname{grad} u - u \operatorname{grad} v}{v^2}$, $v \neq 0$.

5. $\operatorname{grad} f(u) = f'(u) \operatorname{grad} u$, где $f(u)$ – дифференцируемая скалярная функция аргумента u.

6. $\operatorname{grad} f(u, v) = \dfrac{\partial f}{\partial u} \operatorname{grad} u + \dfrac{\partial f}{\partial v} \operatorname{grad} v$.

Здесь $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$ – дифференцируемые скалярные функции.

В частности, если $u = r = |\mathbf{r}|$, где $\mathbf{r} = |\mathbf{r}|\mathbf{r}_0 = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ – радиус-вектор точки $M(x, y, z)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ – его длина, то в силу равенства $\operatorname{grad} r = \mathbf{r}_0$ получаем $\operatorname{grad} f(r) = f'(r)\mathbf{r}_0$.

Все правила 1–6 вытекают из определения градиента вида (1) и правил дифференцирования функций нескольких переменных.

Пример. Для потенциала электростатического поля $u(x, y, z) = e / r$, где $r = |\mathbf{r}|$, $e > 0$ – величина заряда, найти: 1) выражение для градиента в произвольной точке $M(x, y, z)$; 2) градиент в точке $M_0(0, 6, 8)$; 3) наибольшую скорость изменения потенциала в этой точке и орт $\mathbf{l}$ направления, в котором она достигается.

Р е ш е н и е. 1) По формуле правила 5 имеем: $\operatorname{grad} u(M) = \left(\frac{e}{r}\right)' \operatorname{grad} r = -\frac{e}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r} = -\frac{e\mathbf{r}}{r^3} = -\frac{e}{r^3}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$. Здесь использовали полученное ранее $\operatorname{grad} r = \mathbf{r}_0 = \frac{\mathbf{r}}{r}$.

2) $r(M_0) = \sqrt{0 + 6^2 + 8^2} = 10$, $\operatorname{grad} u(M_0) = -(e/10^3)(6\mathbf{j} + 8\mathbf{k})$.

3) $\max \partial u / \partial \mathbf{l}\big|_{M_0} = |\operatorname{grad} u(M_0)| = (e/10^3)\sqrt{6^2 + 8^2} = e/100$;
$\mathbf{l} = \operatorname{grad} u(M_0) / |\operatorname{grad} u(M_0)| = -(0,6\mathbf{i} + 0,8\mathbf{j})$.

§ 4.5. ВЕКТОРНОЕ ПОЛЕ И ЕГО ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ. ВЕКТОРНЫЕ ЛИНИИ

Определение. *Говорят, что в области* $\Omega \subseteq R^n$ *определено* (*задано*) *векторное* (*стационарное векторное*) *поле*

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}(P) = \mathbf{a}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathbf{a}(\mathbf{r}), \qquad (1)$$

где $\mathbf{r}$ *– радиус-вектор точки* $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, *если каждой точке* $P \in \Omega$ *по определенному правилу ставится в соответствие вектор* $\mathbf{a}(P)$.

Таким образом, векторное поле задается векторной функцией $\mathbf{a} = \mathbf{a}(P)$ точки *P*; ее значением в каждой точке *P* является вектор $\mathbf{a}(P)$. Очевидно, что с математической точки зрения понятие векторного поля не отличается от понятия векторной функции.

Очевидно, что градиент любого скалярного поля $u(P)$ в области $\Omega \subseteq R^3$ представляет собой векторное поле в Ω. Если векторное поле **a** представимо в виде $\mathbf{a} = \operatorname{grad} u$, то скалярную функцию $u(P)$ называют *потенциалом* векторного поля **a**, а поле **a** называется *потенциальным*. Всякую скалярную функцию *u* можно рассматривать как потенциал векторного поля $\operatorname{grad} u$. Примерами векторных полей являются поле скоростей движения частиц жидкости или газа [24, 25, 36]; силовые поля: поле силы тяжести [24], напряженность **E** электрического поля, напряженность **H** магнитного поля [43]; поле векторов, касательных к кривым из некоторого семейства, заполняющих область Ω; поле нормалей к поверхностям уровня скалярного поля и т. д.

В трехмерном пространстве R^3 при введении прямоугольной системы координат x, y, z положим $x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z$. Тогда задание векторного поля (векторной функции) $\mathbf{a}(P)$ равносильно заданию трех скалярных функций $a_1(x, y, z)$, $a_2(x, y, z)$, $a_3(x, y, z)$, являющихся проекциями вектора $\mathbf{a}(P)$ на оси координат:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}(P) = a_1(x, y, z)\mathbf{i} + a_2(x, y, z)\mathbf{j} + a_3(x, y, z)\mathbf{k}. \qquad (2)$$

В частных случаях векторные поля могут иметь ту или иную симметрию, что упрощает решение ряда задач. Перечислим эти частные виды векторных полей [24, 25, 29].

1. Векторное поле $\mathbf{a} = \mathbf{a}(P)$ называется *однородным*, если существует система координат, в которой его проекции представлены в виде: $a_1 = a_1(x),\quad a_2 = a_3 = 0$.

2. Векторное поле $\mathbf{a} = \mathbf{a}(P)$ называется *центральным*, если в некоторой системе координат оно представимо в виде $\mathbf{a} = f(r)\mathbf{r}$, где $r = |\mathbf{r}|$, $f(r)$ – скалярная функция аргумента r.

3. Векторное поле $\mathbf{a} = \mathbf{a}(P)$ называется *плоскопараллельным*, если существует прямоугольная система координат, в которой $a_i = a_i(x, y)$, $i = 1, 2, 3$, т. е. проекции вектора $\mathbf{a}(P)$ не зависят от координаты z. В каждой плоскости $z = \text{const}$ такое поле одно и то же.

4. Векторное поле $\mathbf{a} = \mathbf{a}(P)$ называется *плоским*, если все векторы $\mathbf{a}$ параллельны одной и той же плоскости и в каждой плоскости, ей параллельной, векторное поле одно и то же. Если упомянутую в определении плоскость (или всякую, параллельную ей) выбрать в качестве плоскости xOy, то $a_3(x, y) \equiv 0$, а $a_1(x, y)$ и $a_2(x, y)$ не зависят от z: $\mathbf{a} = a_1(x, y)\mathbf{i} + a_2(x, y)\mathbf{j}$. Следовательно, плоское поле – это частный случай плоскопараллельного поля, когда $a_3(x, y) \equiv 0$.

5. Векторное поле $\mathbf{a} = \mathbf{a}(P)$ называется *осесимметричным*, если существует такая цилиндрическая система координат ρ, φ, z, что векторное поле $\mathbf{a}$ не зависит от угла φ: $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\rho, z)$. В частном случае, когда $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\rho)$, векторное поле называется *цилиндрическим.*

Определение. *Векторная функция* $\mathbf{a} = \mathbf{a}(P)$ *называется непрерывно дифференцируемой, если ее скалярные компоненты* $a_i(x, y, z)$, $i = 1, 2, 3$, *являются непрерывными функциями координат* x, y, z *точки* P *и имеют все непрерывные частные производные первого порядка.*

Основные характеристики векторного поля:

1) векторные линии и векторные поверхности, в частности векторные трубки (геометрические характеристики поля);

2) дивергенция ($\operatorname{div}\mathbf{a}$) и ротор, или вихрь ($\operatorname{rot}\mathbf{a}$) (дифференциальные характеристики поля);

3) поток и циркуляция (интегральные характеристики поля).

Дивергенция, ротор, поток и циркуляция имеют также вполне определенный ясный геометрический смысл (что будет показано далее).

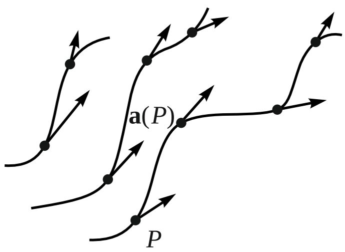


Рис. 1

Определение. *Векторной линией векторного поля* $\mathbf{a} = \mathbf{a}(P)$ *называется кривая, в каждой точке* P *которой вектор* $\mathbf{a}(P)$ *направлен по касательной к этой кривой* (рис. 1).

Для поля скоростей движения жидкости векторные линии (в фиксированный момент времени) называются *линиями тока*. Для силового физического векторного поля векторные линии называются *силовыми*.

Задание векторных линий и их ориентация дают представление лишь о направлении векторного поля в каждой точке $P \in \Omega$. Представление о величине векторного поля $\mathbf{a}(P)$ можно получить, если взять скалярное поле $|\mathbf{a}(P)|$ модуля векторного поля $\mathbf{a}(P)$ и построить соответствующие поверхности уровня $|\mathbf{a}(x, y, z)| = \sqrt{a^2{}_1 + a^2{}_2 + a^2{}_3} = \text{const}$. Но часто поступают другим образом и характеризуют величину вектора $\mathbf{a}(P)$ густотой векторных линий, проведенных в окрестности точки P. Для этого через элементарную (маленькую) площадку S_i с площадью Δs_i, перпендикулярную векторной линии (т. е. вектору $\mathbf{a}(P)$) в данной точке P, проводят N векторных линий, относя это число N к единице площади, причем $N = k|\mathbf{a}|\Delta s_i$, где k – коэффициент пропорциональности. Тогда густота векторных линий пропорциональна величине $|\mathbf{a}|$. При этом часть линий может начинаться (в источниках поля) или заканчиваться (в стоках поля) в области Ω.

Найдем дифференциальные уравнения векторной линии. Пусть $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ – радиус-вектор переменной (текущей) точки $P(x(t),\ y(t),\ z(t))$ векторной линии L векторного поля (1), где t – параметр (например, текущая длина точки кривой L). В силу определения векторной линии L вектор касательной к кривой L, равный $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}$, коллинеарен вектору $\mathbf{a}(P)$ вида (2) в каждой точке линии L. Если два вектора коллинеарны, то их скалярные проекции (координаты) пропорциональны:

$$\frac{dx}{a_1(x,\ y,\ z)} = \frac{dy}{a_2(x,\ y,\ z)} = \frac{dz}{a_3(x,\ y,\ z)}. \tag{3}$$

Это и есть искомая система дифференциальных уравнений (в симметричной форме) для векторных линий поля (1). Ее можно записать и в другой (нормальной) форме:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_2(x,\ y,\ z)}{a_1(x,\ y,\ z)};\quad \frac{dz}{dx} = \frac{a_3(x,\ y,\ z)}{a_1(x,\ y,\ z)}.$$

Если удалось найти два независимых интеграла системы (3):

$$\begin{cases} \varphi_1(x,\ y,\ z) = C_1, \\ \varphi_2(x,\ y,\ z) = C_2, \end{cases}$$

то получим два семейства поверхностей, пересечение которых определяет векторные линии. Каждой паре чисел $(C_1,\ C_2)$ отвечают пара поверхностей и одна векторная линия. Изменяя параметры C_1 и C_2, получаем семейство векторных линий. Пусть в области Ω

для системы (3) выполнены условия теоремы 1 § 3.18 гл. 3 о существовании и единственности решения задачи Коши. Тогда через каждую точку $P_0(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$ проходит единственная векторная линия, определяемая равенствами

$$\begin{cases} \varphi_1(x, y, z) = \varphi_1(x_0, y_0, z_0), \\ \varphi_2(x, y, z) = \varphi_2(x_0, y_0, z_0). \end{cases}$$

В случае плоского векторного поля дифференциальные уравнения его векторных линий принимают вид

$$\frac{dx}{a_1(x, y)} = \frac{dy}{a_2(x, y)} = \frac{dz}{0} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{a_2(x, y)}{a_1(x, y)}, \\ z = \text{const}. \end{cases}$$

Отсюда следует, что векторные линии плоского поля являются плоскими кривыми. Они лежат в плоскостях $z = \text{const}$, параллельных плоскости xOy.

