Задание 1

Найдите собственные значения и собственные функции краевой задачи.

1. $y'' + \lambda^2 y = 0, \quad x \in [0; l], \quad y(0) = 0, \ y(l) = 0$.
2. $y'' + \lambda^2 y = 0, \quad x \in [-1; 1], \quad y(-1) = 0, \ y(1) = 0.$
3. $y'' + \lambda^2 y = 0, \quad x \in [-\pi; \pi], \quad y(-\pi) = 0, \ y(\pi) = 0.$
4. $y'' + \lambda^2 y = 0, \quad x \in [a; b], \quad y(a) = 0, \ y(b) = 0.$
5. $y'' + \lambda^2 y = 0, \quad x \in [a; b], \quad y(a) = 0, \ y'(b) = 0.$
6. $y'' + \lambda^2 y = 0, \quad x \in [-l; l], \quad y(-l) = 0, \ y'(l) = 0.$
7. $y'' + \lambda^2 y = 0, \quad x \in [a; b], \quad y'(a) = 0, \ y'(b) = 0.$
8. $y'' + \lambda^2 y = 0, \quad x \in [a; b], \quad y(a) = y(b), \ y'(b) = 0.$
9. $y'' + \lambda^2 y = 0, \quad x \in [a; b], \quad y(a) = 0, \quad y(b) + y'(b) = 0.$
10. $y'' + \lambda^2 y = 0, \quad x \in [0; \pi], \quad y(0) = y(\pi), \quad y'(0) = y'(\pi).$
11. $y'' + \lambda^2 y = 0, \quad x \in [0; 1], \quad y(0) = 0, \quad y(1) + y'(1) = 0.$
12. $y'' + \lambda^2 y = 0, \quad x \in [-1; 1], \quad y(-1) = 0, \ y'(1) = 0.$
13. $y'' + \lambda^2 y = 0, \quad x \in [1; 2], \quad y(1) = y(2), \ y'(1) = y'(2).$
14. $y'' + \lambda^2 y = 0, \quad x \in [0; 1], \quad y(0) = y(1), \ y'(1) = 0.$
15. $y'' + \lambda^2 y = 0, \quad x \in [-1; 1], \quad y'(-1) = 0, \ y'(1) = 0.$
16. $y'' + \lambda^2 y = 0, \quad x \in [0; 1], \quad y'(0) = 0, \ y'(1) = 0.$
17. $y'' + \lambda^2 y = 0, \quad x \in [0; l], \quad y'(0) = 0, \ y(l) = 0.$
18. $y'' + \lambda^2 y = 0, \quad x \in [0; l], \quad y(0) = y(l), \ y'(0) = y'(l).$
19. $y'' + \lambda^2 y = 0, \quad x \in [-1; 1], \quad y(-1) = 0, \ y(1) + y'(1) = 0.$
20. $y'' + \lambda^2 y = 0, \quad x \in [a; b], \quad y'(a) = 0, \ y(a) = y(b).$

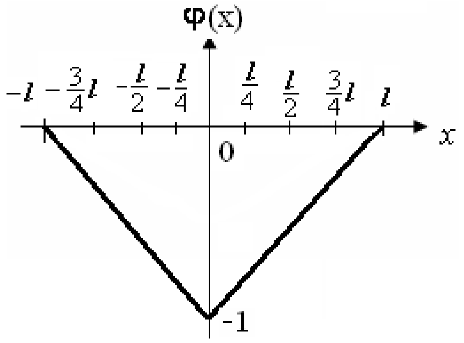
Задание 2

Укажите характеристики $\begin{cases} \xi = \varphi(x,y), \\ \eta = \psi(x,y) \end{cases}$ и приведите уравнение к каноническому виду.

1. $u_{xx} + u_{xy} - 2u_{yy} + 9u = 0$.
2. $u_{xx} + 6u_{xy} + 13u_{yy} + 4u = 0$.
3. $u_{xx} + 6u_{xy} + 9u_{yy} - 9u = 0$
4. $2u_{xx} + 7u_{xy} + 6u_{yy} - u = 0$.
5. $u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} + u = 0$.
6. $9u_{xx} + 6u_{xy} + u_{yy} + 9u = 0$.
7. $u_{xx} + 3u_{xy} + 2u_{yy} + u = 0$.
8. $5u_{xx} + 6u_{xy} + 2u_{yy} + 5u = 0$
9. $9u_{xx} + 6u_{xy} + 4u_{yy} - 9u = 0$.
10. $3u_{xx} + 4u_{xy} + u_{yy} - 4u = 0$.
11. $u_{xx} + 8u_{xy} + 20u_{yy} + 4u = 0$.
12. $4u_{xx} - 12u_{xy} + 9u_{yy} - 4u = 0$
13. $5u_{xx} + 8u_{xy} + 3u_{yy} - 4u = 0$.
14. $u_{xx} + 4u_{xy} + 5u_{yy} + u = 0$.
15. $u_{xx} + 4u_{xy} + 4u_{yy} - u = 0$
16. $6u_{xx} + 13u_{xy} + 2u_{yy} - 121u = 0$
17. $5u_{xx} + 8u_{xy} + 4u_{yy} + 20u = 0$.
18. $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + u = 0$.
19. $5u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 10u = 0$.
20. $25u_{xx} + 10u_{xy} + u_{yy} + 25u = 0$.

Задание 3 (графическое изображение волны)

1. Решите графически задачу $u_{tt} = a^2 u_{xx},\ x \in (-\infty, \infty),\ t > 0$
с начальными условиями
$u(x,0) = \varphi(x),\ \ u_t(x,0) = 0,\ \ x \in (-\infty,\ \infty)$,

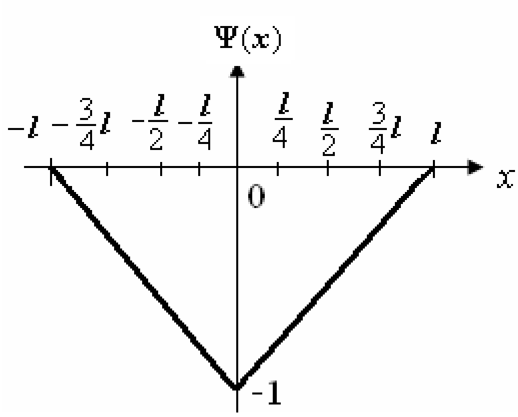


где $\phi(x)$ задана графиком.

Постройте графики профиля струны в моменты времени

$\Delta t_k = k\dfrac{l}{4a},\ k = 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4.$

2. Решите графически задачу $u_{tt} = a^2 u_{xx},\ x \in (-\infty, \infty),\ t > 0$
с начальными условиями
$u(x,0) = 0,\ \ u_t(x,0) = \psi(x),\ \ x \in (-\infty,\ \infty)$,

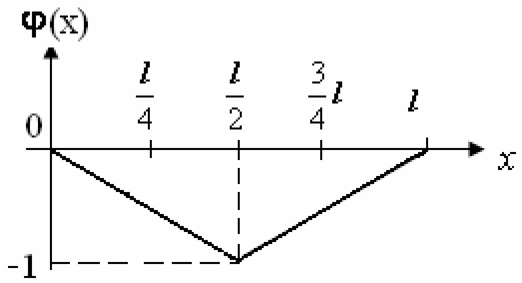


где интеграл $\Psi(x) = \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_0^x \psi(\xi)d\xi$ задан графиком.

Постройте графики профиля струны в моменты времени

$\Delta t_k = k\dfrac{l}{4a},\ k = 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4.$

3. Решите графически задачу $u_{tt} = a^2 u_{xx},\ x \in (-\infty, \infty),\ t > 0$
с начальными условиями
$u(x,0) = \phi(x),\ \ u_t(x,0) = 0,\ \ x \in (-\infty,\ \infty)$,



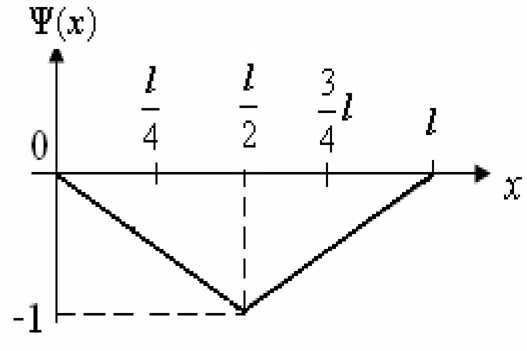
где $\phi(x)$ задана графиком.

Постройте графики профиля струны

в моменты времени $\Delta t_k = k\dfrac{l}{4a},\ k = 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4.$

4. Решите графически задачу $u_{tt} = a^2 u_{xx},\ x \in (-\infty, \infty),\ t > 0$ с начальными условиями $u(x,0) = 0,\ \ u_t(x,0) = \psi(x),\ \ x \in (-\infty,\ \infty)$,

где интеграл $\Psi(x) = \dfrac{1}{2a}\int\limits_0^x \psi(\xi)d\xi$ задан графиком.

