Задачи для самостоятельного решения.

1. **Решите волновое уравнение методом разделения переменных**

$u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $0 < x < l$, $t > 0$,

$u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = v_0$, $0 < x < l$,

$u(0,t) = 0$, $u(l,t) = 0$, $t > 0$.

2. **Решите задачу Коши для волнового уравнения колебаний бесконечной струны**

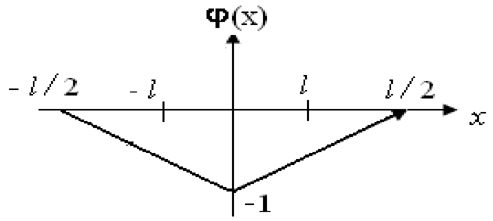
$u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $x \in (-\infty, \infty)$, $t > 0$,

$u(x,0) = \sin x$, $u_t(x,0) = 0$, $x \in (-\infty, \infty)$.

3. **Решите графически задачу**

$u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $x \in (-\infty, \infty)$, $t > 0$,

с начальными условиями $u(x,0) = \varphi(x)$, $u_t(x,0) = 0$, $x \in (-\infty, \infty)$,



где $\varphi(x)$ задана графиком.

Постройте графики профиля струны в моменты времени $t_k = k\dfrac{l}{2a}$, $k = 0;\ 1;\ 2.$

4. **Решите волновое уравнение методом разделения переменных**

$u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $0 < x < l$, $t > 0$,

$u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = v_0$, $0 < x < l$,

$u(0,t) = 0$, $u_x(l,t) = 0$, $t > 0$.

5. **Решите задачу Коши для волнового уравнения колебаний бесконечной струны**

$u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $x \in (-\infty, \infty)$, $t > 0$,

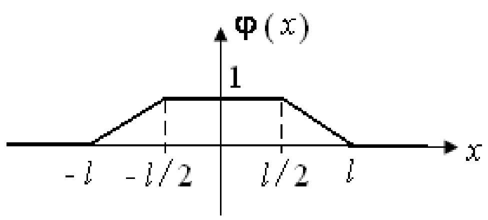
$u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = \cos x$, $x \in (-\infty, \infty)$.

6. **Решите графически задачу**

$u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $x \in (-\infty, \infty)$, $t > 0$,

с начальными условиями $u(x,0) = \varphi(x)$, $u_t(x,0) = 0$, $x \in (-\infty, \infty)$,

где $\varphi(x)$ задана графиком.



Постройте графики профиля струны в моменты времени $t_k = k\dfrac{l}{2a}$, $k = 0;\ 1;\ 2.$

7. **Решите волновое уравнение методом разделения переменных**

$u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $0 < x < l$, $t > 0$,

$u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = v_0$, $0 < x < l$,

$u_x(0,t) = 0$, $u(l,t) = 0$, $t > 0$.

8. **Решите задачу Коши для волнового уравнения колебаний бесконечной струны**

$u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $x \in (-\infty, \infty)$, $t > 0$,

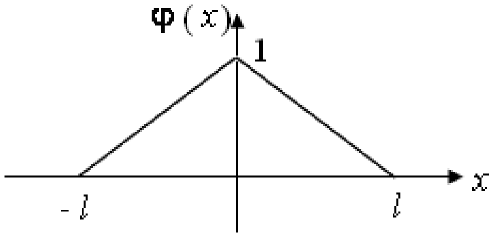
$u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = \sin x$, $x \in (-\infty, \infty)$.

9. Решите графически задачу

$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad x \in (-\infty, \infty), \quad t > 0,$

с начальными условиями $u(x,0) = \phi(x), \ \ u_t(x,0) = 0, \ \ x \in (-\infty, \infty),$

где $\varphi(x)$ задана графиком.