Пусть $\mathbf{a} = \mathbf{a}(P)$ – векторное поле, заданное в области $\Omega \subseteq R^3$.

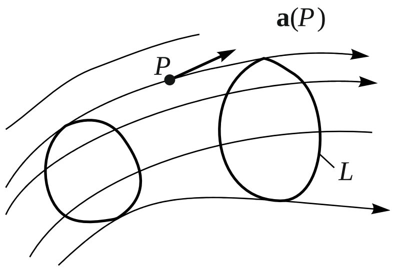


Рис. 2

Определение. *Векторной поверхностью векторного поля* $\mathbf{a}(P)$ называется поверхность, образованная векторными линиями («сотканная» из них), проходящими через каждую точку некоторой кривой $L \subset \Omega$, не совпадающей с какой-либо векторной линией поля $\mathbf{a}(P)$. Если кривая L замкнутая, то эта поверхность называется *векторной трубкой* (рис. 2). В случае линий тока [24, 25, 36] векторная трубка называется *трубкой тока.*

§ 4.6. ПОТОК ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

Пусть вектор $\mathbf{a}(P)$ в некоторой области Ω определяет поле линейных скоростей стационарно движущейся несжимаемой жидкости и $Q \subset \Omega$ – двусторонняя гладкая незамкнутая ориентированная поверхность. Вычислим W – количество жидкости, протекающей за единицу времени через поверхность Q в направлении $\mathbf{n^0}$ ($\mathbf{n^0}$ – единичный вектор нормали к выбранной стороне поверхности, т. е. $\mathbf{n^0}$ – ориентация поверхности). Для решения поставленной задачи воспользуемся принятой в интегральном исчислении и уже неоднократно применявшейся схемой.

Разобьем поверхность Q на n достаточно малых частей ΔQ_1, ΔQ_2, ..., ΔQ_n, площади которых обозначим Δq_1, Δq_2, ..., Δq_n соответственно. Выберем точки $P_i \in \Delta Q_i$, $i=\overline{1,n}$, и вычислим $\mathbf{a}(P_i)$. Ввиду малости поверхности ΔQ_i будем считать ее плоской, а значение $\mathbf{a}(P_i)$ примем постоянным для любой точки этой поверхности. При таких предположениях количество жидкости ΔW_i, протекающей через поверхность ΔQ_i за единицу времени в направлении $\mathbf{n^0}(P_i)$, будет приближенно равно объему цилиндра с площадью основания Δq_i и образующими, параллельными $\mathbf{a}(P_i)$. Высота этого цилиндра равна проекции вектора $\mathbf{a}(P_i)$ на направление нормали $\mathbf{n^0}(P_i)$ (рис. 1). Таким образом, $\Delta W_i \approx \text{пр}_{\mathbf{n^0}}\mathbf{a}(P_i)\Delta q_i$. Суммируя соответствующие выражения по всем элементарным поверхностям ΔQ_i, $i=\overline{1,n}$, получаем приближенное значение количества жидкости, протекающей в единицу времени через поверхность Q:

$$W \approx \sum_{i=1}^{n} \text{пр}_{\mathbf{n^0}(P_i)}\mathbf{a}(P_i)\Delta q_i = \sum_{i=1}^{n}\Big(\mathbf{a}(P_i),\ \mathbf{n^0}(P_i)\Big)\Delta q_i\ . \qquad (1)$$

Для определения точного значения этого количества жидкости естественно увеличивать число поверхностей ΔQ_i, уменьшая их диаметры. За точное значение W принимается предел суммы (1) при условии $\lambda \to 0$, где λ – наибольший из диаметров площадок ΔQ_i, $i=\overline{1,n}$.

Выражение (1) является n-й интегральной суммой для функции $\mathbf{a}=\mathbf{a}(P)$ по ориентированной поверхности Q. Предел суммы (1) при $\lambda \to 0$, если он существует, конечен и не зависит от способа построения этой суммы, определяет поверхностный интеграл второго рода от векторной функции $\mathbf{a} = \mathbf{a}(P)$, описывающей поле линейных скоростей движущейся жидкости:

$$W = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Big(\mathbf{a}(P_i),\ \mathbf{n^0}(P_i) \Big) \Delta q_i = \iint_Q (\mathbf{a},\ \mathbf{n^0})\, dq .$$

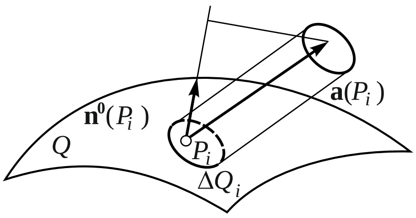


Рис. 1

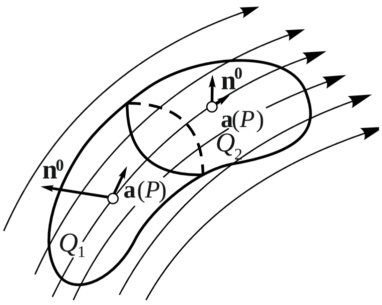


Рис. 2

Определение. *Потоком* Π *векторного поля* $\mathbf{a} = \mathbf{a}(P)$ *через ориентированную поверхность* Q *называется число, равное значению поверхностного интеграла второго рода* $\iint_Q (\mathbf{a},\ \mathbf{n^0})\, dq$.

Для потока векторного поля приняты следующие представления:

$$\Pi = \iint_Q (\mathbf{a},\ \mathbf{n^0})\, dq = \iint_Q \text{пр}_{\mathbf{n^0}} \mathbf{a} dq = \iint_Q (\mathbf{a},\ \mathbf{dq}), \qquad (2)$$

где $\mathbf{dq} = \mathbf{n^0} dq$.

Термин «поток» для введенной скалярной характеристики векторного поля употребляется независимо от физического смысла $\mathbf{a}(P)$. Поток вектора зависит от выбора стороны поверхности (направления вектора $\mathbf{n^0}$); ему присущи и другие свойства, которыми обладает поверхностный интеграл второго рода.

Будем считать, что жидкость *втекает* в поверхность Q, если $\frac{\pi}{2} < (\mathbf{n^0},\ \mathbf{a}) < \pi$, и *вытекает* из поверхности Q, если $0 < (\mathbf{n^0},\ \mathbf{a}) < \frac{\pi}{2}$.

Рассмотрим физическое истолкование понятия «поток» в случае замкнутой поверхности.

Выберем внешнюю сторону замкнутой поверхности Q, т. е. возьмем внешнюю единичную нормаль $\mathbf{n^0}$ к Q (рис. 2), помещенной в поле $\mathbf{a} = \mathbf{a}(P)$ линейных скоростей движущейся несжимаемой жидкости. Будем считать, что Q состоит из двух частей Q_1 и Q_2, через которые жидкость соответственно втекает и вытекает из области, ограниченной поверхностью Q.

Поток Π вектора $\mathbf{a}(P)$ через внешнюю сторону замкнутой поверхности Q будет равен сумме двух поверхностных интегралов второго рода, т. е. сумме двух потоков

$$\Pi = \oiint\limits_{Q} (\mathbf{a},\ \mathbf{n^0})\, dq = \iint\limits_{Q_1} (\mathbf{a},\ \mathbf{n^0})\, dq + \iint\limits_{Q_2} (\mathbf{a},\ \mathbf{n^0})\, dq = \Pi_1 + \Pi_2 .$$

Поток $\Pi_1 < 0$, так как угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{n^0}$ на поверхности Q_1 – тупой. Поток $\Pi_2 > 0$, так как указанный угол на поверхности Q_2 – острый. Поток Π_1 выражает количество жидкости, поступающей в часть пространства, ограниченную замкнутой поверхностью Q, за единицу времени, Π_2 – соответственно количество вытекающей из него жидкости. Суммарный поток $\Pi = \Pi_1 + \Pi_2$ выражает алгебраическую сумму количеств поступающей и вытекающей жидкости. Если $\Pi > 0$, то жидкости вытекает больше, чем поступает, следовательно, внутри поверхности Q имеются *источники.* Если $\Pi < 0$, то внутри поверхности Q имеются *стоки*, так как вытекает меньше жидкости, чем поступает.

Применительно к электростатическому полю примерами источников и стоков могут служить точки, в которых находятся соответственно положительные и отрицательные заряды.

Подчеркнем, что поток векторного поля является его суммарной характеристикой, описывающей поле с помощью помещенной в него поверхности Q.

Вычисление потока как поверхностного интеграла второго рода было рассмотрено в § 2.12. Помимо изложенного там метода (сведение этого интеграла в R^3 к трем двойным интегралам по областям, являющимся проекциями поверхности Q на координатные плоскости) используется метод выражения потока вектора через поверхностный интеграл первого рода с последующим его вычислением. Рассмотрим этот метод.

Пусть незамкнутая поверхность Q пересекается любой прямой, параллельной оси Oz, не более чем в одной точке и проектируется на плоскость Oxy в область D_{xy}. В этом случае уравнение поверхности Q может быть записано в виде $z = f(x, y)$. Как показано в § 2.4, элемент площади такой поверхности $dq = dxdy / |\cos\gamma|$. Следовательно, вычисление потока через выбранную сторону поверхности Q приводит к двойному интегралу

$$\Pi = \iint\limits_{Q} (\mathbf{a},\ \mathbf{n^0})\, dq = \iint\limits_{D_{xy}} \left.\frac{(\mathbf{a},\ \mathbf{n^0})}{|\cos\gamma|}\right|_{z=f(x,\,y)} dxdy\,. \tag{3}$$

Запись $\left.\dfrac{(\mathbf{a},\ \mathbf{n^0})}{|\cos\gamma|}\right|_{z=f(x,\,y)}$ означает, что в подынтегральной функции вместо z надо подставить $z = f(x, y)$.