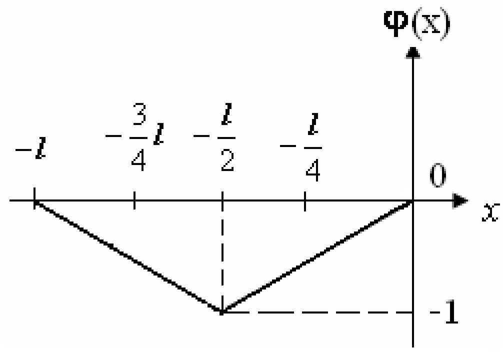


Постройте графики профиля струны

в моменты времени $\Delta t_k = k\dfrac{l}{4a},\ k = 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4.$

5. Решите графически задачу $u_{tt} = a^2 u_{xx},\ x \in (-\infty, \infty),\ t > 0$ с начальными условиями $u(x,0) = \phi(x),\ \ u_t(x,0) = 0,\ \ x \in (-\infty,\ \infty)$,

где $\phi(x)$ задана графиком.

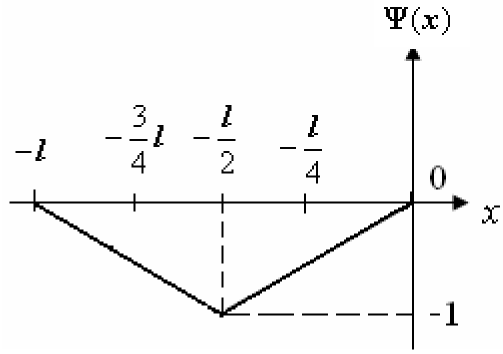


Постройте графики профиля струны

в моменты времени $\Delta t_k = k\dfrac{l}{4a},\ k = 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4.$

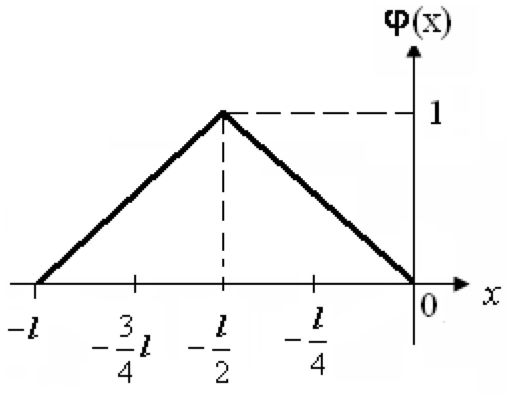
6. Решите графически задачу $u_{tt} = a^2 u_{xx},\ x \in (-\infty, \infty),\ t > 0$ с начальными условиями $u(x,0) = 0,\ \ u_t(x,0) = \psi(x),\ \ x \in (-\infty,\ \infty)$,

где интеграл $\Psi(x) = \dfrac{1}{2a}\int\limits_0^x \psi(\xi)d\xi$ задан графиком.



Постройте графики профиля струны в моменты времени $\Delta t_k = k\dfrac{l}{4a},\ k = 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4.$

7. Решите графически задачу $u_{tt} = a^2 u_{xx},\ x \in (-\infty, \infty),\ t > 0$ с начальными условиями $u(x,0) = \phi(x),\ \ u_t(x,0) = 0,\ \ x \in (-\infty,\ \infty)$,

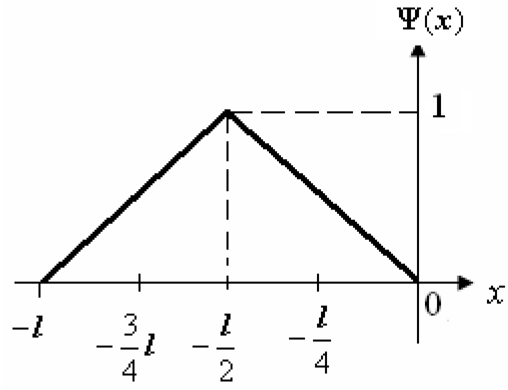


где $\phi(x)$ задана графиком.

Постройте графики профиля струны

в моменты времени $\Delta t_k = k\dfrac{l}{4a},\ k = 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4.$

8. Решите графически задачу $u_{tt} = a^2 u_{xx},\ x \in (-\infty, \infty),\ t > 0$ с начальными условиями $u(x,0) = 0,\ \ u_t(x,0) = \psi(x),\ \ x \in (-\infty,\ \infty)$,

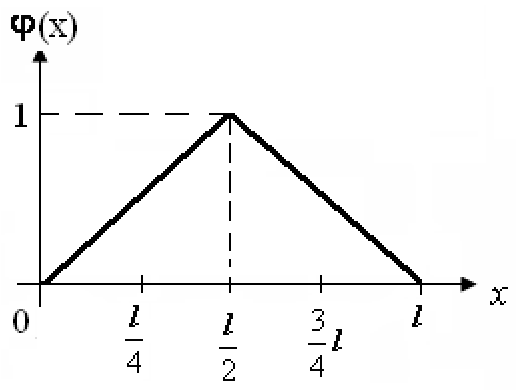


где интеграл $\Psi(x) = \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_0^x \psi(\xi)d\xi$ задан графиком.

Постройте графики профиля струны

в моменты времени $\Delta t_k = k\dfrac{l}{4a},\ k = 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4.$

9. Решите графически задачу $u_{tt} = a^2 u_{xx},\ x \in (-\infty, \infty),\ t > 0$ с начальными условиями $u(x,0) = \phi(x),\ \ u_t(x,0) = 0,\ \ x \in (-\infty,\ \infty)$,



где $\phi(x)$ задана графиком.

Постройте графики профиля струны

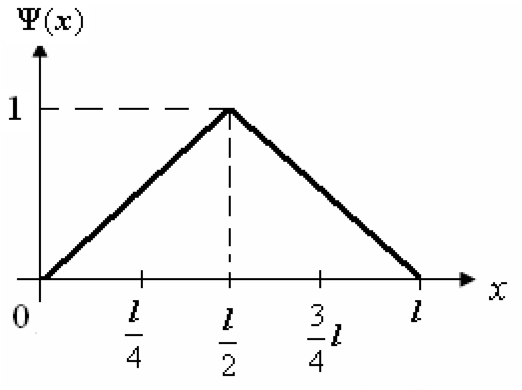
в моменты времени $\Delta t_k = k\dfrac{l}{4a},\ k = 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4.$

10. Решите графически задачу $u_{tt} = a^2 u_{xx},\ x \in (-\infty, \infty),\ t > 0$

с начальными условиями

$u(x,0) = 0,\ \ u_t(x,0) = \psi(x),\ \ x \in (-\infty,\ \infty)$,

где интеграл $\Psi(x) = \dfrac{1}{2a}\int\limits_0^x \psi(\xi)d\xi$ задан графиком.



Постройте графики профиля струны

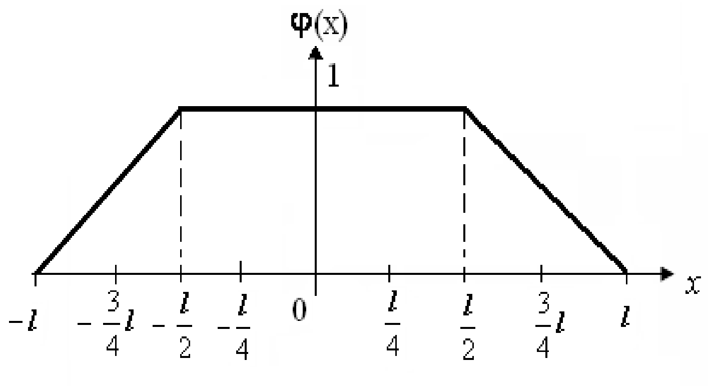
в моменты времени $\Delta t_k = k\dfrac{l}{4a},\ k = 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4.$

11. Решите графически задачу $u_{tt} = a^2 u_{xx},\ x \in (-\infty, \infty),\ t > 0$

с начальными условиями

$u(x,0) = \phi(x),\ \ u_t(x,0) = 0,\ \ x \in (-\infty,\ \infty)$,

где $\phi(x)$ задана графиком.



Постройте графики профиля струны в моменты времени

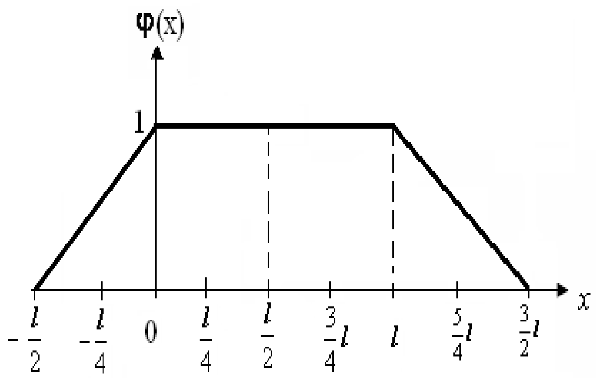
$\Delta t_k = k\dfrac{l}{4a},\ k = 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4.$

12. Решите графически задачу $u_{tt} = a^2 u_{xx},\ x \in (-\infty, \infty),\ t > 0$

с начальными условиями

$u(x,0) = \phi(x),\ \ u_t(x,0) = 0,\ \ x \in (-\infty,\ \infty)$,

где $\phi(x)$ задана графиком.



