Тема 10. УРАВНЕНИЕ ЛАПЛАСА В ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ОБЛАСТЯХ

Пусть требуется найти решение уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в прямоугольнике $\begin{pmatrix} 0 \le x \le a, \\ 0 \le y \le b \end{pmatrix}$, удовлетворяющее краевым условиям

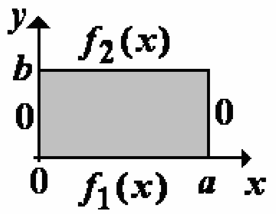

Рис.10.1

$$u(x,y)|_{x=0} = 0, \quad u(x,y)|_{x=a} = 0, \quad u(x,y)|_{y=0} = f_1(x), \quad u(x,y)|_{y=b} = f_2(x).$$

Предполагается, что в вершинах прямоугольника (рис. 10.1) выполнены ***условия согласования***:

$$f_1(0) = f_1(a) = 0, \; f_2(0) = f_2(a) = 0.$$

Решение ищем методом разделения переменных

$$u(x,y) = X(x)Y(y),$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda^2.$$

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \\ X(0) = 0, \quad X(a) = 0, \; X(x) = C_1 \cos\lambda x + C_2 \sin\lambda x. \\ Y''(y) - \lambda^2 Y(y) = 0 \end{cases}$$

Собственные числа и собственные функции имеют вид:

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{a}, \qquad X_n(x) = \sin\lambda_n x.$$

$$Y_n''(y) - \lambda_n^2 Y_n(y) = 0$$

Общее решение

$$Y_n(y) = A_n \mathrm{ch}\lambda_n y + B_n \mathrm{sh}\lambda_n y$$

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y) X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \mathrm{ch}\lambda_n y + B_n \mathrm{sh}\lambda_n y) \sin\lambda_n x$$

Из краевых условий получаем систему для определения A_n, B_n:

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\lambda_n x = f_1(x), \\ \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \mathrm{ch}\lambda_n b + B_n \mathrm{sh}\lambda_n b)\sin\lambda_n x = f_2(x) \end{cases}$$

Разложим функции $f_1(x)$, $f_2(x)$ в ряд Фурье:

$$f_i(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(i)} \sin\lambda_n x\ ,\ i = 1,\ 2$$

Коэффициенты разложения $f_n^{(i)}$ определяются по формулам Фурье:

$$f_n^{(i)} = \frac{2}{a}\int_0^a f_i(x)\sin\frac{n\pi}{a}x dx, \quad i = 1,\ 2.$$

Система для определения A_n, B_n запишется в виде:

$$\begin{cases} A_n = f_n^{(1)}, \\ A_n \mathrm{ch}\lambda_n b + B_n \mathrm{sh}\lambda_n b = f_n^{(2)}, \end{cases} \quad \begin{cases} A_n = f_n^{(1)}, \\ B_n = \dfrac{f_n^{(2)} - f_n^{(1)}\mathrm{sh}\lambda_n b}{\mathrm{sh}\lambda_n b} \end{cases}$$

Подставляя A_n, B_n в решение $u(x,y)$, после некоторых преобразований окончательно запишем решение:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n^{(1)}\mathrm{sh}\lambda_n(b-y) + f_n^{(2)}\mathrm{sh}\lambda_n y}{\mathrm{sh}\lambda_n b}\sin\lambda_n x\ , \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{a}, \quad (10.\ 1)$$

$$f_n^{(i)} = \frac{2}{a}\int_0^a f_i(x)\sin\frac{n\pi}{a}x dx, \quad i = 1,\ 2.$$

Если условия на границах прямоугольника не нулевые, то можно воспользоваться методом редукции. Схематически это изображено на рисунке (10.2):

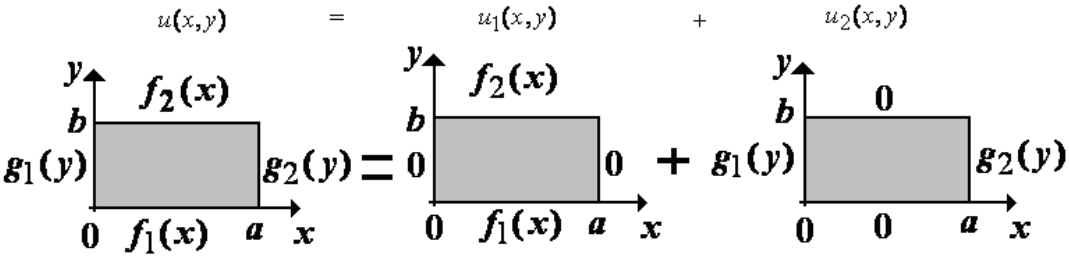

Рис.10.2

Замечание 1. При нахождении решения предполагалось, что выполнены ***условия согласования:***

$$\begin{cases} f_1(0) = g_1(0) = 0, \\ f_2(0) = g_1(b) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} f_1(a) = g_2(0) = 0, \\ f_2(a) = g_2(b) = 0. \end{cases}$$

Эти условия означают непрерывность функции $u(x, y)$ в вершинах прямоугольника и приводят к однородным краевым условиям.