Уравнение поверхности Q $(z - f(x, y) = 0)$ можно рассматривать как уравнение поверхности уровня скалярного поля: $U = z - f(x, y) = U(x, y, z)$. Следовательно, вектор $\mathbf{n^0}$ может быть найден через градиент этого поля:

$$\mathbf{n^0} = \pm\frac{\operatorname{grad} U}{|\operatorname{grad} U|} = \pm\frac{\dfrac{\partial U}{\partial x}\mathbf{i} + \dfrac{\partial U}{\partial y}\mathbf{j} + \dfrac{\partial U}{\partial z}\mathbf{k}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial U}{\partial z}\right)^2}}\,.$$

В последней формуле знак зависит от выбора стороны поверхности Q, а $\cos\gamma$ равен коэффициенту при орте $\mathbf{k}$:

$$\cos\gamma = \pm\frac{U'_z}{\sqrt{\left(U'_x\right)^2+\left(U'_y\right)^2+\left(U'_z\right)^2}}.$$

Если угол γ между осью Oz и вектором нормали $\mathbf{n^0}$ – острый, в формулах для вычисления $\mathbf{n^0}$ и $\cos\gamma$ берется знак «+», если же угол γ – тупой, то ставится знак «–».

В случаях когда поверхность Q удобнее проектировать на плоскость Oyz или Oxz, для вычисления потока можно воспользоваться соответственно формулами:

$$\Pi = \iint\limits_{Dyz} \left.\frac{(\mathbf{a},\ \mathbf{n^0})}{|\cos\alpha|}\right|_{x=\varphi(y,\ z)} dydz,$$

$$\Pi = \iint\limits_{D_{xz}} \left.\frac{(\mathbf{a},\ \mathbf{n^0})}{|\cos\beta|}\right|_{y=\psi(x,\ z)} dxdz.$$

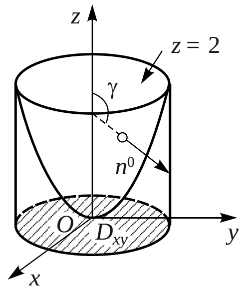


Рис. 3

Пример. Вычислить поток вектора $\mathbf{a} = y^2\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ через часть поверхности $z = x^2 + y^2$, отсеченную плоскостью $z = 2$, в направлении внешней нормали (рис. 3).

Р е ш е н и е. В данном случае любая прямая, параллельная оси Oz, пересекает данную поверхность Q в единственной точке (что не имеет места в отношении осей Ox и Oy). Для решения задачи наиболее удобно воспользоваться формулой (3). Предварительно найдем $U = U(x,\ y,\ z) = z - x^2 - y^2$. Тогда

$$\mathbf{n^0} = -\frac{-2x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}} = \frac{2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} - \mathbf{k}}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}.$$

(Знак «$-$» взят потому, что $\pi/2 \le \gamma \le \pi$, и, следовательно, $\cos\gamma < 0$.) Имеем

$$\cos\gamma = -\frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}, \quad dq = \frac{dxdy}{|\cos\gamma|} = \sqrt{1+4x^2+4y^2}\cdot dxdy,$$

$$(\mathbf{a},\ \mathbf{n^0}) = \frac{2y^3 - z}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}.$$

Искомый поток

$$\Pi = \iint\limits_{Q} (\mathbf{a},\ \mathbf{n^0})\, dq = \iint\limits_{D_{xy}} (2y^3 - z)\Big|_{z=x^2+y^2} dxdy = \iint\limits_{D_{xy}} (2y^3 - x^2 - y^2)\, dxdy.$$

Полученный двойной интеграл целесообразно вычислять в полярных координатах, так как область интегрирования D_{xy} – круг радиусом $\sqrt{2}$ с центром в начале координат:

$$\Pi = \iint\limits_{Q} (\mathbf{a},\ \mathbf{n^0})\, dq = \iint\limits_{D'} (2\rho^3 \sin^3\varphi - \rho^2)\rho d\rho d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{2}} (2\rho^4 \sin^3\varphi - \rho^3)\, d\rho = -2\pi.$$

(Переход к полярным координатам осуществлен с помощью замены переменных $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ (см. § 2.5), пределы интегрирования определены видом области D': $0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \rho \le \sqrt{2}$.)

§ 4.7. ДИВЕРГЕНЦИЯ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

В поле $\mathbf{a} = \mathbf{a}(P)$, $P \in \Omega$, выберем точку P, принадлежащую области $\Delta\Omega \subset \Omega$, границей которой служит замкнутая поверхность $\Delta Q \subset \Omega$, и рассмотрим отношение

$$\frac{\oiint\limits_{\Delta Q} (\mathbf{a},\ \mathbf{n}^0)\, dq}{\Delta v} = \frac{\oiint\limits_{\Delta Q} (\mathbf{a}(P),\ \mathbf{dq})}{\Delta v}. \tag{1}$$

Здесь Δv – величина объема, ограниченного замкнутой поверхностью ΔQ.

С учетом формул (2) § 4.6 отношение (1) можно назвать средним расходом жидкости через поверхность ΔQ. Когда Δv будет стремиться к нулю (при этом поверхность ΔQ стягивается в точку P), средний расход жидкости будет характеризовать расход жидкости в точке $P \in \Omega$ в единицу времени. Теперь, независимо от физического истолкования вектора $\mathbf{a}(P)$, введем скалярную характеристику векторного поля в точке.

Определение. *Дивергенцией векторного поля* $\mathbf{a} = \mathbf{a}(P)$ *в точке* P, *или расходимостью, обозначаемой* $\operatorname{div} \mathbf{a}(P)$, *называется скалярная величина, равная пределу отношения потока векторного поля* $\mathbf{a} = \mathbf{a}(P)$ *через замкнутую поверхность* ΔQ *к величине* Δv *объема, ограниченного этой поверхностью, при* $\Delta v \to 0$, *т. е. при условии, что* ΔQ *стягивается в точку* P:

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{a}(P) = \lim_{\substack{\Delta v \to 0 \\ (\Delta Q \to P)}} \frac{\oiint\limits_{\Delta Q} (\mathbf{a}(P),\ \mathbf{dq})}{\Delta v}}. \tag{2}$$

С учетом физического смысла потока векторного поля дивергенция характеризует отнесенную к единице объема мощность потока, «исходящего» из точки P, т. е. мощность находящегося в точке P источника при $\operatorname{div} \mathbf{a}(P) > 0$ или стока при $\operatorname{div} \mathbf{a}(P) < 0$. Если $\operatorname{div} \mathbf{a}(P) = 0$, то в точке P нет ни источника, ни стока.

Определение дивергенции равенством (2) инвариантно по отношению к выбору системы координат. В случае декартовой системы координат дивергенция векторного поля $\mathbf{a}(P) = X(x,\ y,\ z)\mathbf{i} + Y(x,\ y,\ z)\mathbf{j} + Z(x,\ y,\ z)\mathbf{k}$ определяется формулой

$$\operatorname{div} \mathbf{a}(P) = \frac{\partial X(P)}{\partial x} + \frac{\partial Y(P)}{\partial y} + \frac{\partial Z(P)}{\partial z}. \tag{3}$$

Выражение (3) можно получить из инвариантного определения дивергенции [см. формулу (2)].

Пример. Найти дивергенцию векторного поля $\mathbf{a}(P) = \mathbf{a}(x,\ y,\ z) = y^2\mathbf{i} - (x^2 + y^2)\mathbf{j} + z(3y^2 + x)\mathbf{k}$ в точках $P_1(-2, 1, -2)$, $P_2(7, 0, 1)$, $P_3(0, 0, 1)$.

Р е ш е н и е. Заданное поле определено на всем пространстве R^3. Для решения задачи воспользуемся формулой (3). Найдем частные производные от функций, являющихся координатами вектора $\mathbf{a}(P)$, и их значения в точках P_1, P_2, P_3:

$$X(x,\ y,\ z) = y^2,\ \ Y(x,\ y,\ z) = -(x^2 + y^2),\ \ Z(x,\ y,\ z) = z(3y^2 + x),$$

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} =$$

$$= \frac{\partial y^2}{\partial x} + \frac{\partial(-(x^2 + y^2))}{\partial y} + \frac{\partial(z(3y^2 + x))}{\partial z} = -2y + 3y^2 + x.$$

Тогда согласно формуле (3)

$$\operatorname{div}\mathbf{a}(P_1) = -2 + 3 - 2 = -1,\ \operatorname{div}\mathbf{a}(P_2) = 0 + 0 + 7 = 7,$$

$$\operatorname{div}\mathbf{a}(P_3) = 0 + 0 + 0 = 0.$$

Таким образом, данное поле в точке P_1 имеет сток, в точке P_2 – источник, а в точке P_3 нет ни источника, ни стока.

Перечислим основные свойства дивергенции.

1. $\operatorname{div}\mathbf{c} = 0$, $\mathbf{c} = \mathbf{const}$.
2. $\operatorname{div}(\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}) = \alpha\operatorname{div}\mathbf{a} + \beta\operatorname{div}\mathbf{b}$, $\alpha, \beta \in R$ (линейность).
3. $\operatorname{div}(U\mathbf{a}) = U\operatorname{div}\mathbf{a} + (\mathbf{a},\ \operatorname{grad}U)$, $U = U(x,\ y,\ z)$.
4. $\operatorname{div}(U\mathbf{c}) = (\mathbf{c},\ \operatorname{grad}U)$, $\mathbf{c} = \mathbf{const}$.

Докажем, к примеру, справедливость свойства 4:

$$\operatorname{div}(U\mathbf{c}) = \frac{\partial(U\mathbf{c})}{\partial x} + \frac{\partial(U\mathbf{c})}{\partial y} + \frac{\partial(U\mathbf{c})}{\partial z} = \mathbf{c}\frac{\partial U}{\partial x} + \mathbf{c}\frac{\partial U}{\partial y} + \mathbf{c}\frac{\partial U}{\partial z} =$$

$$= \left(\mathbf{c},\ \left(\frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{k}\right)\right) = (\mathbf{c},\ \operatorname{grad}U).$$

§ 4.8. ТЕОРЕМА ОСТРОГРАДСКОГО–ГАУССА

Теорема 1 (Остроградского–Гаусса). *Если векторная функция* $\mathbf{a} = \mathbf{a}(P)$ *непрерывно дифференцируема в области* Ω, *ограниченной замкнутой поверхностью* Q, *то поток векторного поля* $\mathbf{a} = \mathbf{a}(P)$ *через поверхность* Q *в направлении внешней нормали равен тройному интегралу по области* Ω *от дивергенции этого векторного поля, т. е.*

$$\boxed{\oiint\limits_Q (\mathbf{a},\ \mathbf{n}^0)\, dq = \iiint\limits_\Omega \operatorname{div} \mathbf{a}(P)\, dv.} \tag{1}$$

∇ Рассмотрим одно из доказательств сформулированной теоремы, основанное на определении дивергенции и известной из математического анализа теореме о разности между функцией и ее конечным пределом. Для этого разобьем область Ω на n элементарных областей $\Delta\Omega_i$, границами которых служат поверхности ΔQ_i, а внешними единичными нормалями – векторы $\mathbf{n}_i^0$, $i = \overline{1, n}$.