Постройте графики профиля струны в моменты времени $t_k = k\dfrac{l}{2a}, \ k = 0; \ 1; \ 2.$

10. Решите волновое уравнение методом разделения переменных

$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \ 0 < x < l, \ \ t > 0,$

$u(x,0) = 0, \ \ u_t(x,0) = x, \quad 0 < x < l,$

$u(0,t) = 0, \ \ u(l,t) = 0, \ \ t > 0.$

11. Решите задачу Коши для волнового уравнения колебаний бесконечной струны

$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad x \in (-\infty, \infty), \quad t > 0,$

$u(x,0) = 0, \ \ u_t(x,0) = e^x, \ \ x \in (-\infty, \infty).$

12. Найдите собственные значения и собственные функции краевой задачи

12.1. $y'' + \lambda^2 y = 0, \quad x \in [0; l], \quad y(0) = 0, \ \ y(l) = 0.$

12.2. $y'' + \lambda^2 y = 0, \quad x \in [0;1], \quad y(0) = 0, \ \ y'(1) = 0.$

12.3. $y'' + \lambda^2 y = 0, \quad x \in [0;1], \quad y'(0) = 0, \ \ y'(1) = 0.$

12.4. $y'' + \lambda^2 y = 0, \quad x \in [-1;1], \quad y(-1) = y(1), \ \ y'(-1) = y(1).$

12.5. $y'' + \lambda^2 y = 0, \quad x \in [-l; l], \quad y(-l) = 0, \ \ y'(l) = 0.$

12.6. $x^2 y'' + xy' + \lambda^2 y = 0, \quad x \in [1; l], \quad l > 1, \ y(1) = 0, \ \ y(l) = 0.$

Указание: выполнить замену переменной $x = e^t$.

13. Привести к каноническому виду уравнение

$u_{xx} + 2u_{xt} - 3u_{tt} = 0, \ \ x \in (-\infty; +\infty), \ t > 0.$

Найти решение, удовлетворяющее условиям

$u(x,0) = 3x^2, \ \ u_t(x,0) = 0.$ **Ответ:** $u(x,t) = 3x^2 + t^2.$

14. Решить задачу Коши для волнового уравнения

$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad x \in (-\infty; +\infty), \ \ t > 0,$

$u(x,0) = \sin x, \ \ u_t(x,0) = 0.$ **Ответ:** $u(x,t) = \sin x \sin t.$

15. Решить задачу Коши для волнового уравнения

$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \ \ x \in (-\infty; +\infty), \ \ t > 0$

$u(x,0) = 0, \ \ u_t(x,0) = A\sin x.$ **Ответ:** $u(x,t) = \dfrac{A}{a}\sin x \sin at.$

16. Решить краевую задачу для волнового уравнения

$u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $x \in (0; +\infty)$, $t > 0$, $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 0$, $x \in (0, \infty)$, $u_x(0,t) = \mu(t)$, $t > 0$.

Ответ: $u(x,t) = \begin{cases} 0, & 0 < t \le \dfrac{x}{a}, \\ -a \displaystyle\int_0^{t-\frac{x}{a}} \mu(\xi)d\xi, & t > \dfrac{x}{a}. \end{cases}$

17. Решить краевую задачу для волнового уравнения

$u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $x \in (0; +\infty)$, $t > 0$,

$u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 0$, $x \in (0, \infty)$, $u(0,t) = A\sin\omega t$, $t > 0$.

Ответ: $u(x,t) = \begin{cases} 0, & 0 < t \le \dfrac{x}{a}, \\ A\sin\omega(t - \dfrac{x}{a}), & t > \dfrac{x}{a}. \end{cases}$

18. Решить краевую задачу для волнового уравнения

$u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $x \in (0; +\infty)$, $t > 0$,

$u(x,0) = x^2$, $u_t(x,0) = 0$, $x \in (0, \infty)$,

$u(0,t) = 0$, $t > 0$.

Указание: Продолжить начальные условия на всю прямую нечётно и воспользоваться формулой Даламбера.

Ответ: $u(x,t) = \begin{cases} 2atx, & t \ge \dfrac{x}{a}, \\ x^2 + a^2t^2, & t < \dfrac{x}{a}. \end{cases}$

19. Решить краевую задачу для волнового уравнения

$u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $x \in (0; +\infty)$, $t > 0$,

$u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = \phi(x)$, $x \in (0, \infty)$,

$u(0,t) = 0$, $t > 0$.

Указание: Продолжить начальные условия на всю прямую нечётно и воспользоваться формулой Даламбера.

