

2.3. Поверхностные интегралы первого рода (интегралы по площади поверхности)

2.3.1. Вычисление поверхностных интегралов первого рода

Вычисление поверхностного интеграла первого рода сводится к вычислению двойного интеграла по области D_{xy} – проекции поверхности S , заданной уравнением $z = z(x, y)$, на плоскость Oxy :

$$\iint_S f(x, y, z) ds = \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy. \quad (2.13)$$

Отметим, что если поверхность S задана уравнением $y = y(x, z)$ или $x = x(y, z)$, то:

$$\iint_S f(x, y, z) ds = \iint_{D_{xz}} f(x, y(x, z), z) \sqrt{1 + (y'_x)^2 + (y'_z)^2} dx dz,$$

$$\iint_S f(x, y, z) ds = \iint_{D_{yz}} f(x(y, z), y, z) \sqrt{1 + (x'_y)^2 + (x'_z)^2} dy dz,$$

где области D_{xz} и D_{yz} – проекции поверхности S на координатные плоскости Oxz и Oyz , соответственно.

Задача 2.14. Вычислить $I = \iint_S (x^2 + y^2) ds$, где S – часть конической поверхности

$z^2 = x^2 + y^2$, заключенной между плоскостями $z = 0$ и $z = 1$.

Решение. По условию задачи $z \geq 0$, значит, поверхность задана уравнением $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ (рис. 2.6). Вычислим интеграл по формуле (2.13):

$$z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad z'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad dS = \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} dx dy = \sqrt{2} dx dy,$$

следовательно,

$$I = \iint_D (x^2 + y^2) \sqrt{2} \, dx dy,$$

где область $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ – пересечение части конической поверхности

$z^2 = x^2 + y^2$ и плоскости $z = 1$. Полученный двойной интеграл вычислим в полярных координатах

$$I = 4\sqrt{2} \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 \rho^2 \rho \, d\rho = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ. $I = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$

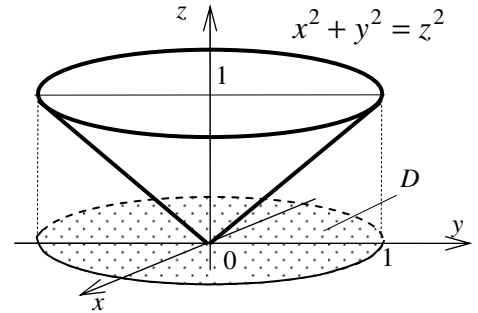


Рис. 2.6

Задача 2.15. Вычислить $I = \iint_S x \, dS$, где S – полная

поверхность тетраэдра, отсекаемого от первого октанта плоскостью $x + y + z = 1$.

Решение. Полная поверхность S тетраэдра состоит из четырех граней:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4, \quad \text{где} \quad S_1 = \triangle AOB, \quad S_2 = \triangle AOC, \quad S_3 = \triangle BOC, \quad S_4 = \triangle ABC$$

(рис.2.7). Выпишем уравнения каждой из граней тетраэдра и вычислим для них

элементы dS :

а) $S_1: z = 0, \, dS = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} \, dx dy = dx dy;$

б) $S_2: y = 0, \, dS = \sqrt{1 + (y'_x)^2 + (y'_z)^2} \, dx dz = dx dz;$

в) $S_3: x = 0, \, dS = \sqrt{1 + (x'_y)^2 + (x'_z)^2} \, dy dz = dy dz;$

г) $S_4: x = 1 - z - y, \, dS = \sqrt{1 + (x'_y)^2 + (x'_z)^2} \, dy dz = \sqrt{3} dy dz.$

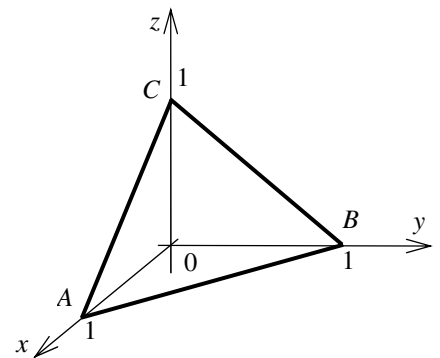


Рис. 2.7

Так как уравнения поверхностей заданы в явном виде, следовательно, определены плоскости, на которые проектируются эти поверхности: грань S_1 проектируется

