Тема 12. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПОДОБИЯ В ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1. Математические основы метода подобия

Метод подобия основан на анализе размерностей физических величин задачи. Любой реальный процесс описывается некоторым конечным набором физических величин, например, силой, плотностью, скоростью и т.д. Обозначим этот набор величин $x_1,...,x_n$. Эти величины выражаются через некоторые независимые фундаментальные физические величины, такие как длина, время, масса, заряд и т.д.

Пусть $z_1,...,z_m$ обозначают набор фундаментальных физических величин. Так как выбор численных значений фундаментальных величин произволен (определяется некоторыми соглашениями, эталонами), то существуют масштабные множители $\lambda=(\lambda_1,...,\lambda_m)$ - положительные действительные числа, с помощью которых осуществляется преобразование эталонных

$$(z_1,...,z_m)\to(\lambda_1 z_1,...,\lambda_m z_m)$$

и, следовательно, и измеряемых физических величин

$$\lambda x=(\lambda_1^{\alpha_{11}}\lambda_2^{\alpha_{21}}...\lambda_m^{\alpha_{m1}}x_1,...,\lambda_1^{\alpha_{1n}}\lambda_2^{\alpha_{2n}}...\lambda_m^{\alpha_{mn}}x_n)$$

исследуемого процесса, где показатели степени α_{ij}, $i=1,...,m$, $j=1,...,n$, определяются физической зависимостью величины x_j от фундаментальных единиц z_i.

Пример 12.1. Пусть некоторый физический процесс описывается такими независимыми величинами как скорость v движения тела и плотность ρ жидкости.

Размерность скорости v – отношение длины (λ_1) к времени (λ_2);

размерность плотности ρ – отношение массы (λ_3) к объёму (к кубу длины). Тогда

$$\lambda v=\lambda_1\lambda_2^{-1}v,\qquad \lambda\rho=\lambda_1^{-3}\lambda_3\rho.$$

Если некоторая величина остаётся неизменной при данных преобразованиях, то она называется ***безразмерной***.

Между физическими величинами в любом реальном процессе возникают некоторые функциональные соотношения вида

$$F(x_1, ..., x_n) = 0.$$

Например, для поверхностных волн в глубокой воде скорость v является функцией от длины волны l и гравитационной постоянной ускорения g.

Соотношение называется ***масштабно инвариантным***, если оно не меняется при изменении масштабов измерения основных величин.

Оказывается, существует возможность выразить всякое такое соотношение только через безразмерные комбинации физических величин.

Например, в рассмотренном примере, если $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ - коэффициенты преобразования длины и времени соответственно, то

$$\lambda(v, l, g) = (\lambda_1 \lambda_2^{-1} v,\ \ \lambda_1 l,\ \ \lambda_1 \lambda_2^{-2} g).$$

Единственная безразмерная величина здесь – это число Фруда $Fr = \frac{v^2}{lg}$ или его степень.

Таким образом, всякое масштабно инвариантное соотношение, определяющее

скорость волны как функцию от длины волны и гравитационного ускорения, должно иметь вид

$$v = c\sqrt{lg},$$

где постоянную c определяют из эксперимента.

Рассмотренный пример сравнительно лёгкий для того, чтобы простым подбором без привлечения специального математического аппарата установить ту безразмерную величину, которая определяет масштабно инвариантное соотношение задачи. В более сложных задачах при наличии большого числа физических величин, влияющих на результат, установлению такого соотношения помогает метод подобия, в основе которого лежит так называемая π - *теорема.* Эта теорема – основа теории размерностей – математического аппарата метода подобия.

Приведём её полную формулировку.

π **- теорема.** Пусть $z_1,...,z_m$ - фундаментальные физические величины, масштабы измерений которых меняются независимо:

$$z_i \to \lambda_i z_i .$$

Пусть $x_1,...,x_n$ - производные величины, изменяющиеся в соответствии с формулой

$$\lambda x = (\lambda_1^{\alpha_{11}} \lambda_2^{\alpha_{21}} ... \lambda_m^{\alpha_{m1}} x_1, ..., \lambda_1^{\alpha_{1n}} \lambda_2^{\alpha_{2n}} ... \lambda_m^{\alpha_{mn}} x_n) , \tag{12.1}$$

Пусть $A = (\alpha_{ij})$ - матрица размерностей размера $m \times n$, элементы которой показатели степеней. Пусть $r = \operatorname{rang} A$ - ранг матрицы A.