Ответ: $u(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2a} \displaystyle\int_{at+x}^{at-x} \varphi(\xi)d\xi, & t \ge \dfrac{x}{a}, \\ \dfrac{1}{2a} \displaystyle\int_{x-at}^{x+at} \varphi(\xi)d\xi, & t < \dfrac{x}{a}. \end{cases}$

20. Решить задачу Коши для неоднородного волнового уравнения

$u_{tt} = a^2 u_{xx} + xt$, $x \in (-\infty; +\infty)$, $t > 0$,

$u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 0$, $x \in (-\infty, \infty)$.

Ответ: $u(x,t) = \dfrac{xt^3}{6}$.

21. Найти решение задачи Коши для уравнения теплопроводности

$u_t = a^2 u_{xx}$, $x \in (-\infty; +\infty)$, $t > 0$,

$u(x,0) = Ae^{-x^2}$, $x \in (-\infty, \infty)$.

Указание: Использовать интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha\xi^2} d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$. **Ответ:** $u(x,t) = \frac{A}{\sqrt{1+4a^2t}} e^{-\frac{x^2}{1+4a^2t}}$.

22. Начальное распределение температуры внутри бесконечного стержня $x \in (-\infty, +\infty)$ задаётся формулой $u(x,0) = u_0 e^{-\frac{x^2}{l^2}}$.

Найти распределение температуры внутри стержня в любой момент времени $t > 0$.

Указание: Использовать интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha\xi^2} d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$. **Ответ:** $u(x,t) = \frac{u_0 l}{\sqrt{l^2 + 4a^2t}} e^{-\frac{x^2}{l^2+4a^2t}}$.

23. Найти решение задачи Коши для уравнения теплопроводности

$u_t = a^2 u_{xx} - hu, \quad x \in (-\infty; +\infty), \quad t > 0$.

$u(x,0) = \varphi(x), \qquad x \in (-\infty, \infty)$.

Указание: Выполнить замену $u(x,t) = e^{-ht} v(x,t)$. **Ответ:** $u(x,t) = \frac{e^{-ht}}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} d\xi$.

24. Найти распределение температуры внутри бесконечного стержня, если в начальный момент времени $u(x,0) = \begin{cases} 0, & |x| > l \\ -u_0, & -l < x < 0 \\ u_0, & 0 < x < l \end{cases}$. **Решение выразить через интеграл ошибок.**

Ответ: $u(x,t) = \frac{u_0}{2}[2\,erf(\frac{x}{2a\sqrt{t}}) - erf(\frac{x+l}{2a\sqrt{t}}) - erf(\frac{x-l}{2a\sqrt{t}})]$.

25. Найти решение краевой задачи для уравнения теплопроводности

$u_t = a^2 u_{xx}, \quad x \in (0; +\infty), \quad t > 0$, $u(x,0) = u_0 = const, \quad x \in (0, \infty)$, $u_x(0,t) = 0$.

Решение записать через интеграл ошибок. **Ответ:** $u(x,t) = u_0\, erf(\frac{x}{2a\sqrt{t}})$.

26. Найти решение краевой задачи для уравнения теплопроводности

$u_t = a^2 u_{xx}, \quad x \in (0; +\infty), \quad t > 0$, $u(x,0) = 0, \quad x \in (0, +\infty)$, $u(0,t) = u_1$.

Решение записать через интеграл ошибок.

Указание: Выполнить замену $u(x,t) = u_1 + v(x,t)$. **Ответ:** $u(x,t) = u_1\, erf(\frac{x}{2a\sqrt{t}})$.

27. Найти решение краевой задачи для уравнения теплопроводности

$u_t = a^2 u_{xx}, \quad x \in (0; +\infty), \quad t > 0$, $u(x,0) = u_0, \quad x \in (0, +\infty)$, $u(0,t) = u_1$.

Решение записать через интеграл ошибок.

Указание: Выполнить замену $u(x,t) = u_1 + v(x,t)$. **Ответ:** $u(x,t) = u_1 + (u_0 - u_1) erf(\frac{x}{2a\sqrt{t}})$

28. Найти решение краевой задачи для уравнения теплопроводности

$u_t = a^2 u_{xx}, \quad x \in (0; +\infty), \quad t > 0$, $u(x,0) = 0, \quad x \in (0, +\infty)$, $u_x(0,t) = -q = const$.

Указание: Выполнить замену $u(x,t) = -qx + v(x,t)$.

Ответ: $u(x,t) = 2aq\sqrt{\frac{t}{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4a^2t}} - qx(1 - erf(\frac{x}{2a\sqrt{t}}))$.