1. Если функция $\mathbf{a} = \mathbf{a}(P)$, $P \in \Omega$, непрерывно дифференцируема в области Ω, то в каждой точке этой области существует $\operatorname{div} \mathbf{a}(P)$, являющаяся непрерывной функцией координат точки P. Тогда для элементарной области $\Delta\Omega_i$, $i = \overline{1, n}$, на основе формулы (2) § 4.7 имеем

$$\frac{\oiint\limits_{\Delta Q_i} \left(\mathbf{a},\ \mathbf{n}_i^0\right) dq}{\Delta v_i} = \operatorname{div} \overline{\mathbf{a}}(P) + \alpha_i(\Delta v_i), \tag{2}$$

где Δv_i – объем элементарной области $\Delta\Omega_i$ и $\lim\limits_{\Delta v_i \to 0} \alpha_i(\Delta v_i) = 0$. Умножаем обе части равенства (2) на Δv_i, в результате получаем поток через поверхность ΔQ_i:

$$\oiint\limits_{\Delta Q_i} \left(\mathbf{a},\ \mathbf{n}_i^0\right) dq = \operatorname{div} \mathbf{a}(P_i)\Delta v_i + \alpha_i(\Delta v_i)\Delta v_i, \tag{3}$$

где $P_i \in \Delta\Omega_i$; $\alpha_i(\Delta v_i)$ – бесконечно малая при $\Delta v_i \to 0$.

Просуммируем потоки (3) по всем элементарным поверхностям ΔQ_i, $i=\overline{1,n}$:

$$\sum_{i=1}^{n} \oint\!\!\!\oint_{\Delta Q_i} \left(\mathbf{a},\ \mathbf{n}_i^0\right) dq = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{div} \mathbf{a}(P_i)\Delta v_i + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(\Delta v_i)\Delta v_i . \qquad (4)$$

Отметим, что внешние нормали $\mathbf{n}_i^0$ граней ΔQ_i, соприкасающихся друг с другом, противоположно направлены, и поэтому потоки вектора $\mathbf{a}(P)$ через «перегородки», с помощью которых выполнено разбиение Ω на элементарные области $\Delta\Omega_i$, $i=\overline{1,n}$, в сумме дадут нули. В результате в левой части равенства (4) будет стоять величина потока вектора $\mathbf{a}(P)$ через поверхность Q, ограничивающую область Ω:

$$\sum_{i=1}^{n} \oint\!\!\!\oint_{\Delta Q_i} \left(\mathbf{a},\ \mathbf{n}_i^0\right) dq = \oint\!\!\!\oint_{Q} (\mathbf{a},\ \mathbf{n}^0)\, dq .$$

Перейдем к пределу в равенстве (4) при условии, что все элементарные области $\Delta\Omega_i$ стягиваются в точки, т. е. $\Delta v_i \to 0$, или, что то же, $\lambda \to 0$ (λ – максимальный из диаметров элементарных областей $\Delta\Omega_i$):

$$\lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} \oint\!\!\!\oint_{\Delta Q_i} \left(\mathbf{a},\ \mathbf{n}_i^0\right) dq = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} \operatorname{div} \mathbf{a}(P_i)\Delta v_i + \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(\Delta v_i)\Delta v_i . \quad (5)$$

Рассмотрим значения полученных пределов:

$$\lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} \oint\!\!\!\oint_{\Delta Q_i} \left(\mathbf{a},\ \mathbf{n}_i^0\right) dq = \oint\!\!\!\oint_{Q} (\mathbf{a},\ \mathbf{n}^0)\, dq ,$$

$$\lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} \operatorname{div} \mathbf{a}(P_i)\Delta v_i = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{a}(P) dv .$$

Покажем, что предел второго слагаемого правой части равенства (5) равен нулю: $\alpha_i(\Delta v_i) \le \max_i \alpha_i(\Delta v_i) = \alpha(\Delta v_i)$, $\lim_{\lambda\to 0} \alpha(\Delta v_i) = 0$.

Следовательно,

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(\Delta v_i)\Delta v_i \le \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\alpha(\Delta v_i)\Delta v_i =$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\alpha(\Delta v_i)\sum_{i=1}^{n}\Delta v_i = v\lim_{\lambda\to 0}\alpha(\Delta v_i) = 0.$$

Таким образом, предельное равенство (5) приведено к виду

$$\oiint\limits_{Q}(\mathbf{a},\ \mathbf{n}^0)\,dq = \iiint\limits_{\Omega}\operatorname{div}\,\mathbf{a}(P)\,dv\,.$$

Итак, доказана справедливость формулы (1), которая является аналитическим выражением *теоремы Остроградского–Гаусса в векторной форме.* Для практических приложений удобно скалярное представление ее правой части

$$\oiint\limits_{Q}(\mathbf{a},\ \mathbf{n}^0)\,dq = \iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial X(P)}{\partial x}+\frac{\partial Y(P)}{\partial y}+\frac{\partial Z(P)}{\partial z}\right)dv\,.$$

Формула (1) дает возможность свести задачу вычисления поверхностного интеграла второго рода по замкнутой поверхности Q к более простой: вычислению тройного интеграла по области Ω, заключенной внутри данной поверхности Q.

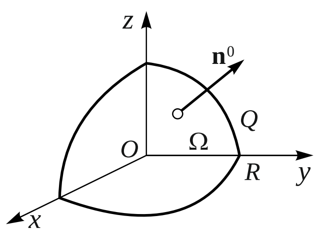


Рис. 1

Пример 1. С помощью формулы Остроградского–Гаусса вычислить интеграл $\oiint\limits_{Q}(\mathbf{a},\ \mathbf{n}^0)\,dq$, если Q – лежащая в первом квадранте замкнутая ориентированная поверхность, ограниченная сферой $x^2+y^2+z^2=R^2$ и координатными плоскостями, $\mathbf{n}^0$ – внешняя нормаль к Q, $\mathbf{a}=x^2\mathbf{i}+z^2\mathbf{k}$ (рис. 1).

Решение. Найдем выражение $\operatorname{div}\mathbf{a}(P)=2x+2z$. Согласно формуле (1)

$$\oiint\limits_Q (\mathbf{a},\ \mathbf{n}^0)\,dq = 2\iiint\limits_\Omega (x+z)\,dv\,.$$

С учетом вида пространственной области Ω вычисления целесообразно вести в сферических координатах (см. § 2.6), поскольку в этом случае пределы интегрирования по всем переменным $r,\ \theta,\ \varphi$ – постоянные величины:

$$2\iiint\limits_\Omega (x+z)\,dv = 2\iiint\limits_{\Omega'} (r\cos\varphi\sin\theta + r\cos\theta)\,r^2\sin\theta\,drd\varphi d\theta =$$

$$=2\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi\int\limits_0^{\pi/2} d\theta\int\limits_0^{R}(\cos\varphi\sin^2\theta+\cos\theta\sin\theta)\,r^3dr=$$

$$=\frac{R^4}{2}\int\limits_0^{\pi/2}\left(\cos\varphi\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)d\varphi=\frac{\pi R^4}{4}.$$

Пример 2. Используя теорему Остроградского–Гаусса, вычислить поток векторного поля

$$\mathbf{a}=\left(\frac{x^2y}{1+y^2}+6yz\right)\mathbf{i}+2x\operatorname{arctg}y\,\mathbf{j}-\frac{2xz(1+y)+1+y^2}{1+y^2}\mathbf{k}$$

через внешнюю сторону поверхности $z=1-x^2-y^2$, расположенную над плоскостью Oxy.

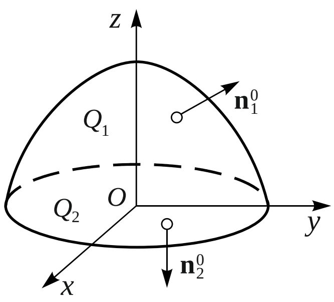


Рис. 2

Решение. Для того чтобы можно было применить теорему Остроградского–Гаусса, «замкнем» снизу данную поверхность частью плоскости Oxy, ограниченной окружностью $x^2+y^2=1$.

Пусть Ω – пространственная область, ограниченная замкнутой кусочно-гладкой поверхностью Q, состоящей из параболоида вращения $z=1-x^2-y^2$

(Q_1) и круга на плоскости Oxy (Q_2) (рис. 2). Чтобы воспользоваться формулой (1), найдем $\operatorname{div}\mathbf{a}$:

$$\operatorname{div}\mathbf{a}(P)=\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=\frac{2xy}{1+y^2}+\frac{2x}{1+y^2}-\frac{2x(1+y)}{1+y^2}=0\,.$$

На основе формулы (1) поток Π через замкнутую поверхность Q равен нулю. Если обозначить через Π_1 и Π_2 потоки через поверхности параболоида и круга соответственно, то с учетом свойств ПИ-2

$$\Pi=\Pi_1+\Pi_2=\oiint\limits_{Q_1}\left(\mathbf{a},\ \mathbf{n}_1^0\right)dq+\oiint\limits_{Q_2}\left(\mathbf{a},\ \mathbf{n}_2^0\right)dq=0\,.$$

Следовательно, искомый поток

$$\Pi_1=\oiint\limits_{Q_1}\left(\mathbf{a},\ \mathbf{n}_1^0\right)dq=-\oiint\limits_{Q_2}\left(\mathbf{a},\ \mathbf{n}_2^0\right)dq\,.$$

На поверхности Q_2

$$\mathbf{a}=\frac{x^2y}{1+y^2}\mathbf{i}+2x\operatorname{arctg}y\mathbf{j}-\mathbf{k},\quad \mathbf{n}_2^0=-\mathbf{k},\quad \left(\mathbf{a},\ \mathbf{n}_2^0\right)=1\,.$$

Таким образом, $\Pi_1=-\oiint\limits_{Q_2}dq=-\pi$.

§ 4.9. ЦИРКУЛЯЦИЯ И РОТОР ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

4.9.1. ЦИРКУЛЯЦИЯ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

Рассмотрим область $\Omega\subset R^3$, ориентированную линию L, принадлежащую Ω, и векторную функцию $\mathbf{a}=\mathbf{a}(P)$, определенную на L.

В § 2.10 было введено понятие криволинейного интеграла второго рода $\int\limits_L(\mathbf{a},\ \boldsymbol{\tau}^\circ)dl$. Там же перечислены свойства этого интеграла, дано его механическое истолкование (работа силы $\mathbf{a}(P)$ при перемещении материальной точки по дуге L, ориентированной единичным вектором касательной $\boldsymbol{\tau}^0$). В § 2.11 было рассмотрено вычисление КИ-2.