Постройте графики профиля струны в

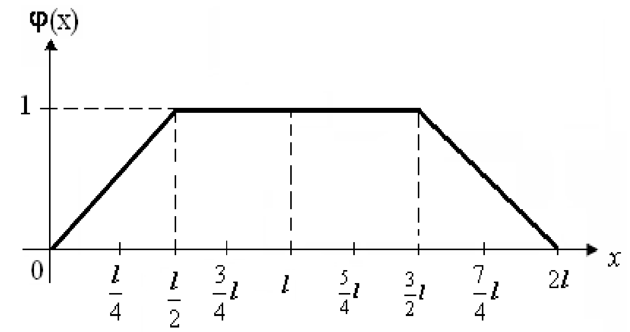
моменты времени $\Delta t_k = k\dfrac{l}{4a},\ k = 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4.$

13. Решите графически задачу $u_{tt} = a^2 u_{xx},\ x \in (-\infty, \infty),\ t > 0$

с начальными условиями

$u(x,0) = \phi(x),\quad u_t(x,0) = 0,\quad x \in (-\infty,\ \infty)$,

где $\phi(x)$ задана графиком.



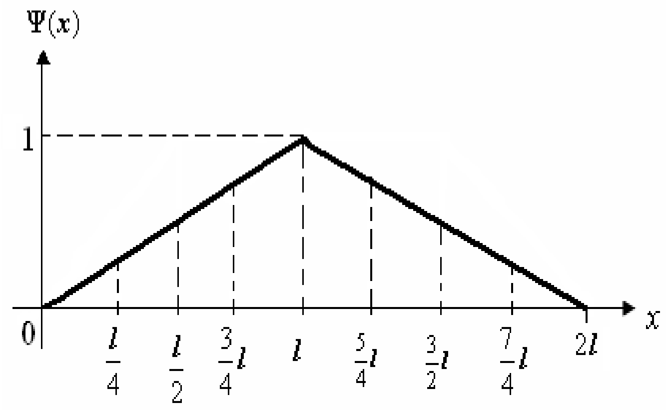
Постройте графики профиля струны в моменты времени $\Delta t_k = k\dfrac{l}{4a},\ k = 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4.$

14. Решите графически задачу $u_{tt} = a^2 u_{xx},\ x \in (-\infty, \infty),\ t > 0$

с начальными условиями

$u(x,0) = 0,\quad u_t(x,0) = \psi(x),\quad x \in (-\infty,\ \infty)$,

где интеграл $\Psi(x) = \dfrac{1}{2a}\int_0^x \psi(\xi)d\xi$ задан графиком.



Постройте графики профиля струны в моменты времени

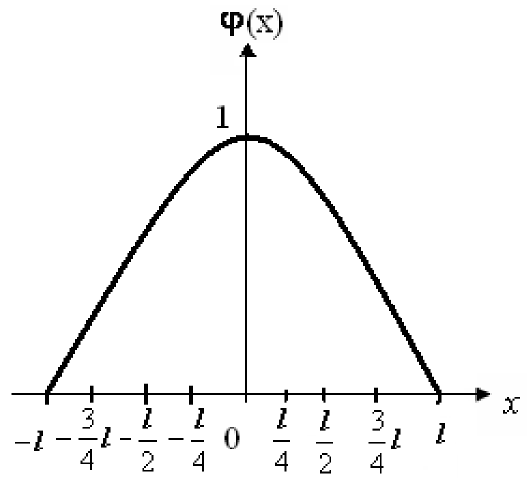
$\Delta t_k = k\dfrac{l}{4a},\ k = 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4.$

15. Решите графически задачу $u_{tt} = a^2 u_{xx},\ x \in (-\infty, \infty),\ t > 0$

с начальными условиями

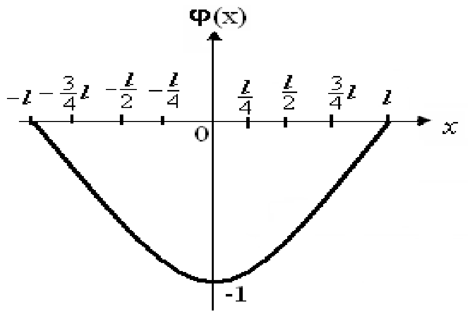
$u(x,0) = \phi(x),\quad u_t(x,0) = 0,\quad x \in (-\infty,\ \infty)$,

где $\phi(x)$ задана графиком.



Постройте графики профиля струны в моменты времени $\Delta t_k = k\dfrac{l}{4a},\ k = 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4.$

16. Решите графически задачу $u_{tt} = a^2 u_{xx},\ x \in (-\infty, \infty),\ t > 0$



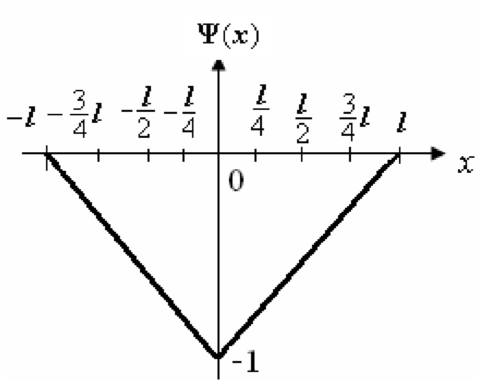
с начальными условиями

$u(x,0) = \phi(x),\ \ u_t(x,0) = 0,\ \ x \in (-\infty,\ \infty)$,

где $\phi(x)$ задана графиком.

Постройте графики профиля струны в моменты времени $\Delta t_k = k\dfrac{l}{4a},\ k = 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4.$

17. Решите графически задачу $u_{tt} = a^2 u_{xx},\ x \in (-\infty, \infty),\ t > 0$



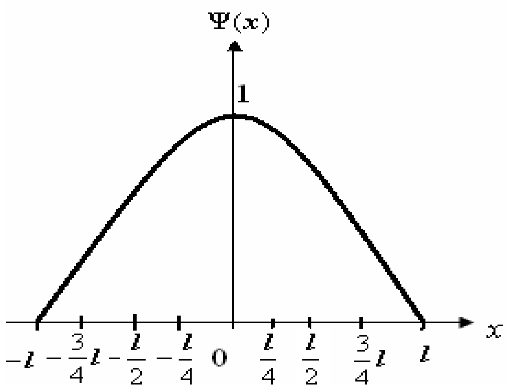
с начальными условиями

$u(x,0) = 0,\ \ u_t(x,0) = \psi(x),\ \ x \in (-\infty,\ \infty)$,

где интеграл $\Psi(x) = \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_0^x \psi(\xi)d\xi$ задан графиком.

Постройте графики профиля струны в моменты времени $\Delta t_k = k\dfrac{l}{4a},\ k = 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4.$

18. Решите графически задачу $u_{tt} = a^2 u_{xx},\ x \in (-\infty, \infty),\ t > 0$



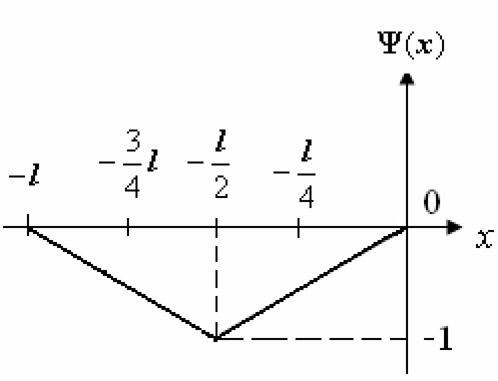
с начальными условиями

$u(x,0) = 0,\ \ u_t(x,0) = \psi(x),\ \ x \in (-\infty,\ \infty)$,

где интеграл $\Psi(x) = \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_0^x \psi(\xi)d\xi$ задан графиком.

Постройте графики профиля струны в моменты времени $\Delta t_k = k\dfrac{l}{4a},\ k = 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4.$

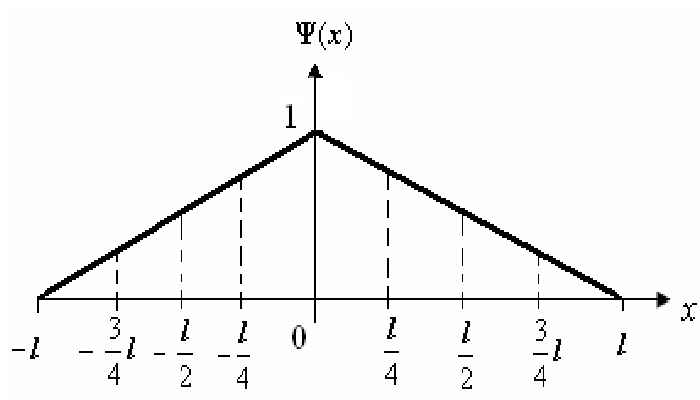
19. Решите графически задачу $u_{tt} = a^2 u_{xx},\ x \in (-\infty, \infty),\ t > 0$ с начальными условиями $u(x,0) = 0,\ \ u_t(x,0) = \psi(x),\ \ x \in (-\infty,\ \infty)$,



где интеграл $\Psi(x) = \frac{1}{2a}\int_0^x \psi(\xi)d\xi$ задан графиком.

Постройте графики профиля струны в моменты времени $\Delta t_k = k\frac{l}{4a},\ k = 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4.$

20. Решите графически задачу $u_{tt} = a^2 u_{xx},\ x \in (-\infty, \infty),\ t > 0$ с начальными условиями $u(x,0) = 0,\ \ u_t(x,0) = \psi(x),\ \ x \in (-\infty,\ \infty)$,



где интеграл $\Psi(x) = \frac{1}{2a}\int_0^x \psi(\xi)d\xi$ задан графиком.