на плоскость Oxy , грань S_2 – на Oxz , грани S_3 и S_4 – на Oyz . Пусть D_i – области, на которые проектируются грани S_i , $i=1,...,4$, тогда по свойству аддитивности поверхностного интеграла имеем:

$$\begin{aligned} I &= \iint_{S_1} x dS + \iint_{S_2} x dS + \iint_{S_3} x dS + \iint_{S_4} x dS = \\ &= \iint_{D_1} x dy dx + \iint_{D_2} x dx dz + \iint_{D_3} 0 dy dz + \iint_{D_4} (1-y-z) dy dz, \end{aligned}$$

где в двойных интегралах в подынтегральной функции независимые переменные (переменные из области D_i) остаются без изменения, зависимая переменная заменяется из явного уравнения соответствующей поверхности. Вычислим двойные интегралы:

$$D_1 = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x\},$$

$$\iint_{D_1} x dx dy = \int_0^1 x dx \int_0^{1-x} dy = \int_0^1 x(1-x) dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{6};$$

$$D_2 = \{(x, z) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq 1-x\}, \quad \iint_{D_2} x dx dz = \frac{1}{6}, \text{ так как вычисление интеграла по}$$

области D_1 аналогично вычислению интеграла по области D_2 ;

$$D_3 = D_4 = \{(y, z) | 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1-y\}, \quad \iint_{D_3} 0 dy dz = 0;$$

$$\iint_{D_4} (1-y-z) \sqrt{3} dy dz = \sqrt{3} \int_0^1 dy \int_0^{1-y} (1-y-z) dz =$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^1 dy (1-y-z)^2 \Big|_{z=0}^{z=1-y} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^1 (1-y)^2 dy = -\frac{\sqrt{3}}{6} (1-y)^3 \Big|_0^1 = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Следовательно, $I = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + 0 + \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{2+\sqrt{3}}{6}$.

ОТВЕТ. $I = \frac{2+\sqrt{3}}{6}$.

• Рекомендуем решить: задачи № 3876 – 3884.

2.3.2. Применение поверхностных интегралов первого рода

Если поверхность S задана уравнением $z = z(x, y)$, а ее проекция на плоскость Oxy есть область D , в которой $z(x, y)$, $z'_x(x, y)$ и $z'_y(x, y)$ – непрерывные функции, то ее площадь S вычисляется по формуле

$$S = \iint_S ds = \iint_D \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y} dx dy. \quad (2.14)$$

Масса поверхности S с заданной в каждой ее точке плотностью распределения массы $\mu = \mu(x, y, z)$ вычисляется по формуле:

$$m = \iint_S \mu(x, y, z) dS. \quad (2.15)$$

Задача 2.16. Найти площадь части поверхности сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, расположенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = Rx$ при $z \geq 0$.

Решение. Вычислим площадь поверхности, используя формулу (2.14). Изобразим поверхность на чертеже (рис. 2.8) и опишем ее с помощью неравенств:

$$S = \left\{ (x, y, z) \mid (x, y) \in D, \quad z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \right\},$$

где $D = \left\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 = Rx \right\}$ – проекция поверхности на плоскость Oxy .

Так как поверхность сферы, расположенная внутри цилиндра, симметрична относительно плоскости Oxz , и $z'_x = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$, $z'_y = \frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$, то площадь

поверхности равна:

$$S = 2R \iint_{\tilde{D}} \frac{dxdy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}},$$

где $\tilde{D}$ – половина круга D , соответствующая $y \geq 0$. Полученный двойной интеграл вычислим в полярных координатах. Так как уравнению окружности $x^2 + y^2 = Rx$ соответствует уравнение $\rho = R \cos \varphi$ в полярных координатах, то область $\tilde{D}$ примет вид:

$$\tilde{D}' = \left\{ (\rho, \varphi) \mid 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \rho \leq R \cos \varphi \right\},$$