Криволинейный интеграл второго рода в векторном анализе называют *линейным интегралом.* На этом понятии основано исследование *вихревых полей.*

Определение. *Циркуляцией* Ц *векторного поля* $\mathbf{a} = \mathbf{a}(P)$ *вдоль замкнутой ориентированной кривой* L *называется число, равное значению линейного интеграла*:

$$\boxed{\text{Ц} = \oint\limits_L (\mathbf{a},\ \boldsymbol{\tau}^0)\,dl = \oint\limits_L \text{пр}_{\boldsymbol{\tau}^0}\mathbf{a}dl = \oint\limits_L (\mathbf{a},\ d\mathbf{r}) = \int\limits_L Xdx + Ydy + Zdz,} \tag{1}$$

где $\mathbf{a} = \mathbf{a}(P) = X(x,\ y,\ z)\,\mathbf{i} + Y(x,\ y,\ z)\,\mathbf{j} + Z(x,\ y,\ z)\,\mathbf{k}$; $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ – *векторное уравнение линии* L.

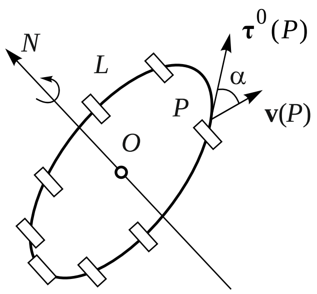


Рис. 1

Выясним физический смысл циркуляции, рассматривая, в частности, векторное поле $\mathbf{a} = \mathbf{a}(P)$ как поле $\mathbf{v} = \mathbf{v}(P)$ линейных скоростей движущейся жидкости.

Поместим в поток круглую пластинку с лопастями, расположенными по ее ободу – окружности L (рис. 1).

Частицы жидкости, действуя на лопасти, будут создавать вращательные моменты, суммарное действие которых может привести пластинку во вращение вокруг оси $\mathbf{N}$, перпендикулярной к плоскости, в которой расположена пластинка, и проходящей через ее центр. Вращательный момент поля в каждой точке P будет характеризоваться проекцией вектора $\mathbf{v}(P)$ на вектор $\boldsymbol{\tau}^0(P)$, касательной к окружности L, т. е. скалярным произведением $(\mathbf{v},\ \boldsymbol{\tau}^0) = \text{пр}_{\boldsymbol{\tau}^0}\mathbf{v}$. Суммирование вращательных моментов по всему контуру пластинки приводит к понятию циркуляции вектора $\mathbf{v}(P) = \mathbf{a}(P)$. Абсолютная величина циркуляции определяет угловую скорость вращения пластинки вокруг оси $\mathbf{N}$, проходящей через центр окружности L. Знак циркуляции показывает, в какую сторону осуществляется вращение относительно ориентации линии L. Так как под знаком интеграла (1) стоит скалярное произведение, то Ц зависит не только от модулей вектора $\mathbf{a}(P)$, но и от углов α (см. рис. 1) между векторным полем и касательными к кривой L: чем меньше углы, тем больше циркуляция. Если во всех точках замкнутого контура L вектор $\mathbf{a}(P)$ ортогонален к L, то циркуляция равна нулю и вращательного движения вокруг этого контура не будет. Циркуляция может обращаться в нуль и за счет того, что на одной части контура L значение линейного интеграла (1) положительно, а на другой – отрицательно, и эти величины равны по модулю. Представляет интерес случай, когда замкнутый контур L есть векторная линия поля $\mathbf{a} = \mathbf{a}(P)$. Тогда $\text{пр}_{\boldsymbol{\tau}^0}\mathbf{a} = |\mathbf{a}|$,

$$\text{Ц} = \oint_L \text{пр}_{\boldsymbol{\tau}^0}\mathbf{a}\,dl = \oint_L |\mathbf{a}|\,dl \neq 0 \quad (\mathbf{a} \neq 0).$$

Следовательно, тот факт, что циркуляция поля $\mathbf{a} = \mathbf{a}(P)$, $P \in \Omega$, равна нулю по любому замкнутому контуру $L \subset \Omega$, является достаточным условием отсутствия в поле замкнутых векторных линий.

Пример 1. Найти циркуляцию векторного поля $\mathbf{a} = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$ вдоль линии $L: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x + y + z = 1. \end{cases}$

Р е ш е н и е. В соответствии с формулой (1)

$$\text{Ц} = \oint_L (\mathbf{a},\ d\mathbf{r}) = \int_L Xdx + Ydy + Zdz = \int_L xydx + yzdy + xzdz\ .$$

Линия L – эллипс, полученный в результате пересечения цилиндра $x^2 + y^2 = 1$ и плоскости $x + y + z = 1$. Параметрические уравнения L можно получить с учетом того, что все точки L проектируются на плоскость Oxy в окружность $x^2 + y^2 = 1$, параметрические уравнения которой

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi],$$

и те же точки линии L лежат на плоскости $z = 1 - x - y$. Следовательно, параметрические уравнения L имеют вид

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \\ z = 1 - \cos t - \sin t, \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Тогда $dx = -\sin t\, dt,\ dy = \cos t\, dt,\ dz = (\sin t - \cos t)\, dt$ и

$$Ц = \int_0^{2\pi} (-\sin^2 t \cos t + \sin t \cos t (1 - \cos t - \sin t) +$$
$$+ \cos t (1 - \cos t - \sin t)(\sin t - \cos t))\, dt = -\pi.$$

4.9.2. РОТОР ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

Подобно тому как дивергенция является локальной скалярной характеристикой векторного поля, устанавливающей наличие источников (стоков) в данной точке и характеризующей их интенсивность, *локальной векторной характеристикой векторного поля, связанной с его вращательной способностью, будет ротор* (*вихрь*).

Рассмотрим вначале плоское векторное поле $\mathbf{a} = \mathbf{a}(P)$, $P \in D \subset R^2$, и произвольный контур $L \subset D$, окружающий выбранную точку P_0. Площадь плоской площадки, заключенной внутри L, обозначим Δs. Отношение $\dfrac{1}{\Delta s}\oint\limits_L (\mathbf{a},\, d\mathbf{r})$ представляет собой *среднюю циркуляцию векторного поля* $\mathbf{a} = \mathbf{a}(P)$ на выбранной площадке. Циркуляция в точке P_0 характеризуется пределом этого отношения при условии, что контур L стягивается в точку P_0 и $\Delta s \to 0$:

$$\lim_{\substack{L \to P_0 \\ (\Delta s \to 0)}} \frac{1}{\Delta s} \oint_L (\mathbf{a},\, d\mathbf{r}). \qquad (2)$$

В случае пространственного поля $\mathbf{a} = \mathbf{a}(P)$, $P \in \Omega \subset R^3$, *принято рассматривать вращательную способность векторного поля в выбранной точке* P_0 *и заданном направлении* $\mathbf{N}$. Для этого проведем через точку P_0 плоскость, перпендикулярную $\mathbf{N}$, и рассмотрим на ней произвольный положительно-ориентированный контур L, охватывающий точку P_0. Отметим, что контур называется *положительно-ориентированным*, если с конца вектора $\mathbf{N}$ обход контура виден (рис. 2) осуществляемым против хода часовой стрелки. Значение предела (2) в этом случае характеризует вращательную способность поля $\mathbf{a} = \mathbf{a}(P)$ в точке P_0 в направлении $\mathbf{N}$.

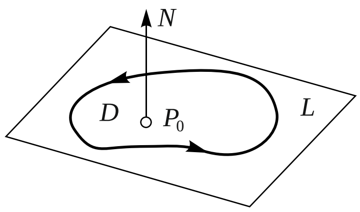


Рис. 2

Определение. *Ротором* (*вихрем*) *векторного поля* $\mathbf{a} = \mathbf{a}(P)$, $P \in \Omega \subset R^3$, *в точке* P_0 *называется вектор, обозначаемый* $\operatorname{rot}\,\mathbf{a}(P_0)$, *проекция которого на любое направление* $\mathbf{N}$ *равно предельному значению средней циркуляции в этой точке, т. е.*

$$\text{пр}_{\mathbf{N}}\operatorname{rot}\,\mathbf{a}(P_0) = \lim_{\substack{L \to P_0 \\ (\Delta s \to 0)}} \frac{1}{\Delta s} \oint_L (\mathbf{a},\ d\mathbf{r}).$$

При этом предполагается, что контур L, *уравнение которого* $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, *положительно ориентирован, лежит в плоскости, перпендикулярной* $\mathbf{N}$, *и ограничивает область, площадь которой* Δs.

Приведенное определение ротора *инвариантно* по отношению к выбору системы координат.

Получим формулу для вычисления $\operatorname{rot}\,\mathbf{a}$ в декартовой прямоугольной системе координат.

Теорема. *Если векторное поле* $\mathbf{a} = \mathbf{a}(P) = \mathbf{a}(x,\ y,\ z) = X(x,\ y,\ z)\,\mathbf{i} + Y(x,\ y,\ z)\,\mathbf{j} + Z(x,\ y,\ z)\,\mathbf{k}$ *непрерывно дифференцируемо в области* Ω, *то в каждой точке* $P \in \Omega$ *существует* $\operatorname{rot}\,\mathbf{a}(P)$, *определяемый по формуле*

$$\operatorname{rot}\,\mathbf{a}(P) = \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)\mathbf{k}. \qquad (3)$$

∇ Существование $\operatorname{rot}\,\mathbf{a}(P)$ в области Ω следует из непрерывной дифференцируемости функции $\mathbf{a} = \mathbf{a}(P)$, $P \in \Omega$. Покажем, что координаты $\mathrm{rot}\,\mathbf{a}(P)$ вычисляются по формуле (3). Найдем, например, пользуясь формулой (2), проекцию $\mathrm{rot}\,\mathbf{a}(P)$ на ось Oz. Возьмем точку $P \in \Omega$ и выберем декартову прямоугольную систему координат. В качестве направления $\mathbf{N}$ выберем ось Oz. Через точку P проведем плоскость, перпендикулярную оси Oz, ее уравнение $z = \mathrm{const}$. На этой плоскости возьмем произвольную положительно-ориентированную кривую L, окружающую выбранную точку P. Область, заключенную внутри L, обозначим через D, ее площадь – через Δs (рис. 3). В соответствии с формулой (2)

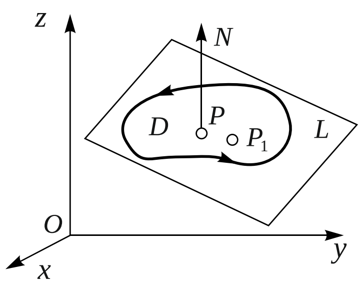


Рис. 3

$$\text{пр}_{Oz}\mathrm{rot}\,\mathbf{a}(P) = \lim_{\substack{L\to P\\(\Delta s\to 0)}} \frac{1}{\Delta s}\oint_L (\mathbf{a},\, d\mathbf{r})\,. \tag{4}$$