В общем случае выполним замену

$$u(x, y) = u_0(x, y) + v(x, y),$$

$$u_0(x, y) = A + Bx + Cy + Dxy$$

$$\Delta u_0 = 0.$$

Коэффициенты A, B, C, D выбираем таким образом, чтобы в вершинах прямоугольника функция $v(x, y)$ обращалась в нуль.

$$A = f_1(0), \quad B = \frac{f_1(a) - f_1(0)}{a}, \; C = \frac{g_1(b) - g_1(0)}{b}, \; D = \frac{[f_2(a) - f_2(0)] - [f_1(a) - f_1(0)]}{ab}.$$

Для функции $v(x, y)$ получаем задачу

$$\Delta v = 0,$$

$$v(x, y)|_{y=0} = \overline{f}_1(x), \quad v(x, y)|_{y=b} = \overline{f}_2(x), \; v(x, y)|_{x=0} = \overline{g}_1(y), \quad v(x, y)|_{x=a} = \overline{g}_2(y),$$

где обозначено $\quad \overline{f}_1(x) = f_1(x) - u_0(x, 0), \quad \overline{f}_2(x) = f_2(x) - u_0(x, b),$

$$\overline{g}_1(y) = g_1(y) - u_0(0, y), \quad \overline{g}_2(y) = g_2(y) - u_0(a, y),$$

причем функции $\overline{f}_1(x), \; \overline{f}_2(x), \; \overline{g}_1(y), \; \overline{g}_2(y)$ обращаются в нуль в вершинах прямоугольника. Задача сведена к ранее рассмотренной задаче.

Замечание 2. Если задача рассматривается в полуполосе $\left\{\begin{matrix} 0 \le x < \infty, \\ 0 \le y \le b \end{matrix}\right\}$, то краевое условие при $x = a$ заменяется на условие ограниченности решения при $x \to \infty$ (рис. 10.3).

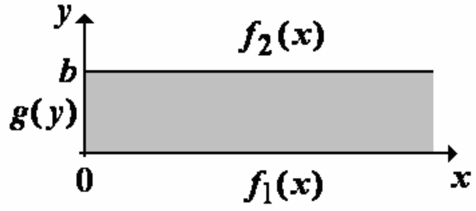

Рис.10.3

Пример 10.1. Найти электростатическое поле внутри области $\{0 \le x \le \infty,\ 0 \le y \le b\}$, ограниченной проводящими пластинами $y = 0,\quad y = b,\ x = 0$, если пластина $x = 0$ заряжена до потенциала v_0, а пластины $y = 0,\ y = b$ заземлены. Заряды внутри области отсутствуют.

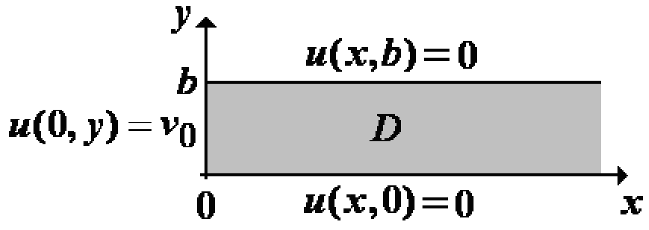

Рис.10.4

Математическая постановка: Решить уравнение Лапласа $\Delta u = 0$ в области D при граничных условиях (рис.10.4):

$$u(x,y)\big|_{x=0} = v_0,\qquad \lim_{x\to\infty} u(x,y) = 0,\qquad u(x,y)\big|_{y=0} = 0,\qquad u(x,y)\big|_{y=b} = 0.$$

Решение. Применим метод разделения переменных $u(x,y) = X(x)Y(y)$.

После разделения переменных получаем систему

$$\begin{cases} Y''(y) + \lambda^2 Y(y) = 0, \\ Y(0) = 0,\quad Y(b) = 0, \\ X''(x) - \lambda^2 X(x) = 0 \end{cases}$$

Собственные числа и собственные функции краевой задачи равны:

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{b},\qquad Y_n(y) = \sin\lambda_n y,\qquad X_n(x) = A_n e^{-\lambda_n x} + B_n e^{\lambda_n x}.$$

Из ограниченности решения при $x \to \infty$ следует, что $B_n = 0$.

Составляем ряд $$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\lambda_n x}\sin\lambda_n y.$$

Из краевого условия при $x = 0$ получаем уравнение для определения A_n:

$$v_0 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\lambda_n y,\quad A_n = \frac{2}{b}\int_0^b v_0 \sin\lambda_n y\,dy = \frac{2v_0}{b}\cdot\frac{1-(-1)^n}{\lambda_n}.$$

$$u(x,y)=\frac{2v_0}{b}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{\lambda_n}e^{-\lambda_n x}\sin\lambda_n y=\frac{4v_0}{b}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin\lambda_{2k+1}y}{\lambda_{2k+1}}e^{-\lambda_{2k+1}x},$$

поскольку при четном $n=2k$ коэффициент $A_{2k}=0$.

$$u(x,y)=\frac{4v_0}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{(2k+1)\pi}{b}y}{2k+1}e^{-\frac{(2k+1)\pi}{b}x}.$$