Постройте графики профиля струны в моменты времени

$\Delta t_k = k\frac{l}{4a},\ k = 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4.$

Задание 4 (Метод Фурье для волнового уравнения)

Решите волновое уравнение методом разделения переменных.

1. $u_{tt} = a^2 u_{xx},\ 0 < x < l,\ \ t > 0$

$$u(x,0) = 0,\ \ u_t(x,0) = v_0,\ 0 < x < l\ , \qquad u(0,t) = 0,\ \ u_x(l,t) = 0,\ t > 0.$$

2. $u_{tt} = a^2 u_{xx},\ 0 < x < l,\ \ t > 0$

$$u(x,0) = 0,\ \ u_t(x,0) = v_0,\ 0 < x < l\ , \qquad u_x(0,t) = 0,\ \ u(l,t) = 0,\quad t > 0.$$

3. $u_{tt} = a^2 u_{xx},\ 0 < x < l,\ \ t > 0$

$$u(x,0) = 0,\ \ u_t(x,0) = x,\ 0 < x < l\ , \qquad u_x(0,t) = 0,\ \ u(l,t) = 0,\quad t > 0.$$

4. $u_{tt} = a^2 u_{xx},\ x \in (0;\ l),\ t > 0,$

$$u(x,0) = 0,\quad u_t(x,0) = 0\ , \qquad u(0,t) = 0,\quad u_x(l,t) = A = const\ .$$

Указание. Выполнить замену $u(x,t) = Ax + v(x,t)$.

5. $u_{tt} = a^2 u_{xx},\ 0 < x < l,\ \ t > 0$

$$u(x,0) = 0,\ \ u_t(x,0) = v_0,\ 0 < x < l\ , \qquad u(0,t) = 0,\quad u(l,t) = 0,\quad t > 0.$$

6. $u_{tt} = a^2 u_{xx},\ 0 < x < l,\ \ t > 0$

$$u(x,0) = 0, \qquad u_t(x,0) = \begin{cases} v_0, & 0 < x < \dfrac{l}{2}, \\ 0, & \dfrac{l}{2} < x < l. \end{cases} \qquad u(0,t) = 0,\ \ u(l,t) = 0,\quad t > 0.$$

7. $u_{tt} = a^2 u_{xx},\ 0 < x < l,\ \ t > 0$

$$u(x,0) = 0, \qquad u_t(x,0) = \begin{cases} 0, & 0 < x < \dfrac{l}{2}, \\ v_0, & \dfrac{l}{2} < x < l. \end{cases} \qquad u(0,t) = 0,\ \ u(l,t) = 0,\quad t > 0.$$

8. $u_{tt} = a^2 u_{xx},\ 0 < x < l,\ \ t > 0$

$$u(x,0) = 0,\ \ u_t(x,0) = 0, \qquad u(0,t) = 0,\ \ u(l,t) = at,\quad t > 0.$$

Указание. Выполнить замену $u(x,t) = \dfrac{x}{l}at + v(x,t).$

9. $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $0 < x < l$, $t > 0$

$$u(x,0) = \frac{4h}{l^2} x(l-x), \quad u_t(x,0) = 0, \ 0 < x < l, \qquad u(0,t) = 0, \ u(l,t) = 0, \quad t > 0.$$

10. $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $0 < x < l$, $t > 0$

$$u(0,t) = 0, \ u(l,t) = 0, \quad t > 0, \qquad u(x,0) = \begin{cases} \frac{h}{2l} x, & 0 < x < \frac{l}{2}, \\ 2h(1 - \frac{x}{l}), & \frac{l}{2} < x < l. \end{cases} \quad u_t(x,0) = 0.$$

11. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + g$, $0 < x < l$, $t > 0$

$$u(x,0) = 0, \qquad u_t(x,0) = 0, \qquad u(0,t) = 0, \qquad u(l,t) = 0, \quad t > 0.$$

12. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + g$, $0 < x < l$, $t > 0$

$$u(x,0) = 0, \qquad u_t(x,0) = 0, \qquad u(0,t) = 0, \qquad u_x(l,t) = 0, \quad t > 0.$$

13. $u_{tt} = u_{xx} + x$, $0 < x < l$, $t > 0$

$$u(x,0) = 0, \qquad u_t(x,0) = 0, \qquad u(0,t) = 0, \ u(l,t) = 0, \quad t > 0.$$

14. $u_{tt} = u_{xx}$, $0 < x < \pi$, $t > 0$

$$u(x,0) = x(1 - \frac{x}{\pi}), \quad u_t(x,0) = 0, \qquad u(0,t) = 0, \ u(\pi,t) = 0, \quad t > 0.$$

15. $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $0 < x < l$, $t > 0$

$$u(x,0) = x, \quad u_t(x,0) = 0, \quad u_x(0,t) = 0, \ u_x(l,t) = 0, \quad t > 0.$$

16. $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $0 < x < l$, $t > 0$

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = x, \quad u_x(0,t) = 0, \ u_x(l,t) = 0, \quad t > 0.$$

17. $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $-l < x < l$, $t > 0$

$$u(x,0) = h(1 - \frac{|x|}{l}), \quad u_t(x,0) = 0, \quad u_x(-l,t) = 0, \ u(l,t) = 0, \quad t > 0.$$

Указание. Выполнить замену переменной $z = x + l$.

18. $u_{tt} = a^2 u_{xx}, \; -l < x < l, \; t > 0$

$$u(x,0) = -\varepsilon x, \qquad u_t(x,0) = 0, \qquad u_x(-l,t) = 0, \; u_x(l,t) = 0, \quad t > 0.$$

Указание. Выполнить замену переменной $z = x + l$.

19. $u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad -l < x < l, \; t > 0$

$$u(x,0) = h\left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right), \qquad u_t(x,0) = 0, \qquad u_x(-l,t) = 0, \qquad u(l,t) = 0, \quad t > 0.$$

Указание. Выполнить замену переменной $z = x + l$.

20. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + b^2, \; 0 < x < l, \; t > 0$

$$u(x,0) = 0, \qquad u_t(x,0) = 0, \qquad u(0,t) = 0, \qquad u(l,t) = 0, \quad t > 0.$$

Задание 5 (Метод Фурье для уравнения теплопроводности)

Найдите решение краевой задачи для уравнения теплопроводности.

1. $u_t = a^2 u_{xx},\ x \in (0;\, l),\ t > 0,\qquad u(x,0) = 0,\quad u_x(0,t) = 0,\ u(l,t) = u_0.$

Указание. Выполнить замену $u(x,t) = u_0 + v(x,t).$

2. $u_t = a^2 u_{xx},\ x \in (0;\, l),\ t > 0,\qquad u(x,0) = u_0 \dfrac{x}{l},\quad u_x(0,t) = 0,\ u(l,t) = u_0.$

Указание. Выполнить замену $u(x,t) = u_0 + v(x,t).$

3. $u_t = u_{xx},\ x \in (0;\, l),\ t > 0,\qquad u(x,0) = u_0 \dfrac{x}{l},\quad u_x(0,t) = 0,\ u_x(l,t) = 0.$

4. $u_t = a^2 u_{xx},\ x \in (0;\, l),\ t > 0,\qquad u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0,\quad u(x,0) = \begin{cases} 0, & 0 < x < \dfrac{l}{2}, \\ u_0, & \dfrac{l}{2} < x < l. \end{cases}$

5. $u_t = a^2 u_{xx},\ x \in (0;\, l),\ t > 0,\qquad u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0,\quad u(x,0) = \begin{cases} u_0, & 0 < x < \dfrac{l}{2}, \\ 0, & \dfrac{l}{2} < x < l. \end{cases}$

6. $u_t = a^2 u_{xx},\ x \in (0;\, l),\ t > 0,\qquad u_x(0,t) = 0,\ u(l,t) = u_0,\quad u(x,0) = u_0 \dfrac{x^2}{l^2}.$

Указание. Выполнить замену $u(x,t) = u_0 \dfrac{x^2}{l^2} + v(x,t).$

7. $u_t = a^2 u_{xx},\ x \in (0;\, l),\ t > 0,\qquad u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0,\ u(x,0) = u_0 (1 - \dfrac{x}{l}).$

8. $u_t = a^2 u_{xx},\ x \in (0;\, l),\ t > 0,\qquad u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0,\quad u(x,0) = \begin{cases} u_0 \dfrac{x}{l}, & 0 < x < \dfrac{l}{2}, \\ u_0 (1 - \dfrac{x}{l}), & \dfrac{l}{2} < x < l. \end{cases}$

9. $u_t = a^2 u_{xx} - u_0 \omega (1 - \dfrac{x}{l}) \sin \omega t,\ x \in (0;\, l),\ t > 0,\quad u(x,0) = 0,\quad u(0,t) = u_0 \cos \omega t,\ u(l,t) = 0.$

Указание. Выполнить замену $u(x,t) = u_0 (1 - \dfrac{x}{l}) \cos \omega t + v(x,t).$

10. $u_t = a^2 u_{xx},\ x \in (0;\, l),\ t > 0,\qquad u(x,0) = u_0 \dfrac{x}{l},\quad u_x(0,t) = 0,\ u(l,t) = u_0.$

Указание. Выполнить замену $u(x,t) = u_0 + v(x,t).$

11. $u_t = u_{xx}$, $x \in (0;\, l),\ t > 0$, $u(x,0) = 0$, $u_x(0,t) = 1$, $u(l,t) = 0$

Указание. Выполнить замену $u(x,t) = x - l + v(x,t)$.