Интеграл, стоящий в правой части формулы (4), в скалярной форме имеет вид

$$\oint_L (\mathbf{a},\, d\mathbf{r}) = \oint_L Xdx + Ydy$$

($dz = 0$ в плоскости $z = \mathrm{const}$). В результате применения к этому интегралу формулы Остроградского–Грина, а затем теоремы о среднем значении получим

$$\oint_L Xdx + Ydy = \iint_D \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) ds = \left(\frac{\partial Y(P_1)}{\partial x} - \frac{\partial X(P_1)}{\partial y}\right)\Delta s\,,$$

где P_1 – некоторая точка, принадлежащая области D. Подставляя найденное выражение в формулу (4), будем иметь

$$\text{пр}_{Oz}\mathrm{rot}\,\mathbf{a}(P) = \lim_{\substack{P_1\to P\\(\Delta s\to 0)}} \frac{1}{\Delta s}\left(\frac{\partial Y(P_1)}{\partial x} - \frac{\partial X(P_1)}{\partial y}\right)\Delta s = \frac{\partial Y(P)}{\partial x} - \frac{\partial X(P)}{\partial y}\,.$$

Аналогично можно найти проекции $\mathrm{rot}\ \mathbf{a}(P)$ на две другие оси координат:

$$\text{пр}_{Ox}\mathrm{rot}\ \mathbf{a}(P)=\frac{\partial Z(P)}{\partial y}-\frac{\partial Y(P)}{\partial z},\ \text{пр}_{Oy}\mathrm{rot}\ \mathbf{a}(P)=\frac{\partial X(P)}{\partial z}-\frac{\partial Z(P)}{\partial x}.\ \#$$

Приведем еще одну, удобную для запоминания символическую форму записи $\mathrm{rot}\ \mathbf{a}$:

$$\mathrm{rot}\ \mathbf{a}(P)=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ X & Y & Z\end{vmatrix}. \tag{5}$$

Для определения координат $\mathrm{rot}\ \mathbf{a}(P)$ с помощью представления (5) достаточно раскрыть определитель по элементам первой строки, при этом операции умножения элементов второй строки на соответствующие элементы третьей строки выполняются как операции дифференцирования, например $\dfrac{\partial}{\partial y}Z=\dfrac{\partial Z}{\partial y}$.

Пример 2. Найти ротор вектора $\mathbf{a}=\mathbf{a}(x,\ y,\ z)=(x^2+y^2)\mathbf{i}+$ $+(y^2+z^2)\mathbf{j}+(z^2+x^2)\mathbf{k}$ в произвольной точке поля.

Решение. Заданная векторная функция непрерывно дифференцируема на всем пространстве R^3. Для определения $\mathrm{rot}\ \mathbf{a}$ воспользуемся формулой (5):

$$\mathrm{rot}\ \mathbf{a}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ x^2+y^2 & y^2+z^2 & z^2+x^2\end{vmatrix}=-2z\mathbf{i}-2x\mathbf{j}-2y\mathbf{k}.$$

Перечислим основные свойства ротора векторного поля.

1. $\mathrm{rot}\ \mathbf{c}=0$, $\mathbf{c}=\mathbf{const}$.
2. $\mathrm{rot}\ (\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b})=\alpha\ \mathrm{rot}\ \mathbf{a}+\beta\ \mathrm{rot}\ \mathbf{b}$ $\alpha,\beta\in R$ (линейность).
3. $\mathrm{rot}\ (U(P)\mathbf{a})=U(P)\mathrm{rot}\ \mathbf{a}+\mathrm{grad}U(P)\times\mathbf{a}$, $U=U(x,\ y,\ z)$.

Справедливость приведенных свойств можно доказать, например, с помощью представления ротора в виде (5).

§ 4.10. ТЕОРЕМА СТОКСА

Рассмотрим ориентированную поверхность Q, ограниченную контуром L. Направление нормали к поверхности Q (ориентацию поверхности Q) согласуем с ориентацией L (направлением обхода L) следующим образом: направление обхода L будем считать положительным (согласованным с ориентацией Q), если наблюдатель, расположенный по Q так, что нормаль направлена от ног к голове, при обходе контура L оставляет поверхность Q слева от себя.

Теорема 1 (*Стокса**). *Циркуляция* Ц *непрерывно дифференцируемого векторного поля* $\mathbf{a} = \mathbf{a}(P)$ *по замкнутому контуру* L *равна потоку ротора этого поля через любую гладкую поверхность* Q, *опирающуюся на* L:

$$Ц = \oint_L (\mathbf{a},\ d\mathbf{r}) = \iint_Q (\mathrm{rot}\ \mathbf{a},\ \mathbf{n^0})\, dq\,, \tag{1}$$

при этом ориентация контура L согласована с ориентацией поверхности Q, опирающейся (натянутой, ограниченной) на контур L.

Пример положительной ориентации L дан на рис. 1.

Доказательство теоремы Стокса приводить не будем, отметим лишь, что оно может быть выполнено, в частности, тем же методом, который использовался для доказательства теоремы Остроградского–Гаусса, исходя при этом из определения ротора по формуле (3) разд. 4.9.2.

Запишем *формулу Стокса* (1) *в скалярной форме* относительно декартовой прямоугольной системы координат:

$$\boxed{\begin{gathered} Ц = \int_L Xdx + Ydy + Zdz = \\ = \iint_Q \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right)\cos\alpha\, dq + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right)\cos\beta\, dq + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)\cos\gamma\, dq. \end{gathered}} \tag{2}$$

Замечание 1. Из теоремы Стокса следует, что если в поле $\mathbf{a} = \mathbf{a}(P)$ на контур L опираются две поверхности Q_1 и Q_2, то потоки $\mathrm{rot}\ \mathbf{a}$ через эти поверхности равны.

---

* Джордж Габриель Стокс (1819–1903) – английский физик и математик.

Замечание 2. В случае если $\mathbf{a} = \mathbf{a}(P)$ – плоское поле, формула Стокса (2) обращается в формулу Остроградского–Грина (в качестве поверхности Q может быть взята плоская область D, ограниченная L). В связи с этим формуле Остроградского–Грина можно дать следующее векторное толкование: *циркуляция плоского векторного поля равна потоку его ротора через область, лежащую внутри контура.*

Пример 1. Вычислить циркуляцию вектора $\mathbf{a} = y\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} - z\mathbf{k}$ по контуру L: $x^2 + y^2 = 4$, $z = 3$ непосредственно и с помощью формулы Стокса.

Р е ш е н и е. Линия L – окружность радиусом 2 с центром в точке $(0, 0, 3)$, лежащая в плоскости $z = 3$ (рис. 2). Ориентацию на L выберем в соответствии с рис. 2. Параметрические уравнения линии L имеют вид:

$$\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t, \qquad t \in [0, 2\pi]. \\ z = 3, \end{cases}$$

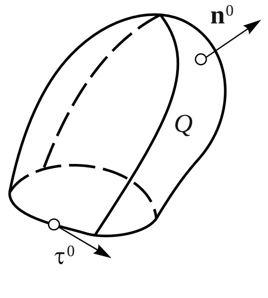


Рис. 1

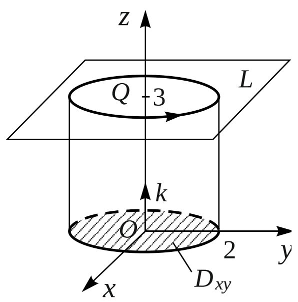


Рис. 2

Вычислим циркуляцию вектора $\mathbf{a}$ по формуле (1) из разд. 4.9.1:

$$\text{Ц} = \oint_L (\mathbf{a},\, d\mathbf{r}) = \int_0^{2\pi} (2\sin t(-2\sin t) + 4\cos^2 t \cdot 2\cos t - 3 \cdot 0)\, dt = -4\pi .$$

Для вычисления циркуляции по формуле Стокса (2) нужно выбрать какую-нибудь поверхность Q, «натянутую» на L. В рассматриваемом примере естественно в качестве Q взять круг, границей которого является окружность L. Согласно выбранной ориентации контура в качестве нормали $\mathbf{n^0}$ к кругу Q следует взять вектор $\mathbf{k}$. По формуле (5) из разд. 4.9.2 найдем ротор заданного вектора $\mathbf{a}$:

$$\operatorname{rot} \mathbf{a}(P) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ y & x^2 & -z \end{vmatrix} = (2x-1)\mathbf{k}.$$

Использовав формулу Стокса (1), имеем

$$\text{Ц} = \oint_L (\mathbf{a},\ d\mathbf{r}) = \iint_Q (\operatorname{rot} \mathbf{a},\ \mathbf{n^0})\, dq = \iint_Q (2x-1)\cos\gamma dq = \iint_{D_{xy}} (2x-1)\, dxdy.$$

Полученный двойной интеграл с учетом вида области D_{xy} (круг, лежащий в плоскости Oxy, центр которого расположен в начале координат и радиус которого равен 2) целесообразно вычислять в полярных координатах:

$$\text{Ц} = \iint_{D_{xy}} (2x-1)\, dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho(2\rho\cos\varphi - 1)\, d\rho = -4\pi.$$

§ 4.11. СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВИДЫ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

4.11.1. ПОТЕНЦИАЛЬНОЕ ВЕКТОРНОЕ ПОЛЕ

В приложениях векторного анализа обычно используются некоторые частные виды векторных полей.

Определение. *Векторное поле* $\mathbf{a} = \mathbf{a}(P)$, $P \in \Omega$, *называется потенциальным* (*безвихревым*), *если существует такая непрерывно дифференцируемая скалярная функция* $U(P)$, *что*

$$\mathbf{a}(P) = \operatorname{grad} U(P) \quad \forall P \in \Omega. \tag{1}$$

Функцию $U(P)$ *называют в этом случае потенциалом векторного поля* $\mathbf{a} = \mathbf{a}(P)$. Примерами потенциальных полей могут служить магнитное поле, создаваемое прямолинейным проводником, поле притяжения данной массы к неподвижному центру (гравитационное поле), электрическое поле напряженности точечного заряда и др.

Потенциальное поле – наиболее простое среди векторных полей, так как оно определяется одной скалярной функцией $U = U(P)$ независимо от размерности пространства, в котором задано векторное поле. Например, в пространстве R^3 в случае произвольного векторного поля

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}(P) = X(x, y, z)\,\mathbf{i} + Y(x, y, z)\,\mathbf{j} + Z(x, y, z)\,\mathbf{k}\,,$$

в случае потенциального векторного поля

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}(P) = \operatorname{grad} U(P) = \frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{k}\,. \qquad (2)$$

Рассмотрим свойства потенциальных векторных полей, сформулировав их в виде теорем.