Тогда существует $n - r$ независимых безразмерных величин вида

$$\pi_k = (x_1)^{\beta_{1k}} (x_2)^{\beta_{2k}} ... (x_n)^{\beta_{nk}} , \quad k = 1, ..., n - r , \tag{12.2}$$

обладающих тем свойством, что всякая другая безразмерная величина может быть записана как функция от $\pi_1, ..., \pi_{n-r}$. Показатели степеней β_{ik} в (12.2) являются $n - r$ линейно независимыми решениями линейной системы алгебраических уравнений

$$A\bar{\beta} = \bar{0} , \quad \begin{cases} \alpha_{11}\beta_{1k} + \alpha_{12}\beta_{2k} + ... + \alpha_{1n}\beta_{nk} = 0, \\ \alpha_{21}\beta_{1k} + \alpha_{22}\beta_{2k} + ... + \alpha_{2n}\beta_{nk} = 0, \\ .... \\ \alpha_{m1}\beta_{1k} + \alpha_{m2}\beta_{2k} + ... + \alpha_{mn}\beta_{nk} = 0. \end{cases} \tag{12.3}$$

Если $F(x_1, ..., x_n) = 0$ - произвольное масштабно инвариантное соотношение на данные производные величины, то существует эквивалентное соотношение, которое может быть выражено только через указанные безразмерные величины:

$$\tilde{F} = \tilde{F}(\pi_1, ..., \pi_{n-r}) = 0 . \tag{12.4}$$

2. Практика использования метода подобия

Во многих задачах прикладного характера для своего решения требуется учитывать большое число физических величин. Метод подобия позволяет выделить безразмерные параметры, которые независимо влияют на исследуемый процесс. Такой подход позволяет упростить не только качественное исследование, но и численное моделирование задачи.

Рассмотрим несколько примеров, поясняющих методику определения безразмерных параметров.

Пример 12.2. Предположим, что сопротивление f тела, помещённого в жидкость, определяется плотностью ρ жидкости, скоростью v движения тела, его диаметром d и вязкостью η жидкости.

Размерности величин: f - длина$\times$масса/время^2, ρ - масса/длина^3, v - длина/время,

η -масса/(длина$\times$время).

Решение. Вводим независимые фундаментальные величины задачи: длина, время и масса.

Обозначим масштабные коэффициенты длины λ_1, времени λ_2 и массы λ_3.

Запишем изменение физических величин (12.1)

$$\lambda(\rho, v, d, \eta, f) = (\lambda_1^{-3}\lambda_3\rho, \lambda_1\lambda_2^{-1}v, \lambda_1 d, \lambda_1^{-1}\lambda_2^{-1}\lambda_3\eta, \lambda_1\lambda_2^{-2}\lambda_3 f)$$

Составляем матрицу $A = (\alpha_{ij})$

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Находим ранг этой матрицы при помощи элементарных преобразований

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{1-3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{rang } A = 3.$$

Таким образом, задача определяется 5 – 3 = 2 независимыми безразмерными параметрами. Чтобы составить их, выписываем систему уравнений (12.3), учитывая перестановку местами первого и третьего столбцов (запись $\xrightarrow{1-3}$).

$$A\bar{\beta} = 0, \qquad \begin{cases} \beta_3 + \beta_2 - 3\beta_1 - \beta_4 + \beta_5 = 0, \\ -\beta_2 - \beta_4 - 2\beta_5 = 0, \\ \beta_1 + \beta_4 + \beta_5 = 0 \end{cases}$$

и находим два её частных решения. Первому частному решению

$\overline{\beta}_1 = (1;\ 1;1;\ -1;\ 0;\ 0)$ соответствует безразмерный параметр

$$\pi_1 = \mathrm{Re} = \frac{\rho v d}{\eta}, \qquad (12.5)$$

а второму частному решению $\overline{\beta}_2 = (-1;\ -2;\ -2;\ 0;\ 1)$ соответствует безразмерный параметр

$$\pi_2 = K = \frac{f}{\rho v^2 d^2}. \qquad (12.6)$$

Безразмерный параметр Re в гидродинамике называется ***числом Рейнольдса***.

Масштабно инвариантное соотношение (12.4) между пятью физическими величинами рассматриваемой задачи имеет вид $F(\mathrm{Re}, K) = 0$.

Разрешая его относительно параметра K, получим

$$K = \frac{f}{\rho v^2 d^2} = \varphi\left(\mathrm{Re}\right), \quad f = \rho v^2 d^2 \varphi\left(\mathrm{Re}\right). \qquad (12.7)$$

Получить функцию $\varphi(\mathrm{Re})$ из теории подобия невозможно. Её находят либо теоретически из решения уравнений гидродинамики, либо из эксперимента.

Пример 12.3. Усложним задачу примера 2 и учтём влияние силы тяжести на движение тела. Для этого дополним пять физических величин примера 2 шестой величиной: ускорением силы тяжести g. Фундаментальные величины сохраняются прежними и поэтому

$$\lambda(\rho, v, d, \eta, f, g) = (\lambda_1^{-3}\lambda_3\rho,\ \lambda_1\lambda_2^{-1}v,\ \lambda_1 d,\ \lambda_1^{-1}\lambda_2^{-1}\lambda_3\eta,\ \lambda_1\lambda_2^{-2}\lambda_3 f, \lambda_1\lambda_2^{-2}g)$$

Решение. Матрица A размерностей приобретает вид

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad r = \mathrm{rang}\, A = 3.$$

Число независимых параметров становится равным 3.