29. Конец $x=0$ полуограниченной струны $0<x<+\infty$ начиная с момента $t=0$ движется по заданному закону $u(0,t)=\mu(t)$. Найти отклонение $u(x,t)$ точек струны при $t>0$, если начальные отклонения и скорости равны нулю.

Указание: Решение искать в виде $u(x,t)=f(x-at)$.

Ответ: $u(x,t)=\begin{cases}0, & 0<t\le\dfrac{x}{a},\\ \mu(t-\dfrac{x}{a}), & t>\dfrac{x}{a}.\end{cases}$

30. К концу $x=0$ полуограниченного стержня приложена продольная сила $F(t)$ с момента $t=0$. Найти продольные колебания стержня при $t>0$, если начальные отклонения и скорости равны нулю. Модуль упругости стержня E, площадь сечения S, плотность ρ.

Указание: Решение искать в виде $u(x,t)=f(x-at)$. **Ответ:** $u(x,t)=\begin{cases}0, & 0<t\le\dfrac{x}{a},\\ \dfrac{a}{ES}\displaystyle\int_0^{t-\frac{x}{a}}F(\xi)d\xi, & t>\dfrac{x}{a}.\end{cases}$

31. Найти решение краевой задачи для уравнения теплопроводности

$u_t=a^2u_{xx}$, $x\in(0;\,l)$, $t>0$, $u(x,0)=0$, $u_x(0,t)=0$. $u(l,t)=u_0$.

Указание: Выполнить замену $u(x,t)=u_0+v(x,t)$.

Ответ: $u(x,t)=u_0+\dfrac{2u_0}{l}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{\lambda_n}e^{-a^2\lambda_n^2t}\cos\lambda_n x$, $\lambda_n=\dfrac{2n+1}{2l}\pi$.

32. Найти решение краевой задачи для уравнения теплопроводности

$u_t=a^2u_{xx}$, $x\in(0;\,l)$, $t>0$, $u(x,0)=\varphi(x)$, $u_x(0,t)=0$. $u(l,t)=u_0$.

Указание: Выполнить замену $u(x,t)=u_0+v(x,t)$.

Ответ: $u(x,t)=u_0+\dfrac{2u_0}{l}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}A_ne^{-a^2\lambda_n^2t}\cos\lambda_n x$, $\lambda_n=\dfrac{2n+1}{2l}\pi$, $A_n=\dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l\varphi(x)\cos\lambda_n x\,dx+(-1)^{n+1}\dfrac{2u_0}{\lambda_n}$

33. Найти решение краевой задачи для волнового уравнения

$u_{tt}=a^2u_{xx}$, $x\in(0;\,l)$, $t>0$, $u(x,0)=0$, $u_t(x,0)=0$, $u(x,0)=0$, $u_x(l,t)=A=const$.

Указание: Выполнить замену $u(x,t)=Ax+v(x,t)$.

Ответ: $u(x,t)=Ax-\dfrac{8Alu_0}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}\sin\lambda_n x\cos a\lambda_n x$, $\lambda_n=\dfrac{2n+1}{2l}\pi$.

Задачи для уравнения Лапласа.

34. Найти решение уравнения Лапласа $\Delta u=0$ в кольце $R_1\le\rho\le R_2$, удовлетворяющее условиям $u\big|_{\rho=R_1}=u_1=const$, $u\big|_{\rho=R_2}=u_2=const$.

Указание: Перейти в полярные координаты и искать решение, не зависящее от φ.

Ответ: $u(\rho,\varphi)=u_1+\dfrac{u_2-u_1}{\ln\dfrac{R_2}{R_1}}\ln\dfrac{\rho}{R_1}$.

35. **Найти стационарное распределение температуры в пластинке в форме кругового сектора $\{0 \le \varphi \le \alpha,\ \rho \le a\}$, на границе которого задана температура** $u\big|_{\rho=a} = f(\varphi),\ u\big|_{\varphi=0} = 0,\ u\big|_{\varphi=\alpha} = 0$.

Указание: Применить метод разделения переменных.

Ответ: $u(\rho,\varphi) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n \left(\frac{\rho}{a}\right)^{\frac{n}{\alpha}\pi} \sin\frac{n}{\alpha}\pi\varphi,\qquad f_n = \frac{2}{\alpha}\int\limits_0^{\alpha} f(\varphi)\sin\frac{n}{\alpha}\pi\,d\varphi$.

