Тема 11. ПОНЯТИЕ КОРРЕКТНО ПОСТАВЛЕННОЙ ЗАДАЧИ. ТЕОРЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ

При решении краевых задач надо убедиться в том, что дополнительные условия:

1. достаточны для выделения однозначного решения, что достигается доказательством *теоремы единственности*;
2. не переопределяют задачу, т.е. среди них нет несовместных условий; это достигается доказательством *теоремы существования*; доказательство существования решения обычно тесно связано с методом нахождения решения;
3. приводят к *устойчивым* решениям, т.е. к непрерывным зависимостям решения от дополнительных условий.

Если решение задачи удовлетворяет этим трём требованиям, то говорят, что математическая задача поставлена *корректно.*

Рассмотрим корректность постановок краевых задач для уравнений колебания и теплопроводности.

1. Теорема единственности решения волнового уравнения колебаний

Теорема. Существует только одна функция $u(x,t)$, определённая в области

$0 \le x \le l$, $t \ge 0$, удовлетворяющая уравнению

$$\rho(x)u_{tt} = [k(x)u_x]_x + f(x,t), \tag{11.1}$$

где $\rho(x) > 0,\quad k(x) > 0$, $x \in (0,l)$, $t \ge 0$,

начальным $u(x,0) = \varphi(x)$, $\quad u_t(x,0) = \psi(x)$, $\quad$ и граничным условиям $u(0,t) = \mu_1(t)$, $u(l,t) = \mu_2(t)$,

если выполнены условия:

1. Функция $u(x,t)$ и её производные до второго порядка непрерывны на отрезке $x \in (0,l)$ при $t \ge 0$;
2. Коэффициенты $\rho(x)$ и $k(x)$ непрерывны на отрезке $x \in (0,l)$.

© Г.А. Кузин, В.И. Бутырин, А.В. Гобыш, 2017

Доказательство. Допустим, что существует два решения рассматриваемой задачи $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$. Рассмотрим разность

$$v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)\ .$$

Функция $v(x,t)$, очевидно, удовлетворяет однородному уравнению

$$\rho(x)v_{tt}(x,t) = [k(x)v_x(x,t)]_x$$

и однородным дополнительным условиям

$$v(x,0)=0\,,\ v_t(x,0)=0\,,\quad v(0,t)=0\,,\ v(l,t)=0\,,$$

а также условию 1 теоремы.

Докажем, что функция $v(x,t)$ тождественно равна нулю. Рассмотрим функцию

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^l [k(x)(v_x)^2 + \rho(x)(v_t)^2]dx\,, \tag{11.2}$$

и покажем, что она не зависит от времени t.

Физический смысл функции $E(t)$**:** *это полная энергия струны в момент времени* t.

Вычислим производную

$$\frac{dE(t)}{dt} = \int_0^l [k(x)v_x v_{xt} + \rho(x)v_t v_{tt}]dx\,.$$

Дифференцирование под знаком интеграла оправдано, так как полученное при этом подынтегральное выражение является непрерывной функцией. Интегрируя по частям первое слагаемое правой части, получим

$$\int_0^l k v_x v_{xt} dx = \left[k(x)v_x v_t\right]\Big|_0^l - \int_0^l v_t (kv_x)_x dx = -\int_0^l v_t (kv_x)_x dx\,.$$

Слагаемое $\left[k(x)v_x v_t\right]\Big|_0^l$ обращается в нуль, поскольку из граничного условия $v(0,t)=0$ следует $v_t(0,t)=0$ и аналогично для $x=l$.

Тогда

© Г.А. Кузин, В.И. Бутырин, А.В. Гобыш, 2017

$$\frac{dE(t)}{dt}=\int_0^l[\rho v_t v_{tt}-v_t(kv_x)_x]dx=\int_0^l v_t[\rho v_{tt}-(kv_x)_x]dx=0,\quad E(t)=const.$$

Учитывая начальные условия, получим из (11.2):

$$E(t)=const=E(0)=\frac{1}{2}\int_0^l[k(x)(v_x)^2+\rho(x)(v_t)^2]|_{t=0}\,dx=0.$$

Из того, что $E(t)=0$, а также из условия положительности $k(x)$ и $\rho(x)$ следует, что

$$v_x(x,0)=0,\ v_t(x,0)=0,\quad v(x,t)=const=C.$$

Из начального условия при $t=0$ следует, что $v(x,0)=C=0$.

Поэтому, и $v(x,t)=C=0$.