и площадь поверхности равна:

$$\begin{aligned} S &= 2 \iint_{\tilde{D}'} \frac{\rho d\varphi d\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} = -2R \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{R \cos \varphi} \left(R^2 - \rho^2 \right)^{-\frac{1}{2}} d\left(R^2 - \rho^2 \right) = \\ &= 2 \int_{\pi/2}^0 \left(R^2 - \rho^2 \right)^{\frac{1}{2}} \Big|_0^{R \cos \varphi} d\varphi = 4R^2 \int_0^{\pi/2} (1 - \sin \varphi) d\varphi = 2R^2 (\pi - 2). \end{aligned}$$

О т в е т. $S = 2R^2 (\pi - 2)$.

Задача 2.17. Найти массу полусферы радиуса R при $z \geq 0$, если в каждой точке поверхности плотность равна $\mu = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Решение. Вычислим массу заданной поверхности по формуле (2.15). Спроектируем поверхность полусферы, уравнение которой имеет вид $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, на

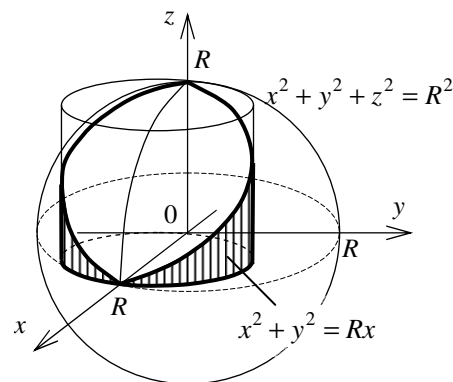


Рис. 2.8.

плоскость Oxy и получим область интегрирования D – круг $x^2 + y^2 \leq R^2$.

$$m = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy = R \iint_D \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy.$$

В полученном двойном интеграле перейдем к полярным координатам:

$$m = R \iint_D \frac{\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} \rho d\rho d\varphi = R \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \frac{\rho^2}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} d\rho = 2\pi R \int_0^R \frac{\rho^2}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} d\rho$$

и произведем вычисления полученного интеграла с помощью подстановки

$\rho = R \sin t$. Тогда $d\rho = R \cos t dt$, пределы интегрирования $t_1 = 0$, $t_2 = \frac{\pi}{2}$ и

$$\begin{aligned} \int_0^R \frac{\rho^2}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} d\rho &= \int_0^{\pi/2} \frac{R^2 \sin^2 t}{R \cos t} R \cos t dt = R^2 \int_0^{\pi/2} \sin^2 t dt = \\ &= \frac{R^2}{2} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos t) dt = \frac{R^2}{2} \left(t - \frac{1}{2} \sin t \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi R^2}{4}. \end{aligned}$$

Следовательно, $m = 2\pi R \frac{\pi R^2}{4} = \frac{\pi^2 R^3}{2}$.

Ответ. $m = \frac{\pi^2 R^3}{2}$.

2.4. Поверхностные интегралы второго рода (поверхностные интегралы по координатам)

2.4.1. Вычисление поверхностных интегралов второго рода

Вычисление поверхностного интеграла второго рода сводится к вычислению двойного интеграла по области D_{xy} – проекции поверхности S , заданной уравнением $z = z(x, y)$, на плоскость Oxy :

$$\iint_S f(x, y, z) dx dy = \pm \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y)) dx dy. \quad (2.16)$$

Отметим, что если поверхность S задана уравнением $y = y(x, z)$ или $x = x(y, z)$, то:

$$\iint_S f(x, y, z) dx dz = \pm \iint_{D_{xz}} f(x, y(x, z), z) dx dz,$$

$$\iint_S f(x, y, z) dy dz = \pm \iint_{D_{yz}} f(x(y, z), y, z) dy dz,$$

где области D_{xz} , D_{yz} – проекции поверхности S на плоскость Oxz , Oyz , соответственно. Знаки перед интегралами выбираются в зависимости от ориентации поверхности S : знак “плюс” берется, если нормаль к поверхности образует с осью Oy острый угол, а знак “минус” – если тупой угол.