Составляем систему уравнений

$$A\overline{\beta}=0,\quad \begin{cases} -3\beta_1 & +\beta_2 & +\beta_3 & -\beta_4 & +\beta_5 & +\beta_6 & = & 0, \\ & -\beta_2 & & -\beta_4 & -2\beta_5 & -2\beta_6 & = & 0, \\ \beta_1 & & & +\beta_4 & +\beta_5 & & = & 0 \end{cases}$$

и находим три её частных решения. Два из этих решений при $\beta_6=0$ приводят к построению параметров $\pi_1=\mathrm{Re}$, $\pi_2=\mathrm{K}$; третье решение $\overline{\beta}_3=(0;\ 2;\ -1;\ 0;\ 0;\ -1)$ позволяет написать еще один безразмерный параметр

$$\pi_3=\mathrm{Fr}=\frac{v^2}{gd},$$

который в гидродинамике называется числом Фруда.

Из масштабно инвариантного соотношения $F(\mathrm{Re},\mathrm{K},\mathrm{Fr})=0$ определяем силу сопротивления $f=\rho v^2 d^2\varphi\left(\mathrm{Re},\mathrm{Fr}\right)$.

3. Применение метода подобия к решению уравнения теплопроводности

Пусть необходимо решить уравнение теплопроводности

$$u_t=a^2u_{xx},\ x\in(-\infty,\infty),\ t>0 \tag{12.8}$$

с начальным условием

$$u(x,0)=\begin{cases} u_0, & x>0, \\ 0, & x<0. \end{cases} \tag{12.9}$$

Такая задача может быть решена преобразованием Фурье.

Решим её методом подобия. В задаче можно выделить пять физических величин: пространственную координату x (с размерностью длина), время t, коэффициент температуропроводности a^2 (с размерностью длина**^{2}**/время), функцию температуры u и начальную температуру u_0.

Имеем следующие фундаментальные величины:

длина λ_1, время λ_2 и температура λ_3.

$$\lambda(x, t, a^2, u, u_0) = (\lambda_1 x,\ \lambda_2 t,\ \lambda_1^2 \lambda_2^{-1} a^2,\ \lambda_3 u,\ \lambda_3 u_0),$$

Составляем матрицу размерностей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{rang} A = 3.$$

Находим частные решения системы уравнений

$$A\overline{\beta} = 0, \qquad \begin{cases} \beta_1 + 2\beta_3 = 0, \\ \beta_2 - \ \beta_3 = 0, \\ \beta_4 + \ \beta_5 = 0. \end{cases}$$

$$\overline{\beta}_1 = (-2;\ 1;\ 1;\ 0;\ 0), \qquad \overline{\beta}_2 = (0;\ 0;\ 0;\ 1;\ -1)$$

что дает две безразмерные величины:

переменная $\pi_1 = z^{-2} = \dfrac{a^2 t}{x^2}$ и функция $\pi_2 = \overline{u} = \dfrac{u}{u_0}$.

Таким образом, вместо двух независимых переменных x и t мы получили одну переменную $z = \dfrac{x}{a\sqrt{t}}$, и поэтому неизвестная функция $u(x,t)$ зависит только от одного аргумента $u(x,t) = u_0 \cdot \overline{u}(z)$.

Вычислим производные функции $u(x,t)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{d(u_0 \overline{u})}{dz}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{u_0}{a\sqrt{t}}\frac{d\overline{u}}{dz}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_0}{a^2 t}\frac{d^2\overline{u}}{dz^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{d(u_0 \overline{u})}{dz}\frac{\partial z}{\partial t} = -\frac{u_0 x}{2at\sqrt{t}}\frac{d\overline{u}}{dz} = -u_0 \frac{z}{2t}\frac{d\overline{u}}{dz}.$$

Подставим полученные соотношения в уравнение (12.8):

$$\frac{d^2\overline{u}}{dz^2} = -\frac{z}{2}\frac{d\overline{u}}{dz} \tag{12.10}$$

Дополнительные условия, соответствующие начальному условию, примут вид:

$$\overline{u}(-\infty) = 0, \qquad \overline{u}(\infty) = 1, \tag{12.11}$$

В результате задача с уравнением в частных производных свелась к решению обыкновенного дифференциального уравнения (12.10) с краевыми условиями (12.11). Интегрируя уравнение (12.10), получим

$$\bar{u}(z) = C_2 + C_1 \int_0^z \exp(-\xi^2 / 4) d\xi = C_2 + 2C_1 \mathrm{erf}\,(z/2)$$

Из дополнительных условий (12.11) получаем систему

$$\begin{cases} C_2 + C_1\sqrt{\pi} = 1, \\ C_2 - C_1\sqrt{\pi} = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 = 1/(2\sqrt{\pi}), \\ C_2 = 1/2. \end{cases}$$

Возвращаясь к размерным величинам, находим решение $u(x,t)$ в виде

$$u(x,t) = \frac{u_0}{2}\left[1 + \mathrm{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a^2 t}}\right)\right].$$

Полученное решение, как и следовало ожидать, совпадает с найденным ранее (7.21) с помощью преобразования Фурье.