Теорема 1. *Если векторное поле* $\mathbf{a} = \mathbf{a}(P)$, $P \in \Omega$, *потенциально, то его потенциал определяется с точностью до постоянного слагаемого.*

∇ Допустим, что для поля $\mathbf{a} = \mathbf{a}(P)$ существует два потенциала $U_1(P)$ и $U_2(P)$, т. е. $\mathbf{a}(P) = \operatorname{grad} U_1(P)$ и $\mathbf{a}(P) = \operatorname{grad} U_2(P)$. Найдем с учетом свойств градиента

$$\operatorname{grad}(U_1 - U_2) = \frac{\partial (U_1 - U_2)}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial (U_1 - U_2)}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial (U_1 - U_2)}{\partial z}\mathbf{k} \equiv \mathbf{0}\,.$$

Так как вектор $\operatorname{grad}(U_1 - U_2)$ тождественно равен нулю, то все его проекции тоже равны нулю. Следовательно, функция $U_1 - U_2$ не зависит ни от одной из переменных, т. е. $U_1 - U_2 = \text{const}$, откуда $U_1 = U_2 + \text{const}$. #

Теорема 2. *Если векторное поле* $\mathbf{a} = \mathbf{a}(P)$ *задано в односвязной области* Ω, *то необходимым и достаточным условием его потенциальности будет обращение в нуль ротора поля в любой точке* $P \in \Omega$:

$$\operatorname{rot}\,\mathbf{a}(P) = \mathbf{0} \quad \forall P \in \Omega\,. \qquad (3)$$

∇ Небходимость. Если $\mathbf{a} = \mathbf{a}(P)$, $P \in \Omega$ – потенциальное векторное поле, то по определению существует непрерывно дифференцируемая скалярная функция $U(P) = U(x,\ y,\ z)$, $P \in \Omega$ такая, что

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}(P) = \operatorname{grad} U(P) = \frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{k}.$$

Покажем, что в этом случае выполняется необходимое и достаточное условие потенциальности поля (3):

$$\operatorname{rot}\ \mathbf{a}(P) = \operatorname{rot}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{k}\right) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ \partial U/\partial x & \partial U/\partial y & \partial U/\partial z \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}\right)\mathbf{k} = 0.$$

Достаточность. Если для векторного поля $\mathbf{a} = \mathbf{a}(P) =$ $= \mathbf{a}(X,\ Y,\ Z)$ выполнено условие (3), то на основе формулы Стокса (см. формулу (1) § 4.10), имеем

$$\oint_L (\mathbf{a},\ d\mathbf{r}) = \int_L Xdx + Ydy + Zdz = 0$$

для любой замкнутой кривой $L \subset \Omega$.

Согласно теореме из разд. 2.14.1 обращение в нуль линейного интеграла по любому замкнутому контуру, принадлежащему рассматриваемой области Ω, есть условие независимости значения линейного интеграла от пути интегрирования. Это, в свою очередь, влечет за собой наличие такой скалярной функции $U = U(x,\ y,\ z)$, полный дифференциал которой стоит под знаком интеграла, т. е.

$$X(x,\ y,\ z)dx + Y(x,\ y,\ z)dy + Z(x,\ y,\ z)dz = dU(x,\ y,\ z) =$$

$$= \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz.$$

Следовательно, $X(x,\ y,\ z)=\dfrac{\partial U}{\partial x}$, $Y(x,\ y,\ z)=\dfrac{\partial U}{\partial y}$, $Z(x,\ y,\ z)=$ $=\dfrac{\partial U}{\partial z}$, т. е.

$$\mathbf{a}=\mathbf{a}(P)=X\mathbf{i}+Y\mathbf{j}+Z\mathbf{k}=\frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{k}=\operatorname{grad}U(P).$$

На основе определения поле $\mathbf{a}=\mathbf{a}(P)$ является потенциальным. #

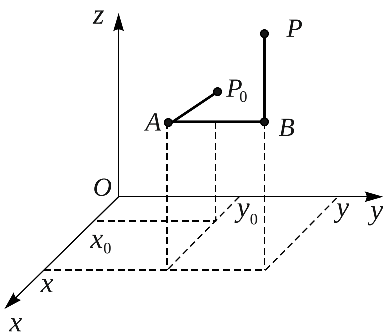
Обобщим метод определения функции по ее полному дифференциалу, изложенный в § 2.14 для функции $U=U(x,\ y)$, на случай функции трех переменных. Если в пространстве R^3 существует потенциальное векторное поле, то под знаком линейного интеграла стоит полный дифференциал функции трех переменных и значение интеграла не зависит от пути интегрирования. Следовательно,

$$\int\limits_L(\mathbf{a},\ d\mathbf{r})=\int\limits_{(P_0P)}Xdx+Ydy+Zdz=\int\limits_{(P_0P)}dU(x,\ y,\ z)=$$

$$=U(x,\ y,\ z)-U(x_0,\ y_0,\ z_0).$$

Таким образом,

$$U(x,\ y,\ z)=\int\limits_{(P_0P)}Xdx+Ydy+Zdz+U(x_0,\ y_0,\ z_0). \qquad (4)$$



Соотношение (4) представляет собой формулу для определения потенциала векторного поля с точностью до постоянного слагаемого $U(x_0,\ y_0,\ z_0)$. Для вычисления интеграла, стоящего в правой части формулы (4), вследствие его независимости от пути интегрирования выберем ломаную P_0ABP (см. рисунок), звенья которой параллельны соответствующим координатным осям. Интеграл по ломаной может быть представлен в виде суммы трех интегралов по составляющим ломаную звеньям: (P_0A), (AB) и (BP). При интегрировании по отрезку прямой (P_0A) переменная x меняется от значения x_0 (абсцисса точки P_0) до x (абсцисса точки A), а переменные y и z сохраняют свои значения (соответственно $y = y_0$ и $z = z_0$) и, следовательно, dy и dz равны нулю.

Аналогичные ситуации имеют место при интегрировании по звеньям ломаной (AB) и (BP): в интеграле по звену (AB) меняется только переменная y, следовательно, dx и dz равны нулю, в интеграле по звену (BP) меняется только переменная z, т. е. dx и dy равны нулю.

С учетом сказанного выше имеем

$$\int\limits_{(P_0ABP)} Xdx + Ydy + Zdz = \int\limits_{(P_0A)} X(x,\, y_0,\, z_0)\,dx + \int\limits_{(AB)} Y(x,\, y,\, z_0)\,dy +$$

$$+ \int\limits_{(BP)} Z(x,\, y,\, z)\,dz = \int\limits_{x_0}^{x} X(x,\, y_0,\, z_0)\,dx + \int\limits_{y_0}^{y} Y(x,\, y,\, z_0)\,dy +$$

$$+ \int\limits_{z_0}^{z} Z(x,\, y,\, z)\,dz\,.$$

Из последнего выражения и (4) следует формула определения потенциала векторного поля:

$$\boxed{U(x,y,z) = C + \int\limits_{x_0}^{x} X(x,\, y_0,\, z_0)\,dx + \int\limits_{y_0}^{y} Y(x,\, y,\, z_0)\,dy + \int\limits_{z_0}^{z} Z(x,\, y,\, z)\,dz.} \quad (5)$$

Замечание. Если точка $O(0,0,0) \in \Omega$ ($\mathbf{a} = X(P)\mathbf{i} + Y(P)\mathbf{j} + Z(P)\mathbf{k}$ определена в O), то ее удобно выбирать в качестве P_0.

Пример 1. Установить потенциальность векторного поля $\mathbf{a} = 2xyz\mathbf{i} + x^2z\mathbf{j} + x^2y\mathbf{k}$ и найти его потенциал.

Р е ш е н и е . Имеем

$$\operatorname{rot}\mathbf{a}(P)=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ 2xyz & x^2z & x^2y\end{vmatrix}=$$

$$=(x^2-x^2)\mathbf{i}+(2xy-2xy)\mathbf{j}+(2xz-2xz)\mathbf{k}=\mathbf{0},$$

т. е. заданное поле потенциально. Потенциал найдем по формуле (5), выбрав в качестве точки P_0 начало координат:

$$U(x,\ y,\ z)=C+\int\limits_{x_0}^{x}2xy_0z_0dx+\int\limits_{y_0}^{y}x^2z_0dy+$$

$$+\int\limits_{z_0}^{z}x^2ydz=\begin{vmatrix}x_0=0\\ y_0=0\\ z_0=0\end{vmatrix}=\int\limits_{0}^{z}x^2ydz=x^2yz.$$

4.11.2. СОЛЕНОИДАЛЬНОЕ ВЕКТОРНОЕ ПОЛЕ

Определение. *Векторное поле* $\mathbf{a}=\mathbf{a}(P)$, $P\in\Omega$, *называется соленоидальным* (*трубчатым*), *если*

$$\operatorname{div}\mathbf{a}(P)=0\quad\forall P\in\Omega. \tag{6}$$

Примерами соленоидальных полей являются: магнитное поле, создаваемое прямолинейным проводником, вдоль которого проходит электрический ток, поле линейных скоростей вращающегося твердого тела, поле линейных скоростей стационарного потока несжимаемой жидкости, не имеющее источников и стоков, и др.

Согласно определению соленоидальные поля не содержат ни источников, ни стоков. По этой причине им присущи следующие свойства.

1. Из формулы Остроградского–Гаусса вытекает, что если векторное поле $\mathbf{a}=\mathbf{a}(P)$ соленоидальное, то поток вектора $\mathbf{a}(P)$ через любую замкнутую поверхность Q равен нулю.

2. Потоки соленоидального векторного поля через различные сечения векторной трубки равны между собой (*принцип сохранения интенсивности векторной трубки*).

3. В соленоидальном векторном поле векторные линии не могут ни начинаться, ни оканчиваться внутри поля. Они либо замкнуты, либо начинаются и оканчиваются на границе поля, либо имеют бесконечные ветви (в случае неограниченного поля).

4. В односвязной области в случае соленоидального векторного поля поток вектора $\mathbf{a}(P)$ через любую поверхность Q, опирающуюся на замкнутый контур L, зависит не от вида этой поверхности, а только от самого контура L.

Пример 2. Установить, являются ли соленоидальными следующие поля:

1) $\mathbf{a}_1(P) = x(z^2 - y^2)\mathbf{i} + y(x^2 - z^2)\mathbf{j} + z(y^2 - x^2)\mathbf{k}$;

2) $\mathbf{a}_2(P) = y^2\mathbf{i} - y(x^2 + y^2)\mathbf{j} + z(3y^2 + 1)\mathbf{k}$.

Решение. 1. Воспользуемся формулой (6):

$$\operatorname{div} \mathbf{a}_1(P) = z^2 - y^2 + x^2 - z^2 + y^2 - x^2 \equiv 0,$$

т. е. поле $\mathbf{a}_1(P)$ соленоидально.

2. Имеем $\operatorname{div} \mathbf{a}_2(P) = -x^2 + 1 \not\equiv 0$, т. е. поле $\mathbf{a}_2(P)$ не является соленоидальным.