12. $u_t = a^2 u_{xx}$, $x \in (0;\, l),\ t > 0$, $u(x,0) = 0$, $u(0,t) = 0$, $u_x(l,t) = 1$.

Указание. Выполнить замену $u(x,t) = x + v(x,t)$.

13. $u_t = a^2 u_{xx}$, $x \in (0;\, l),\ t > 0$, $u(x,0) = 0$, $u(0,t) = At$, $u(l,t) = 0$.

Указание. Выполнить замену $u(x,t) = At(1 - \dfrac{x}{l}) + v(x,t)$.

14. $u_t = a^2 u_{xx}$, $x \in (0;\, l),\ t > 0$, $u(x,0) = 0$, $u(0,t) = u_0$, $u(l,t) = u_0$.

Указание. Выполнить замену $u(x,t) = u_0 + v(x,t)$.

15. $u_t = a^2 u_{xx}$, $x \in (0;\, l),\ t > 0$, $u(x,0) = 0$, $u(0,t) = 0$, $u(l,t) = At$.

Указание. Выполнить замену $u(x,t) = At\dfrac{x}{l} + v(x,t)$.

16. $u_t = u_{xx}$, $x \in (0;\, 1),\ t > 0$, $u(x,0) = x^2 - 1$, $u_x(0,t) = 0$, $u(1,t) = 0$.

17. $u_t = a^2 u_{xx} - u$, $x \in (0;\, l),\ t > 0$, $u(x,0) = 1$, $u(0,t) = 0$ $,u(l,t) = 0$.

Указание. Выполнить замену $u(x,t) = e^{-t} v(x,t)$.

18. $u_t = a^2 u_{xx} - h^2 u$, $x \in (0;\, l),\ t > 0$, $u(x,0) = u_0$, $u(0,t) = 0$, $u(l,t) = 0$.

Указание. Выполнить замену $u(x,t) = e^{-h^2 t} v(x,t)$.

19. $u_t = a^2 u_{xx}$, $x \in (0;\, l),\ t > 0$, $u(x,0) = u_0$, $u(0,t) = u_1$, $u(l,t) = 0$

Указание. Выполнить замену $u(x,t) = u_1(1 - \dfrac{x}{l}) + v(x,t)$.

20. $u_t = a^2 u_{xx}$, $x \in (0;\, l),\ t > 0$, $u(x,0) = u_1$, $u(0,t) = 0$, $u(l,t) = u_2$.

Указание. Выполнить замену $u(x,t) = u_2 \dfrac{x}{l} + v(x,t)$.

Задание 6

Задача Коши для уравнения теплопроводности на бесконечной прямой.

Расчетные формулы.

Решением неоднородного уравнения теплопроводности

$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t),\ \ x \in (-\infty; +\infty),\ t > 0$

$u(x,0) = \varphi(x)$

является функция (формула Пуассона):

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi,\tau) \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2a\sqrt{t-\tau}} d\xi$$

Другая форма записи решения

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x - 2a\sqrt{t}\xi) e^{-\xi^2} d\xi + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - 2a\sqrt{t-\tau}\xi, \tau) e^{-\xi^2} d\xi$$

1. Найдите решение задачи Коши для уравнения теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx},\ \ x \in (-\infty; +\infty),\ t > 0, \qquad u(x,0) = Ae^{-x^2}.$$

Указание. Использовать интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha\xi^2} d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$.

2. Начальное распределение температуры внутри бесконечного стержня $x \in (-\infty, +\infty)$ задаётся формулой $u(x,0) = u_0 e^{-\frac{x^2}{l^2}}$. Найдите распределение температуры внутри стержня в любой момент времени $t > 0$.

Указание. Использовать интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha\xi^2} d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}, \quad \alpha > 0.$

3. Найдите распределение температуры внутри бесконечного стержня, если в начальный момент времени $u(x,0) = \begin{cases} 0, & |x| > l, \\ u_0, & |x| < l. \end{cases}$ Решение выразить через интеграл ошибок.

4. Найдите решение задачи Коши для уравнения теплопроводности

$$u_t = u_{xx}, \quad x \in (-\infty; +\infty),\ t > 0, \qquad u(x,0) = \begin{cases} 0, & x \notin (-l,l), \\ u_0, & x \in (0,l), \\ -u_0, & x \in (-l,0). \end{cases}$$

Решение выразить через интеграл ошибок.

5. Найдите решение задачи Коши для уравнения теплопроводности

$$u_t = \frac{1}{4} u_{xx}, \quad x \in (-\infty; +\infty),\ t > 0, \qquad u(x,0) = \begin{cases} 0, & x \notin (0,1), \\ 2, & x \in (0,1). \end{cases}$$

Решение выразить через интеграл ошибок.

6. Найдите распределение температуры внутри бесконечного стержня, если в начальный момент времени $u(x,0) = \begin{cases} 0, & x \notin (0,l), \\ u_0, & x \in (0,l). \end{cases}$ Решение выразить через интеграл ошибок.

7. Найдите решение задачи Коши для уравнения теплопроводности

$$u_t = 4u_{xx} + e^t, \ x \in (-\infty; +\infty),\ t > 0, \qquad u(x,0) = 2.$$

8. Найдите решение задачи Коши для уравнения теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx}, \ x \in (-\infty; +\infty),\ t > 0, \qquad u(x,0) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ e^{-\frac{x}{l}}, & x > 0. \end{cases}$$

Решение выразить через интеграл ошибок.

9. Найдите решение задачи Коши для уравнения теплопроводности

$$u_t = u_{xx}, \quad x \in (-\infty; +\infty),\ t > 0, \qquad u(x,0) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ e^{-x}, & x > 0. \end{cases}$$

Решение выразить через интеграл ошибок.

10. Найдите решение задачи Коши для уравнения теплопроводности

$$u_t = u_{xx} + 3t^2, \ x \in (-\infty; +\infty),\ t > 0, \qquad u(x,0) = \sin x.$$

11. Найдите решение задачи Коши для уравнения теплопроводности

$$u_t = u_{xx} + 4t^3, \ x \in (-\infty; +\infty),\ t > 0, \qquad u(x,0) = \cos x.$$

12. Найдите решение задачи Коши для уравнения теплопроводности

$$u_t = u_{xx} + 2t, \ x \in (-\infty; +\infty),\ t > 0, \qquad u(x,0) = \sin x.$$

13. Найдите решение задачи Коши для уравнения теплопроводности

$$u_t = u_{xx} + \sin t, \ \ x \in (-\infty; +\infty), \ t > 0, \qquad u(x,0) = \cos x.$$

14. Найдите решение задачи Коши для уравнения теплопроводности

$$u_t = u_{xx} + e^{-t}, \ \ x \in (-\infty; +\infty), \ t > 0, \qquad u(x,0) = \cos x.$$

15. Найдите решение задачи Коши для уравнения теплопроводности

$$u_t = u_{xx} + e^{-t}, \ \ x \in (-\infty; +\infty), \ t > 0.$$

16. Найдите решение задачи Коши для уравнения теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx} + \cos t, \quad x \in (-\infty; +\infty), \ t > 0, \quad u(x,0) = \sin x.$$

17. Найдите решение задачи Коши для уравнения теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx} + \cos t, \quad x \in (-\infty; +\infty), \ t > 0, \quad u(x,0) = \cos x.$$

18. Найдите решение задачи Коши для уравнения теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx} + \sin t, \quad x \in (-\infty; +\infty), \ t > 0, \qquad u(x,0) = \sin x.$$

19. Найдите решение задачи Коши для уравнения теплопроводности

$$u_t = u_{xx}, \ \ x \in (-\infty; +\infty), \ t > 0, \qquad u(x,0) = xe^{-x^2}.$$

20. Найдите решение задачи Коши для уравнения теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx} - hu, \ \ x \in (-\infty; +\infty), \ t > 0, \qquad u(x,0) = \varphi(x).$$

Указание. Выполнить замену $u(x,t) = e^{-ht} v(x,t)$.

Задание 7

Уравнение теплопроводности на полубесконечной прямой.

1. Найдите решение краевой задачи для уравнения теплопроводности

$u_t = a^2 u_{xx},\ \ x \in (0; +\infty),\ t > 0,\qquad u(x,0) = u_0 = const,\quad x \in (0,\ \infty),\ \ u_x(0,t) = 0.$

Решение записать через интеграл ошибок.

2. Найдите решение краевой задачи для уравнения теплопроводности

$u_t = a^2 u_{xx},\ \ x \in (0; +\infty),\ t > 0,\qquad u(x,0) = 0,\quad x \in (0,\ +\infty),\ \ u(0,t) = u_1.$

Решение записать через интеграл ошибок.

Указание. Выполнить замену $u(x,t) = u_1 + v(x,t)$.