Если S – гладкая двусторонняя поверхность, ориентация которой характеризуется нормалью $\mathbf{n}^0 = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\} = \pm \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|}$ и $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ – функции, определенные и непрерывные на S , то поверхностные интегралы первого и второго рода связаны соотношением

$$\iint_S P dy dz + Q dx dy + R dx dz = \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS. \quad (2.17)$$

Задача 2.18. Вычислить интеграл $\iint_S x^2 y^2 z dx dy$, где $S: x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ – положительная (внешняя) сторона сферы при $z = 0$.

Решение. Положительная сторона поверхности $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ характеризуется нормальным вектором $\mathbf{n} = \{-z'_x, -z'_y, +1\}$, угол между этим вектором и поло-

жительным направлением Oz является острым. Проекция поверхности S есть область $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq R^2\}$ – круг радиуса R с центром в начале координат. По

формуле (2.16) имеем $I = \iint_D x^2 y^2 \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy$. Для вычисления полученного

двойного интеграла переходим к полярным координатам, в которых область интегрирования D имеет вид $\tilde{D} = \{(\rho, \varphi) | 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq R\}$:

$$I = \iint_{\tilde{D}} \rho^5 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \sqrt{R^2 - \rho^2} d\rho d\varphi = \int_0^R \rho^5 \sqrt{R^2 - \rho^2} d\rho \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi = I_1 \cdot I_2,$$

$$\text{где } I_1 = \int_0^R \rho^5 \sqrt{R^2 - \rho^2} d\rho, \quad I_2 = \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi.$$

Интеграл I_1 вычислим с помощью подстановки $R^2 - \rho^2 = t$, откуда $\rho^2 = R^2 - t$, и $t_1 = R^2$, $t_2 = 0$ – пределы интегрирования:

$$I_1 = \int_0^R \rho^5 \sqrt{R^2 - \rho^2} d\rho = -\frac{1}{2} \int_0^R \rho^4 \sqrt{R^2 - \rho^2} d(R^2 - \rho^2) = -\frac{1}{2} \int_{R^2}^0 (R^2 - t)^2 \sqrt{t} dt = \frac{8R^7}{105};$$

$$I_2 = \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 4\varphi) d\varphi = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{Окончательно имеем } I = I_1 \cdot I_2 = \frac{2\pi R^7}{105}.$$

$$\text{О т в е т. } I = \frac{2\pi R^7}{105}.$$

Задача 2.19. Вычислить интеграл $I = \iint_S 2y^2 dy dz + x^2 dx dz - 4z^2 dx dy$, где S –

внешняя сторона конической поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, ограниченной плоскостью $z = 2$.

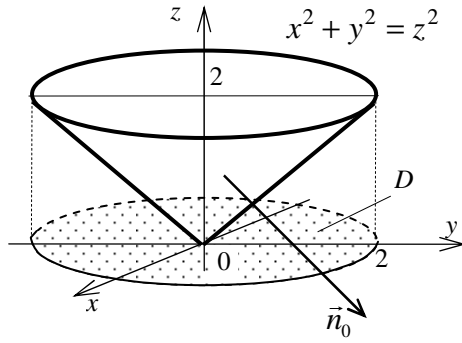


Рис. 2.9

Решение. Данный интеграл можно вычислить двумя способами. Первый способ – вычислить три поверхностных интеграла второго рода, составляющих данный поверхностный интеграл. Второй способ, которым и вычислим данный интеграл, состоит в использовании связи между

поверхностными интегралами первого и второго рода. Внешняя сторона поверхности S характеризуется нормальным вектором, который составляет тупой угол с положительным направлением оси Oz (рис. 2.9):

$$\mathbf{n} = \{z'_x, z'_y, -1\} = \left\{ \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -1 \right\}.$$

Так как $|\mathbf{n}| = \sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 1} = \sqrt{\frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2} + 1} = \sqrt{2}$, то единичный нор-

мальный вектор $\mathbf{n}^0 = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$, где

$$\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{2}\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \cos \beta = \frac{y}{\sqrt{2}\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \cos \gamma = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