Следовательно, если существуют две функции $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$, удовлетворяющие всем условиям теоремы, то $u_1(x,t)\equiv u_2(x,t)$, что и требовалось доказать.

2. Теорема единственности решения уравнения теплопроводности

Теорема. Существует только одна функция $u(x,t)$, определённая в области $x\in(0,l)$, $t>0$ и удовлетворяющая уравнению

$$u_t=[k(x)u_x]_x+f(x,t), \tag{11.3}$$

$$k(x)>0,\quad x\in(0,l),\ t>0,$$

начальному и граничным условиям

$$u(x,0)=\varphi(x),\ \ u(0,t)=\mu_1(t),\ u(l,t)=\mu_2(t), \tag{11.4}$$

если выполнены условия:

1. Функция $u(x,t)$ и производные, входящие в уравнение непрерывны на отрезке $x\in(0,l)$ при $t>0$;
2. Функция $k(x)$ непрерывна на отрезке $x\in(0,l)$.

© Г.А. Кузин, В.И. Бутырин, А.В. Гобыш, 2017

Доказательство. Допустим, что существует два решения рассматриваемой задачи $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$. Рассмотрим разность

$$v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t) .$$

Функция $v(x,t)$ удовлетворяет однородному уравнению

$$v_t(x,t) = [k(x)v_x(x,t)]_x , \tag{11.5}$$

и однородным дополнительным условиям

$$v(x,0) = 0 , \quad v(0,t) = 0 , \; v(l,t) = 0 ,$$

а также условию 1 теоремы.

Докажем, что функция $v(x,t)$ тождественно равна нулю.

Умножим уравнение (11.5) на $v(x,t)$ и проинтегрируем по $x \in [0,l]$. Получим следующее уравнение

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^l v^2 dx = \int_0^l v[k(x)v_x]_x dx .$$

Все операции здесь выполнимы в силу условий теоремы.

В правой части интегрируем по частям, принимая во внимание граничные условия

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^l v^2 dx = \left[k(x)vv_x\right]\Big|_0^l - \int_0^l k(x)(v_x)^2 dx = -\int_0^l k(x)(v_x)^2 dx \le 0 .$$

Получили, что неотрицательная функция $\int_0^l v^2 dx$, непрерывная при $t > 0$ и равная нулю при $t = 0$ (по начальному условию), имеет неположительную производную при $t > 0$.

Отсюда следует, что функция $\int_0^l v^2 dx \equiv 0$.

Но тогда и $v(x,t) \equiv 0$ при $t > 0$, т.е. $u_1(x,t) \equiv u_2(x,t)$, что и требовалось доказать.

© Г.А. Кузин, В.И. Бутырин, А.В. Гобыш, 2017

3.Устойчивость решений задачи Коши для уравнения колебаний бесконечной струны

Теорема. Каков бы ни был промежуток времени $[0, t_0]$, какова бы ни была степень точности ε, найдется такое $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$, что всякие два решения $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ волнового уравнения

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

в течение промежутка времени t_0 будут различаться меньше чем на ε:

$$\left|u_1(x,t) - u_2(x,t)\right| < \varepsilon \ (0 \le t \le t_0),$$

если только начальные условия

$$\begin{cases} u_1(x,0) = \varphi_1(x), \\ \dfrac{\partial u_1(x,0)}{\partial t} = \psi_1(x) \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} u_2(x,0) = \varphi_2(x), \\ \dfrac{\partial u_2(x,0)}{\partial t} = \psi_2(x) \end{cases}$$

отличаются друг от друга меньше чем на δ:

$$\left|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)\right| < \delta, \qquad \left|\psi_1(x) - \psi_2(x)\right| < \delta.$$

Доказательство. Функции $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ связаны со своими начальными условиями формулой Даламбера. Оценим разность

$$\left|u_1(x,t) - u_2(x,t)\right| \le \frac{\left|\varphi_1(x+at) - \varphi_2(x+at)\right|}{2} +$$

$$+ \frac{\left|\varphi_1(x-at) - \varphi_2(x-at)\right|}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\left|\psi_1(\xi) - \psi_2(\xi)\right| d\xi,$$

откуда получаем

$$\left|u_1(x,t) - u_2(x,t)\right| \le \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2a}\cdot\delta\cdot 2at \le \delta(1+t_0) < \varepsilon,$$

что и доказывает теорему, если положить $\delta = \dfrac{\varepsilon}{1+t_0}$.

© Г.А. Кузин, В.И. Бутырин, А.В. Гобыш, 2017