3. Найдите решение краевой задачи для уравнения теплопроводности

$u_t = a^2 u_{xx},\ \ x \in (0; +\infty),\ t > 0,\qquad u(x,0) = u_0,\quad x \in (0,\ +\infty),\ \ u(0,t) = u_1.$

Решение записать через интеграл ошибок.

Указание. Выполнить замену $u(x,t) = u_1 + v(x,t)$.

4. Найдите решение краевой задачи для уравнения теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx},\ \ x \in (0; +\infty),\ t > 0,\qquad u_x(0,t) = 0,\qquad u(x,0) = \begin{cases} u_0, & 0 < x < 1, \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

Решение записать через интеграл ошибок.

5. Найдите решение краевой задачи для уравнения теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx},\ \ x \in (0; +\infty),\ t > 0,\qquad u(0,t) = 0,\qquad u(x,0) = \begin{cases} u_0, & 0 < x < 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

Решение записать через интеграл ошибок.

6. Найдите решение краевой задачи для уравнения теплопроводности

$$u_t = \frac{1}{4} u_{xx},\ \ x \in (0; +\infty),\ t > 0,\qquad u(0,t) = 0,\qquad u(x,0) = \begin{cases} 2, & 0 < x < 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

Решение записать через интеграл ошибок.

7. Найдите решение краевой задачи для уравнения теплопроводности

$u_t = u_{xx},\ x \in (0; +\infty),\ t > 0, \quad u(x,0) = 0, \quad x \in (0, +\infty),\ u(0,t) = u_1.$

Решение записать через интеграл ошибок.

Указание. Выполнить замену $u(x,t) = u_1 + v(x,t)$.

8. Найдите решение краевой задачи для уравнения теплопроводности

$u_t = a^2 u_{xx},\ x \in (0; +\infty),\ t > 0, \quad u(x,0) = 0, \quad x \in (0, +\infty),\ u_x(0,t) = -q = const.$

Указание. Выполнить замену $u(x,t) = -qx + v(x,t)$.

9. Найдите решение краевой задачи для уравнения теплопроводности

$u_t = a^2 u_{xx},\ x \in (0; +\infty),\ t > 0, \quad u_x(0,t) = 0, \quad x \in (0, +\infty), \quad u(x,0) = -x$

Указание. Продолжить начальное условие $\varphi(x) = -x$ чётно на $(-\infty, 0)$.

10. Найдите решение краевой задачи для уравнения теплопроводности

$u_t = \frac{1}{4} u_{xx},\ x \in (0; +\infty),\ t > 0, \quad u_x(0,t) = 0, \quad x \in (0, +\infty), \quad u(x,0) = -x$

Указание. Продолжить начальное условие $\varphi(x) = -x$ чётно на $(-\infty, 0)$.

11. Найдите решение краевой задачи для неоднородного уравнения теплопроводности

$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t),\ x \in (0; +\infty),\ t > 0, \quad u_x(0,t) = 0, \quad u(x,0) = 0.$

Указание. Продолжить функцию $f(x,t)$ чётно по x на $(-\infty, 0)$ и воспользоваться формулой Пуассона.

12. Найдите решение краевой задачи для неоднородного уравнения теплопроводности

$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t),\ x \in (0; +\infty),\ t > 0, \quad u(0,t) = 0, \quad u(x,0) = 0.$

Указание. Продолжить функцию $f(x,t)$ нечётно по x на $(-\infty, 0)$ и воспользоваться формулой Пуассона.

13. Найдите решение краевой задачи для уравнения теплопроводности

$u_t = a^2 u_{xx},\ x \in (0; +\infty),\ t > 0, \quad u(0,t) = 0, \quad u(x,0) = \varphi(x).$

Указание. Продолжить функцию $\varphi(x)$ нечётно на $(-\infty, 0)$.

14. Найдите решение краевой задачи для уравнения теплопроводности

$u_t = a^2 u_{xx},\ x \in (0;\ +\infty),\ t > 0, \qquad u_x(0,t) = 0, \quad u(x,0) = \varphi(x)$.

Указание. Продолжить функцию $\varphi(x)$ нечётно на $(-\infty, 0)$.

15. Найдите решение краевой задачи для уравнения теплопроводности

$u_t = a^2 u_{xx},\ x \in (0;\ +\infty),\ t > 0, \qquad u_x(x,0) = 1, \quad x \in (0,\ +\infty), \quad u(x,0) = 0$.

Указание. Выполнить замену $u(x,t) = x + v(x,t)$.

16. Найдите решение краевой задачи для уравнения теплопроводности

$u_t = a^2 u_{xx},\ x \in (0;\ +\infty),\ t > 0, \qquad u(0,t) = \mu(t), \quad u(x,0) = 0$.

17. Найдите решение краевой задачи для уравнения теплопроводности

$u_t = u_{xx},\ x \in (0;\ +\infty),\ t > 0, \qquad u_x(0,t) = \mu(t), \quad u(x,0) = 0$.

18. Найдите решение краевой задачи для уравнения теплопроводности

$u_t = a^2 u_{xx},\ x \in (0;\ +\infty),\ t > 0, \qquad u_x(0,t) = \mu(t), \quad u(x,0) = 0$.

19. Найдите решение краевой задачи для уравнения теплопроводности

$u_t = \frac{1}{4} u_{xx},\ x \in (0;\ +\infty),\ t > 0, \qquad u_x(0,t) = \cos \omega t, \quad u(x,0) = 0$.

20. Найдите решение краевой задачи для уравнения теплопроводности

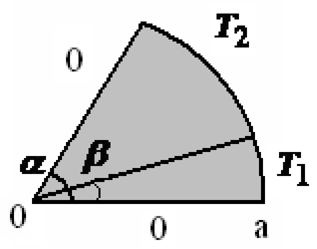
$u_t = \frac{1}{4} u_{xx},\ x \in (0;\ +\infty),\ t > 0, \qquad u(0,t) = \sin \omega t, \quad u(x,0) = 0$.

Задание 8. (Уравнение Лапласа в круговом секторе)

При решении задачи дать чертёж сектора в соответствии с углами α, β своего варианта и записать граничные условия.

Варианты 1-10

На границе тонкой пластинки в форме кругового сектора $\rho \le a,\ 0 \le \varphi \le \alpha$ задана температура $u = \begin{cases} f(\varphi), & \rho = a, \\ 0, & \varphi = 0,\ \varphi = \alpha, \end{cases}$



где $f(\varphi) = \begin{cases} T_1, & 0 \le \varphi \le \beta, \\ T_2, & \beta < \varphi \le \alpha. \end{cases}$

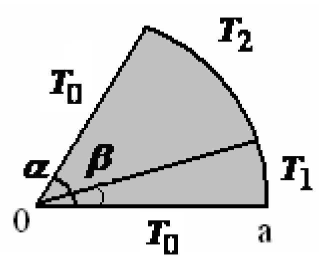
Найдите стационарное термическое поле в пластинке.

1. $\alpha = \dfrac{\pi}{4},\ \beta = \dfrac{\pi}{8}$.
2. $\alpha = \dfrac{\pi}{2},\ \beta = \dfrac{\pi}{4}$.
3. $\alpha = \dfrac{3\pi}{4},\ \beta = \dfrac{\pi}{2}$.
4. $\alpha = \pi,\ \beta = \dfrac{\pi}{2}$.
5. $\alpha = \dfrac{3\pi}{2},\ \beta = \dfrac{3\pi}{4}$.
6. $\alpha = \dfrac{7\pi}{4},\ \beta = \pi$.
7. $\alpha = \pi,\ \beta = \dfrac{\pi}{4}$.
8. $\alpha = \pi,\ \beta = \dfrac{3\pi}{4}$.
9. $\alpha = \dfrac{7\pi}{4},\ \beta = \dfrac{3\pi}{2}$.
10. $\alpha = \dfrac{7\pi}{4},\ \beta = \dfrac{7\pi}{8}$.

Варианты 11-20

На границе тонкой пластинки в форме кругового сектора $\rho \le a,\ 0 \le \varphi \le \alpha$ задана температура

$u = \begin{cases} f(\varphi), & \rho = a, \\ T_0, & \varphi = 0,\ \varphi = \alpha, \end{cases}$



где $f(\varphi) = \begin{cases} T_1, & 0 \le \varphi \le \beta, \\ T_2, & \beta < \varphi \le \alpha. \end{cases}$

Найдите стационарное термическое поле в пластинке.

Указание. Выполнить замену $u(\rho,\varphi) = T_0 + v(\rho,\varphi)$.

11. $\alpha=\frac{7\pi}{4}$, $\beta=\frac{7\pi}{8}$. 12. $\alpha=\frac{\pi}{4}$, $\beta=\frac{\pi}{8}$. 13. $\alpha=\frac{\pi}{2}$, $\beta=\frac{\pi}{4}$. 14. $\alpha=\frac{3\pi}{4}$, $\beta=\frac{\pi}{2}$. 15. $\alpha=\pi$, $\beta=\frac{\pi}{2}$. 16. $\alpha=\frac{3\pi}{2}$, $\beta=\frac{3\pi}{4}$. 17. $\alpha=\frac{7\pi}{4}$, $\beta=\frac{3\pi}{4}$. 18. $\alpha=\pi$, $\beta=\frac{\pi}{4}$. 19. $\alpha=\pi$, $\beta=\frac{3\pi}{4}$. 20. $\alpha=\frac{7\pi}{4}$, $\beta=\pi$.