4.11.3. ГАРМОНИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

Определение. *Векторное поле* $\mathbf{a} = \mathbf{a}(P)$, $P \in \Omega$, *называется гармоническим* (*лапласовым*), *если оно является как потенциальным, так и соленоидальным, т. е.*

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{a}(P) = \mathbf{0}, \\ \operatorname{div} \mathbf{a}(P) = 0 \end{cases} \forall P \in \Omega. \tag{7}$$

Если вектор $\mathbf{a}(P)$ удовлетворяет первому из условий (7), то существует скалярная функция $U(P)$, такая, что $\mathbf{a}(P) = \operatorname{grad} U(P)$, и тогда второе из условий (7) приводит к уравнению $\operatorname{div}\mathbf{a}(P) = \operatorname{div}\operatorname{grad}U(P) = 0$, или

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0. \qquad (8)$$

Уравнение (8) называется *уравнением Лапласа**; оно является дифференциальным уравнением в частных производных. Таким образом, гармоническое векторное поле (7) описывается скалярной функцией $U = U(P)$, которая будет в области Ω решением уравнения Лапласа и называется *гармонической функцией.*

Примеры гармонических функций (проверить самостоятельно):

1) $U(x, y, z) = Ax + By + Cz$ (задана в любой конечной области);

2) $U(x, y) = x/(x^2 + y^2)$ (задана в любой области, не содержащей начала координат.

§ 4.12. ОПЕРАТОРЫ ГАМИЛЬТОНА И ЛАПЛАСА

Определение. *Оператором Гамильтона*** *или оператором «набла» называется символический вектор*

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}, \qquad (1)$$

проекции которого на оси прямоугольной декартовой системы координат представляют собой символы частного дифференцирования по соответствующим переменным:

$$\nabla_x = \partial/\partial x, \quad \nabla_y = \partial/\partial y, \quad \nabla_z = \partial/\partial z.$$

Оператор ∇ не является вектором в классическом понимании этого слова, но с его помощью могут быть наглядно представлены основные операции векторного анализа: градиент скалярного поля, дивергенция и ротор векторного поля. Для этого определим «про-

* Пьер Симон Лаплас (1749–1827) – французский астроном, математик, физик.

** Уильям Роуан Гамильтон (1805–1865) – ирландский математик.

изведение» оператора ∇ и скалярной функции $U(x, y, z)$ следующим образом. Под «произведениями» $\nabla_x U$, $\nabla_y U$, $\nabla_z U$ будем понимать нахождение соответствующих частных производных от функции $U(x, y, z)$, т. е.

$$\nabla_x U = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \nabla_y U = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \nabla_z U = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

В этом случае «произведение» ∇U определяет вектор

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{k} = \operatorname{grad} U.$$

Скалярное произведение оператора Гамильтона (оператора ∇) и вектора $\mathbf{a} = \mathbf{a}(P) = X(x, y, z)\mathbf{i} + Y(x, y, z)\mathbf{j} + Z(x, y, z)\mathbf{k}$ зададим формулой

$$(\nabla, \mathbf{a}) = \left(\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right), \ (X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k})\right) = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = \operatorname{div} \mathbf{a}.$$

Далее определим векторное произведение символического вектора ∇ и вектора $\mathbf{a}(P)$:

$$\nabla \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right)\mathbf{j} +$$

$$+ \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)\mathbf{k} = \operatorname{rot} \mathbf{a}(P).$$

Таким образом, с помощью оператора Гамильтона основные понятия векторного анализа, получаемые с помощью операции дифференцирования, можно выразить в виде операций, применяемых в векторной алгебре.

Отметим, что при использовании оператора ∇ надо учитывать следующие его свойства.

1. Оператор ∇ линеен.

2. Действие оператора ∇ на произведение двух функций (векторных или скалярных) осуществляется аналогично правилу дифференцирования произведения двух сомножителей.

3. Оператор ∇ действует на все функции, стоящие после него, и не действует на функции, записанные перед ним.

Приведем выражения для некоторых свойств операций векторного анализа, полученные с помощью оператора ∇.

Пусть $U_1(x,\ y,\ z)$, $U_2(x,\ y,\ z)$ – скалярные функции, $\mathbf{a}(x,\ y,\ z)$, $\mathbf{b}(x,\ y,\ z)$ – векторные функции, α, β – постоянные.

1. $\nabla(\alpha U_1 \pm \beta U_2) = \alpha\nabla U_1 \pm \beta\nabla U_2$

(или $\operatorname{grad}(\alpha U_1 \pm \beta U_2) = \alpha \operatorname{grad} U_1 \pm \beta \operatorname{grad} U_2$).

2. $(\nabla,\ (\alpha\mathbf{a} \pm \beta\mathbf{b})) = (\alpha\nabla\mathbf{a}) \pm (\beta\nabla\mathbf{b}) = \alpha(\nabla\mathbf{a}) \pm \beta(\nabla\mathbf{b})$

(или $\operatorname{div}(\alpha\mathbf{a} \pm \beta\mathbf{b}) = \alpha \operatorname{div}\mathbf{a} \pm \beta \operatorname{div}\mathbf{b}$).

3. $\nabla\times(\alpha\mathbf{a} \pm \beta\mathbf{b}) = \alpha\nabla\times\mathbf{a} \pm \beta\nabla\times\mathbf{b} = \alpha(\nabla\times\mathbf{a}) \pm \beta(\nabla\times\mathbf{b})$

(или $\operatorname{rot}(\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}) = \alpha\operatorname{rot}\mathbf{a} + \beta\operatorname{rot}\mathbf{b}$).

4. $\nabla(U_1U_2) = U_1\nabla U_2 + U_2\nabla U_1$

(или $\operatorname{grad}(U_1U_2) = U_1 \operatorname{grad} U_2 + U_2 \operatorname{grad} U_1$).

5. $(\nabla,\ (U\mathbf{a})) = U(\nabla,\ \mathbf{a}) + (\nabla U,\ \mathbf{a})$,

$(\operatorname{div}(U\mathbf{a}) = U \operatorname{div}\mathbf{a} + (\mathbf{a},\ \operatorname{grad} U))$.

6. $\nabla\times(U\mathbf{a}) = U(\nabla\times\mathbf{a}) + \nabla U\times\mathbf{a}$

(или $\operatorname{rot}(U\mathbf{a}) = U\operatorname{rot}\mathbf{a} + \operatorname{grad} U\times\mathbf{a}$).

7. $(\nabla,\ (\mathbf{a}\times\mathbf{b})) = (\mathbf{b},\ \nabla\times\mathbf{a}) - (\mathbf{a},\ \nabla\times\mathbf{b})$

(или $\operatorname{div}(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = (\mathbf{b},\ \operatorname{rot}\mathbf{a}) - (\mathbf{a},\ \operatorname{rot}\mathbf{b})$.

Операции grad, div, rot называют *дифференциальными операциями первого порядка.* В приложениях векторного анализа используются также *дифференциальные операции второго порядка.* Так, $\operatorname{grad} U$, $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ – векторные величины, поэтому к ним можно применить операции div и rot, а к числовой величине $\operatorname{div}\mathbf{a}$ – операцию grad и т. д. Получим пять дифференциальных операций второго порядка:

1) $\operatorname{div}(\operatorname{grad}U) = (\nabla,\ \nabla U)$;
2) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad}U) = \nabla\times\nabla U$;
3) $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{a}) = (\nabla,\ \nabla\times\mathbf{a})$;
4) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\mathbf{a}) = \nabla\times(\nabla\times\mathbf{a})$;
5) $\operatorname{grad}(\operatorname{div}\mathbf{a}) = \nabla(\nabla,\ \mathbf{a})$

Результаты второй и третьей из приведенных выше операций тождественно равны нулю (как векторное произведение коллинеарных векторов и смешанное произведение, содержащее в качестве сомножителей два равных вектора).

Наиболее широкое применение имеет первая из дифференциальных операций второго порядка: скалярный квадрат символического вектора ∇, т. е. выражение

$$(\nabla,\ \nabla) = \nabla^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial^2 x}+\frac{\partial^2}{\partial^2 y}+\frac{\partial^2}{\partial^2 z}. \qquad (2)$$

Оператор (2) называют *оператором Лапласа* (*или лапласианом*) и обозначают Δ. Уравнение Лапласа (см. § 4.11) с помощью оператора Лапласа запишется в виде $\Delta U = 0$.

Отметим, что оператор Лапласа Δ может быть применен как к скалярной функции, так и к векторной функции $\mathbf{a} = \mathbf{a}(X,\ Y,\ Z)$:

$$\Delta\mathbf{a}(X,\ Y,\ Z) = \Delta X\mathbf{i} + \Delta Y\mathbf{j} + \Delta Z\mathbf{k}.$$

В настоящем учебнике операции векторного анализа изложены для случая декартовой прямоугольной системы координат как наиболее часто применяемой. В приложениях используются и другие системы координат, однако рассмотрение этих вопросов выходит за рамки нашей книги.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. *Дайте определение скалярного поля*; *определение производной по направлению.*

2. *Дайте определение градиента скалярного поля*, *укажите связь градиента в данной точке с производной по направлению. Что характеризует направление градиента?*

3. *Что такое поверхности и линии уровня? Как они связаны с потенциалом векторного поля?*

4. *Сформулируйте определение векторного поля. Какие основные характеристики векторных полей вы знаете?*

5. *Что такое векторные линии? Что можно сказать о их направлении? Приведите примеры.*

6. *Определите поток векторного поля. Как его вычисление связано с поверхностными интегралами?*

7. *Дайте определение ротора векторного поля*, *укажите его физический смысл. Какое векторное поле называется безвихревым?*

8. *Сформулируйте теорему Остроградского–Гаусса. С помощью формулы Остроградского–Гаусса вычислите интеграл* $\iint\limits_{Q} x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$, *где* Q *– внешняя сторона поверхности тетраэдра, заданного неравенствами* $x+y+z\le 1$, $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$.

9. *Сформулируйте понятие циркуляции векторного поля, объясните ее физический смысл.*

10. *Дайте определение дивергенции векторного поля. Каков ее физический смысл?*

11. *Напишите формулу Стокса и сформулируйте условия, при которых эта формула верна.*

12. *Пусть* $du(x, y, z) = X(x, y, z)\,dx + Y(x, y, z)\,dy + Z(x, y, z)\,dz$ *в области* Ω. *Напишите формулу для нахождения функции* $u(x, y, z)$.

13. *Какое векторное поле называется потенциальным? Приведите примеры. Укажите свойства потенциальных векторных полей.*

14. *Какое векторное поле называется соленоидальным? Приведите примеры. Укажите свойства.*

15. *Что такое оператор Гамильтона? Запишите с его помощью*: *а*) *градиент скалярного поля*; *б*) *дивергенцию векторного поля*; *в*) *ротор векторного поля*; *г*) *формулы для производной по направлению.*

16. *Какое векторное поле называется гармоническим? Укажите связь оператора Лапласа с оператором Гамильтона*, *запишите уравнение Лапласа.*