По формуле (2.17) имеем:

$$I = \iint_S (2y^2 \cos \alpha + x^2 \cos \beta - 4z^2 \cos \gamma) dS = \frac{1}{\sqrt{2}} \iint_S \left(\frac{2y^2 x + x^2 y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 4z^2 \right) dS.$$

Так как проекция поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ на плоскость Oxy есть область $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$, $dS = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dx dy = \frac{dx dy}{|\cos \gamma|} = \sqrt{2} dx dy$, то по формуле

вычисления поверхностного интеграла первого рода (2.13) имеем:

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}} \iint_D \left(\frac{2y^2x + x^2y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 4(x^2 + y^2) \right) \sqrt{2} dx dy.$$

Полученный двойной интеграл вычислим, перейдя к полярным координатам, в которых область интегрирования примет вид $\tilde{D} = \{(\rho, \varphi) \mid 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq 2\}$:

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\tilde{D}} (2\rho^2 \sin^2 \varphi \cos \varphi + \rho^2 \sin \varphi \cos^2 \varphi + 4\rho^2) \rho d\rho d\varphi = \\ &= \int_0^2 \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} (2\sin^2 \varphi \cos \varphi + \cos^2 \varphi \sin \varphi + 4) d\varphi = \\ &= \left(\frac{\rho^4}{4} \Big|_0^2 \right) \left(\frac{2}{3} \sin^3 \varphi - \frac{\cos^3 \varphi}{3} + 4\varphi \right) \Big|_0^{2\pi} = 32\pi. \end{aligned}$$

Отвѣт. $I = 32\pi$.

• *Рекомендуем решить: задачи № 3887 – 3893.*

2.4.2. Формула Остроградского – Гаусса

Интеграл по замкнутой поверхности S можно преобразовать в тройной интеграл по области V , ограниченной этой поверхностью, по формуле Остроградского – Гаусса:

$$\iint_S Pdydz + Qdxdz + Rdx dy = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz, \quad (2.18)$$

где $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$ непрерывны в области G вместе со своими частными производными $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial z}$.

Задачи 2.20. По формуле Остроградского – Гаусса вычислить поверхностный интеграл $I = \iint_S 4x^3 dydz + 4y^3 dxdy - 6z^4 dxdy$, где S – полная поверхность цилиндра

$x^2 + y^2 = a^2$, заключенная между плоскостями $z = 0$ и $z = h$.

Решение. По условию задачи имеем $P = 4x^3$, $Q = 4y^3$, $R = -6z^4$, их частные производные: $\frac{\partial P}{\partial x} = 12x^2$, $\frac{\partial Q}{\partial y} = 12y^2$, $\frac{\partial R}{\partial z} = -24z^3$. Применяя формулу (2.18), получим:

$$I = 12 \iiint_V (x^2 + y^2 - 2z^3) dxdydz,$$

где область $V = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D, 0 \leq z \leq h\}$, $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq a^2\}$.

Полученный тройной интеграл вычислим перейдя к цилиндрическим координатам, в которых область V примет вид $\tilde{V} = \{(\rho, \varphi, z) \mid (\rho, \varphi) \in \tilde{D}, 0 \leq z \leq h\}$, где

$\tilde{D} = \{(\rho, \varphi) \mid 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq a\}$, итак:

$$\begin{aligned} I &= 12 \iint_{\tilde{D}} dxdy \int_0^h (x^2 + y^2 - 2z^3) dz = 12 \iint_{\tilde{D}} \left[(x^2 + y^2)z - \frac{z^4}{2} \right]_0^h dxdy = \\ &= 12 \iint_{\tilde{D}} \left(\rho^2 h - \frac{h^4}{2} \right) \rho d\varphi d\rho = 12h \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \left(\rho^3 - \frac{h^3}{2} \rho \right) d\rho = 6\pi a^2 h (a^2 - h^3). \end{aligned}$$

Ответ. $I = 6\pi a^2 h (a^2 - h^3)$.

• Рекомендуем решить: задачи № 3896 – 3900.