Задание 9

Метод разделения переменных для уравнения Лапласа в прямоугольных областях.

1. Найдите стационарное распределение температуры $u(x, y)$ в бесконечном брусе квадратного сечения $\{0 \le x \le a,\ 0 \le y \le a\}$, три стороны которого поддерживаются при нулевой температуре, а на четвёртой $x = a$ постоянная температура T_0.
2. Найдите электростатическое поле внутри области $\{0 \le x \le \infty,\ 0 \le y \le b\}$, ограниченной проводящими пластинами $y = 0,\ \ y = b,\ \ x = 0$, если пластина $x = 0$ заряжена до потенциала v_0, а пластины $y = 0,\ y = b$ заземлены. Заряды внутри области отсутствуют.
3. Найдите электростатическое поле внутри области $\{0 \le x \le a,\ 0 \le y \le \infty\}$, ограниченной проводящими пластинами $y = 0,\ \ x = 0,\ \ x = a$, если пластина $y = 0$ заряжена до потенциала V_0, а пластины $x = 0,\ x = b$ заземлены. Заряды внутри области отсутствуют.
4. Найдите решение краевой задачи в полуполосе $\{0 \le x \le l,\ 0 \le y \le +\infty\}$ для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ при граничных условиях $u(0, y) = 0$, $u(l, y) = 0$, $u(x, 0) = A(1 - \dfrac{x}{l})$, $\lim\limits_{y \to \infty} u(x, y) = 0$.
5. Найдите распределение температуры внутри прямоугольной тонкой пластинки, если к стороне $x = a$ подводится постоянный тепловой поток q, а остальные стороны поддерживаются при постоянной температуре u_0.

   Указание. Выполнить замену $u(x, y) = u_0 + v(x, y)$.
6. Решить краевую задачу в прямоугольнике $\{-a \le x \le a,\ -b \le y \le b\}$ для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ при граничных условиях $u\big|_{x=-a} = 0,\ u\big|_{x=a} = b - |y|,\ \ u\big|_{y=0} = 0$, $u\big|_{y=b} = 0$.
7. Найдите распределение температуры внутри прямоугольной тонкой пластинки, если стороны $x = 0$ и $x = a$ поддерживаются при нулевой температуре, на стороне $y = 0$ задана постоянная температура u_0, а сторона $y = b$ теплоизолированная. Источники тепла внутри пластинки отсутствуют.
8. Найдите распределение температуры внутри прямоугольной тонкой пластинки, если стороны $y = 0$ и $y = b$ поддерживаются при нулевой температуре, на стороне $x = 0$ задана постоянная температура u_0, а сторона $x = a$ теплоизолированная. Источники тепла внутри пластинки отсутствуют.

9. Решить краевую задачу в прямоугольнике $\{0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b\}$ для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ при граничных условиях $u\big|_{x=0} = Ay(b-y),\ u\big|_{x=a} = 0,\ u\big|_{y=0} = 0$, $u\big|_{y=b} = 0$.

10. Найдите распределение температуры внутри прямоугольной тонкой пластинки, если на стороне $x = 0$ температура меняется по закону $u\big|_{x=0} = A(b-y)$, а остальные стороны поддерживаются при нулевой температуре. Источники тепла внутри пластинки отсутствуют.

11. Найдите распределение температуры внутри прямоугольной тонкой пластинки $\{0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b\}$, если на стороне $x = 0$ тепловой поток меняется по закону $u_x\big|_{x=0} = A(b-y)$, а остальные стороны поддерживаются при нулевой температуре. Источники тепла внутри пластинки отсутствуют.

12. Найдите решение краевой задачи в полуполосе $\{0 \le x \le a,\ 0 \le y \le +\infty\}$ для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ при граничных условиях $u_x(0, y) = 0$, $u_x(a, y) = 0$, $u(x,0) = A(1 - x/a)$, $\lim\limits_{y\to\infty} u(x, y) = 0$.

13. Найдите решение краевой задачи в полуполосе $\{0 \le y \le b,\ 0 \le x \le +\infty\}$ для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ при граничных условиях $u(x,0) = 0$, $u(x,b) = 0$, $u(0, y) = A(1 - y/b)$, $\lim\limits_{x\to\infty} u(x, y) = 0$.

14. Найдите решение краевой задачи в полуполосе $\{0 \le y \le b,\ 0 \le x \le +\infty\}$ для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ при граничных условиях $u_y(x,0) = 0$, $u_y(b, x) = 0$, $u(0, y) = A(1 - y/b)$, $\lim\limits_{x\to\infty} u(x, y) = 0$.

15. Решить краевую задачу в прямоугольнике $\{0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b\}$ для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ при граничных условиях $u\big|_{x=0} = u_0(1 - |1 - \frac{y}{2b}|),\ u\big|_{x=a} = 0,\ u\big|_{y=0} = 0$, $u\big|_{y=b} = 0$.

16. Решить краевую задачу в прямоугольнике $\{0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b\}$ для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ при граничных условиях $u\big|_{x=0} = 0,\ u\big|_{x=a} = 0,\ u\big|_{y=0} = u_0(1 - |x - \frac{a}{2}|)$, $u\big|_{y=b} = 0$.

17. Решить краевую задачу в прямоугольнике $\{-a \le x \le a,\ -b \le y \le b\}$ для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ при граничных условиях $u\big|_{x=-a} = 0,\ u\big|_{x=a} = 0,\ u\big|_{y=0} = 0$, $u\big|_{y=b} = a - |x|$.

18. Найдите распределение температуры в тонкой квадратной пластинке $\{0 \le x \le a,\ 0 \le y \le a\}$, если стороны $x = 0$ и $x = a$ поддерживаются при нулевой температуре, а на сторонах $y = 0$ и $y = a$ задана постоянная температура u_0.

19. Решить краевую задачу в прямоугольнике $\{0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b\}$ для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ при граничных условиях $u\big|_{x=0} = 0,\ u\big|_{x=a} = 0,\ u\big|_{y=0} = 0$, $u\big|_{y=b} = f(x)$.

20. Решить краевую задачу в прямоугольнике $\{0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b\}$ для уравнения Лапласа

$\Delta u = 0$ при граничных условиях $u\big|_{x=0} = 0,\ u\big|_{x=a} = f(y),\ u\big|_{y=0} = 0,\ u\big|_{y=b} = 0$.

Задание 10 (Метод подобия и размерности)

1. Из квантовой статистики известно, что число электронов в некотором пространстве зависит от объёма V этого пространства и его температуры T, импульса p и энергии E электронов, а также от постоянных Больцмана k и Планка h. Учитывая размерности величин: $[V] = \text{длина}^3$, $[T] = \text{град}$, $[p] = \text{масса} \times \text{длина/ время}$, $[k] = \text{энергия/ град}$, $[h] = \text{масса} \times \text{длина}^2 / \text{время}$ - покажите, что число электронов зависит от двух безразмерных параметров. Напишите какой-либо набор этих параметров.
2. Прохождение тока через электрическую цепь определяется величиной тока I, напряжением U источника питания, индуктивностью L, ёмкостью C и сопротивлением R цепи, а также периодом T колебания напряжения источника питания. Покажите, что из шести величин можно составить три безразмерных параметра, если принять размерности:

$$[I] = \text{ток},\ [U] = \text{ток} \times \text{сопротивление},\ [L] = \text{время} \times \text{сопротивление},$$

$$[C] = \text{время} \times \text{сопротивление},\ [R] = \text{сопротивление},\ [T]=\text{время}.$$

Напишите эти параметры.

3. Скорость c распространения электромагнитной волны с частотой ω вдоль линии передачи связана функциональной зависимостью с индуктивностью L и ёмкостью C линии передачи, а также постоянными μ и ε. Учитывая размерности этих величин: $[c] = \text{длина/ время}$, $[L] = \text{время} \times \text{сопротивление}$, $[C] = \text{время/ сопротивление}$, $[\mu] = \text{время} \times \text{сопротивление/ длина}$, $[\varepsilon] = \text{время/ (сопротивление} \times \text{длина)}$, покажите, что этот физический процесс определяется двумя безразмерными параметрами. Напишите эти параметры.

4. На пластинку толщиной L падает магнитная волна с частотой ω. Проникновение этой волны в пластинку зависит от теплопроводности λ, теплоёмкости c, электропроводности σ и магнитной проницаемости материала пластинки. Учитывая размерности: $[\omega] = \text{время}^{-1}$, $[L]=\text{длина}$, $[\lambda] = \text{энергия/ (длина} \times \text{время} \times \text{град)}$, $[c] = \text{энергия/ (длина}^3 \times \text{град)}$, $[\sigma] = \text{сопротивление}^{-1} \times \text{длина}^{-1}$, $[\mu] = \text{время} \times \text{сопротивление/ длина}$, покажите, что это явление зависит от двух безразмерных параметров.

Напишите эти параметры.