36. **Найти стационарное распределение температуры в пластинке в форме кругового сектора $\{0 \le \varphi \le \alpha,\ \rho \le a\}$, радиусы которого поддерживаются при температуре T_1, а дуга окружности при температуре T_2.**

Указание: Выполнить замену $u(\rho,\varphi) = T_1 + v(\rho,\varphi)$ и применить метод разделения переменных.

Ответ: $u(\rho,\varphi) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{\alpha} 4\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{a}\right)^{\lambda_n} \frac{\sin\lambda_n\varphi}{\lambda_n},\qquad \lambda_n = \frac{2n+1}{\alpha}\pi$.

37. **Найти стационарное распределение температуры в пластинке в форме кругового сектора $\{0 \le \varphi \le \alpha,\ \rho \le a\}$, радиусы которого поддерживаются при температуре T_1, T_2, а дуга окружности при температуре** $f(\varphi)$.

Указание: Выполнить замену $u(\rho,\varphi) = T_1 + (T_2 - T_1)\frac{\varphi}{\alpha} + v(\rho,\varphi)$ и применить метод разделения переменных.

38. **Решить краевую задачу в прямоугольнике $\{0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b\}$ для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ при граничных условиях** $u\big|_{x=0} = 0,\ u\big|_{x=a} = 0,\ u\big|_{y=0} = 0$**,** $u\big|_{y=b} = f(x)$.

Указание: Применить метод разделения переменных.

39. **Решить краевую задачу в прямоугольнике $\{0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b\}$ для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ при граничных условиях** $u\big|_{x=0} = 0,\quad u\big|_{x=a} = f(y),\ u\big|_{y=0} = 0,\quad u\big|_{y=b} = 0$.

Указание: Применить метод разделения переменных.

40. **Найти стационарное распределение температуры $u(x,y)$ в бесконечном брусе квадратного сечения $\{0 \le x \le a,\ 0 \le y \le a\}$, три стороны которого поддерживаются при нулевой температуре, а на четвёртой $x = a$ постоянная температура T_0.**

Указание. Применить метод разделения переменных.

Ответ: $u(x,y) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n sh\lambda_n y \sin\lambda_n x,\ A_n = \frac{4T_0}{\lambda_n sha\lambda_n},\ \lambda_n = \frac{2n+1}{a}\pi$.

41. **Найти электростатическое поле внутри области $\{0 \le x \le \infty,\ 0 \le y \le b\}$, ограниченной проводящими пластинами $y = 0,\ \ y = b,\ x = 0$, если пластина $x = 0$ заряжена до потенциала v_0, а пластины $y = 0,\ y = b$ заземлены. Заряды внутри области отсутствуют.**

Указание: Применить метод разделения переменных.

Ответ: $u(x,y) = 4v_0\sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda_n x}\frac{\sin\lambda_n y}{\lambda_n},\ \lambda_n = \frac{2n+1}{b}\pi$.

42. **Найти электростатическое поле внутри области $\{0 \le x \le b,\ 0 \le y \le \infty\}$, ограниченной проводящими пластинами $y = 0,\ \ x = 0,\ x = b$, если пластина $y = 0$ заряжена до потенциала v_0, а пластины $x = 0,\ x = b$ заземлены. Заряды внутри области отсутствуют.**

Указание: Применить метод разделения переменных.

Ответ: $u(x,y) = 4v_0\sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda_n y}\frac{\sin\lambda_n x}{\lambda_n},\ \lambda_n = \frac{2n+1}{b}\pi$.

43. Найти решение краевой задачи в полуполосе $\{0 \le x \le l,\ 0 \le y \le +\infty\}$ **для уравнения Лапласа** $\Delta u = 0$ **при граничных условиях** $u(0,y) = 0$, $u(l,y) = 0$, $u(x,0) = A(1 - \frac{x}{l})$, $\lim\limits_{y \to \infty} u(x,y) = 0$.

Указание: Применить метод разделения переменных.

Ответ: $u(x,y) = \frac{2A}{l} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_n y}}{\lambda_n} \sin \lambda_n x,\ \lambda_n = \frac{n\pi}{l}$.