5. Движение нагретого тела в стационарной конвективной жидкости определяется пятью физическими величинами: l - размером тела, скоростью движения $[v] = \text{длина/ время}$, T - разностью температур (с размерностью градус), η - вязкостью жидкости и χ - температуропроводностью (с размерностью обеих последних величин: длина^2/время). Покажите, что такое движение можно описать двумя безразмерными параметрами: числом Рейнольдса $\mathrm{Re} = \dfrac{\rho v d}{\mu}$ и числом Прандля $P = \eta / \chi$.
6. Угол отклонения φ математического маятника определяется начальным углом отклонения φ_0 [радиан], массой груза m[масса], длиной нити l [длина], ускорением g [длина/время^2], периодом колебаний T [время]. Покажите, что такое движение можно описать двумя безразмерными параметрами. Выразите период колебаний T.
7. Предположим, что сила сопротивления F тела, помещённого в жидкость и колеблющегося в ней с периодом колебания T, определяется плотностью ρ жидкости, скоростью v движения тела, его диаметром d и вязкостью η жидкости.
   Учитывая размерности этих величин:

$$[F] = \text{масса} \times \text{длина/ время}^2,\ [T] = \text{время},\quad [\rho]\ = \text{масса/длина}^3,$$

$[v] = \text{длина/ время}$, $[\eta] = \text{масса/ (длина} \times \text{время)}$, покажите, что сила

сопротивления F в этом случае будет определяться формулой

$$F = \rho v^2 d^2 f\left(\mathrm{Re}, S\right), \text{где } \mathrm{Re} = \frac{\rho v d}{\mu} \text{ - число Рейнольдса, } S = \frac{vT}{d} \text{ - число Струхала.}$$

8. Температура $u(x,t)$ в стержне зависит от координаты x [длина], времени t, коэффициента температуропроводности a^2 с размерностью [длина^2 /время] и начальной температуры u_0. Покажите, что температура $u(x,t)$ зависит от одного безразмерного параметра. Напишите эту зависимость.
9. Движение твердого тела в несжимаемой жидкости определяется пятью физическими величинами: размером тела d [длина], скоростью движения v [длина/время], плотностью ρ [масса/длина^3], вязкостью жидкости μ [длина^2/время], сопротивлением W [масса$\times$длина/время^2] со стороны жидкости. Покажите, что такое движение можно описать двумя безразмерными параметрами. Выразите силу сопротивления W, как функцию числа Рейнольдса Re.
10. Установившееся течение жидкости через водослив определяется величинами: высотой h [длина] уровня жидкости над отверстием водослива, плотностью ρ [масса/длина^3]

жидкости, ускорением g [длина/время^2] силы тяжести, расходом Q [масса/время], шириной a отверстия водослива. Покажите, что это явление можно описать двумя безразмерными параметрами. Выразите расход Q.

11. Максимальная сила $P_{\max}$ $[\text{масса}\times\text{длина}/\text{время}^2]$ удара о жидкость при вертикальном падении тела зависит от скорости v[длина/время], массы m[масса], размера тела d[длина], плотности жидкости ρ [масса/длина^3]. Покажите, что зто явление зависит от двух безразмерных параметров. Выразите $P_{\max}$.
12. Состояние массы m [*кг*] идеального газа зависит от давления p [*Дж*/*м*^{3}], занимаемого объема V [*м*^{3}], абсолютной температуры T с размерностью [K^0], молярной массы M [*кг/моль*], газовой постоянной R $[\text{Дж}/(\text{K}^0\times\text{моль})]$. Покажите, что это состояние описывается одним безразмерным параметром. Получите уравнение Менделеева - Клайперона состояния идеального газа.
13. Период T [время] пульсации звезды зависит от среднего радиуса R [длина], средней массы M [масса], гравитационной постоянной G с размерностью $[\text{длина}^3/(\text{масса}\times\text{время}^2)]$, безразмерного коэффициента Пуассона $\eta = c_{\text{p}} / c_V$. Покажите, что это состояние описывается двумя безразмерными параметрами. Выразите период пульсации T звезды.
14. Количество теплоты Q, выделяемого проводником при прохождении тока, и мощность P тока зависит от силы тока I, сопротивления R и времени t. Покажите, что из этих величин можно составить два безразмерных параметра, если принять размерности: $[Q] = \text{ток}^2\times\text{сопротивление}\times\text{время}$, $[P] = \text{ток}^2\times\text{сопротивление}$, $[I] = \text{ток}$, $[R] = \text{сопротивление}$, $[t] = \text{время}$. Напишите эти параметры. Выразите количество теплоты Q (закон Джоуля - Ленца).
15. Масса m[*кг*] выделившегося на электроде вещества при электролизе зависит от молярной массы M [*кг/моль*], числа Авогадро N_A [*моль*$^{-1}$], силы тока I [*Кул/сек*], заряда q_0 [*Кул*] иона и времени Δt [*сек*]. Покажите, что это явление определяется двумя безразмерными параметрами. Выразите массу m (закон электролиза Фарадея).
16. В аэродинамике при околозвуковых скоростях предельная скорость v[длина/время] при вертикальном падении тела зависит от массы m[масса] тела, ускорения свободного падения g [длина/время^2], плотности воздуха ρ [масса/длина^3], площади S [длина^2] миделевого сечения (площадь проекции тела на плоскость, перпендикулярную направлению скорости) и некоторого безразмерного коэффициента, зависящего от формы тела. Покажите, что из этих величин можно составить два безразмерных параметра. Выразите предельную скорость v.

17. Установившаяся амплитуда A [градус] распространения температурных волн в почве зависит от амплитуды A_0 [градус] колебаний температуры на поверхности почвы, глубине x[длина] проникновения тепла в почву, частоты ω [время$^{-1}$] колебаний температуры, (например, суточные, сезонные, годовые колебания) и коэффициента температуропроводности почвы a^2 с размерностью [длина^2/время]. Покажите, что зто явление зависит от двух безразмерных параметров. Выразите установившуюся амплитуду A (закон Фурье).
18. Процесс диффузии газа в трубке, заполненной пористой средой, описывается концентрацией u [масса/длина^3], зависящей от начальной концентрации u_0, рассматриваемого сечения трубки x [длина], момента времени t [время], коэффициента диффузии D [длина^2/время] и
безразмерного коэффициента пористости среды c. Покажите, что процесс
диффузии зависит от двух безразмерных параметров. Выразите концентрацию u.
19. Количество теплоты Q [*Дж*], которое необходимо затратить на увеличение объёма тела на ΔV [длина^3] при нагревании зависит от плотности материала ρ [масса/длина^3], удельной теплоёмкости c [*Дж*/(*кг*·K^0)], относительного коэффициента β [1/K^0] объёмного расширения. Покажите, что этот процесс описывается одним безразмерным параметром. Выразите количество теплоты Q.
20. Дальность l [длина] полёта самолёта зависит от скорости v [длина/время], массы m [*кг*] и удельной теплоты q [*Дж/кг*] сгораемого топлива, мощности N [*Дж*/время] и безразмерного коэффициента η - КПД двигателя. Покажите, что этот процесс описывается одним безразмерным параметром. Выразите дальность полёта l.

Приложение

Некоторые неопределенные интегралы

1. $\int \sin ax \sin bx dx = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)}, \qquad |a| \neq |b|$

2. $\int \sin ax \cos bx dx = -\frac{\cos(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\cos(a+b)x}{2(a+b)}, \qquad |a| \neq |b|$

3. $\int \cos ax \cos bx dx = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} + \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)}, \qquad |a| \neq |b|$

4. $\int x \sin bx dx = -\frac{\sin bx}{b^2} - \frac{x}{b} \cos bx$

5. $\int x^2 \sin bx dx = \frac{2x}{b^2} \sin bx - \frac{b^2 x^2 - 2}{b^3} \cos bx$

6. $\int x^3 \sin bx dx = \frac{3b^2 x^2 - 6}{b^4} \sin bx - \frac{6x - b^2 x^3}{b^3} \cos bx$

7. $\int x \sin^2 bx dx = \frac{x^2}{4} - \frac{x}{4b} \sin 2bx - \frac{\cos 2bx}{8b^2}$

8. $\int x \cos bx dx = -\frac{\cos bx}{b^2} + \frac{x \sin bx}{b}$

9. $\int x^2 \cos bx dx = \frac{2x}{b^2} \cos bx + \frac{b^2 x^2 - 2}{b^3} \sin bx$

10. $\int x^2 \cos bx dx = \frac{2x}{b^2} \cos bx + \frac{b^2 x^2 - 2}{b^3} \sin bx$

11. $\int x^3 \cos bx dx = \frac{3b^2 x^2 - 6}{b^4} \cos bx + \frac{b^2 x^3 - 6x}{b^3} \sin bx$

12. $\int x \cos^2 bx dx = \frac{x^2}{4} + \frac{x}{4b} \sin 2bx + \frac{\cos 2bx}{8b^2}$

13. $\int e^{ax} \sin bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx)$

14. $\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \sin bx)$

Некоторые определенные интегралы

15. Интеграл ошибок $erf(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-\xi^2}d\xi$, $erf(+\infty)=1.$

16. $\int_0^{+\infty} e^{-\xi^2}d\xi=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

17. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha\xi^2}d\xi=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}},\quad \alpha>0.$

18. $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha\xi^2}\cos\beta\xi d\xi=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}},\quad \alpha>0$.

19. $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha\xi^2}\sin\beta\xi d\xi=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}}\int_0^{\frac{\beta}{2\alpha}} e^{\xi^2}d\xi,\quad \alpha>0.$