Тема 9. УРАВНЕНИЕ ЛАПЛАСА

1. **Задачи, приводящие к уравнению Лапласа**

Уравнение Лапласа $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ (сокращенная запись $\Delta u=0$) принадлежит к эллиптическому типу. Уравнению Лапласа удовлетворяют стационарные (установившиеся) режимы, не меняющиеся во времени.

Рассмотрим примеры.

1. Уравнение $u_t=a^2\Delta u$ описывает распределение температур плоской пластинки. Если режим стационарен, то $u=u(x,y)$ не зависит от времени и значит $\Delta u=0$.
2. Уравнение $u_{tt}=a^2\Delta u$ описывает колебания плоской мембраны. Если режим стационарен, то $u=u(x,y)$ не зависит от времени и значит $\Delta u=0$.
3. Потенциал $\varphi(x,y)$ плоского электрического поля удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta\varphi=0$.
4. Пусть $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ аналитическая функция комплексного переменного z в области D. Из условий Коши-Римана

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

следует, что действительная часть $u(x,y)$ и мнимая часть $v(x,y)$ удовлетворяют уравнению Лапласа $\Delta u=0$, $\Delta v=0$.

Определение. Функция u называется *гармонической* в области D, если она непрерывна в этой области вместе со своими производными до второго порядка и удовлетворяет уравнению Лапласа.

Действительная $u(x,y)$ и мнимая $v(x,y)$ части аналитической функции $f(z)$ являются ***гармоническими*** функциями.

2. Постановка краевых задач

Найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую внутри (вне) области D с границей S уравнению Лапласа $\Delta u = 0$ и граничному условию на S.

Граничные условия могут быть следующих видов:

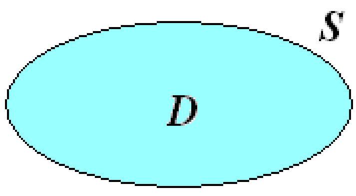
1. $u\big|_S = f_1$ -первая краевая задача (задача Дирихле);
2. $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_S = f_2$ - вторая краевая задача (задача Неймана);
3. $\left.\left(\dfrac{\partial u}{\partial n} + hu\right)\right|_S = f_3$ -третья краевая задача,

где $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ - производная по направлению внешней нормали n к S.

Если задача рассматривается внутри D, то она называется внутренней; если вне D, то внешней.

Задача Дирихле

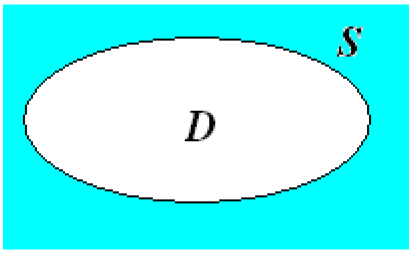
внутренняя



$\Delta u = 0$ внутри D.

$u\big|_S = f_1$

внешняя

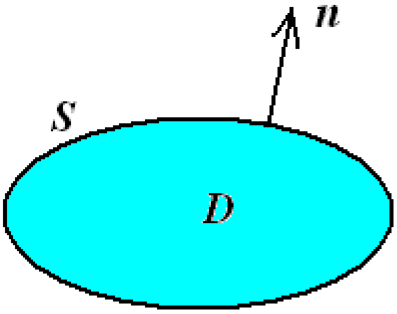


$\Delta u = 0$ вне D.

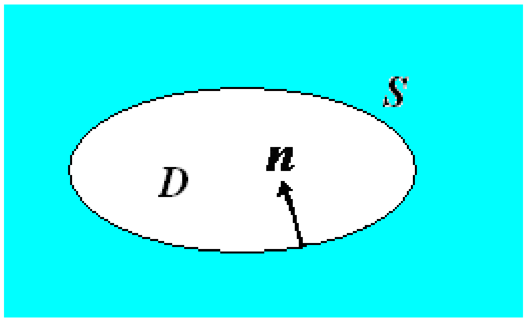
$u\big|_S = f_1$.

Задача Неймана

внутренняя



внешняя



внутренняя	внешняя
$\Delta u = 0$ внутри D.	$\Delta u = 0$ вне D.
$\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right\|_S = f_2$.	$\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right\|_S = f_2$.

Замечание. Задача Неймана разрешима, если выполнено условие

$$\oint_S f_2 ds = 0,$$

означающее, например, что суммарный поток тепла через границу S области D равен нулю.

3. Первая краевая задача Дирихле для круга

Постановка задачи: *найти функцию* u*, удовлетворяющую уравнению Лапласа внутри (вне) круга с границей* $\rho = a$*, где* u *- однозначная непрерывная функция в области* $\rho \in [0, a]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$*; непрерывная при* $\rho \geq a$ *и ограниченная при* $\rho \to \infty$.

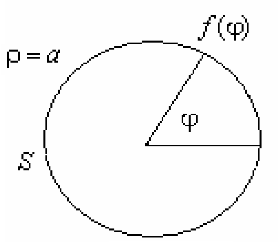


Рис. 9.1

На окружности (рис. 9.1) задано граничное условие

$$u(\rho, \varphi)\big|_{\rho=a} = f(\varphi), \ \varphi \in [0, 2\pi], \tag{9.1}$$

где (ρ, φ) - полярные координаты точки,

$f(\varphi)$ - непрерывная функция на окружности $\rho = a$.

Уравнение Лапласа для искомой функции $u(\rho, \varphi)$ в полярных координатах имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}=0 \tag{9.2}$$

Из требования однозначности функции u следует условие её периодичности:

$$u(\rho,\varphi+2\pi)=u(\rho,\varphi), \tag{9.3}$$

Будем решать задачу методом разделения переменных

$$u(\rho,\varphi)=R(\rho)\Phi(\varphi)\not\equiv 0.$$

Подставляем в уравнение (9.2) и разделяем переменные

$$\frac{\rho^2 R''(\rho)+\rho R'(\rho)}{R(\rho)}=-\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}=\lambda\ . \tag{9.4}$$

Получим систему для определения функций $R(\rho)$, $\Phi(\varphi)$:

$$\begin{cases}\Phi''+\lambda\Phi=0,\\ \rho^2 R''+\rho R'-\lambda R=0\end{cases} \tag{9.5}$$

Общее решение первого уравнения системы (9.5) имеет вид

$$\Phi(\varphi)=A\cos\sqrt{\lambda}\varphi+B\sin\sqrt{\lambda}\varphi.$$

Из условия периодичности $u(\rho,\varphi+2\pi)=u(\rho,\varphi)$ следует

$$A\cos\sqrt{\lambda}\varphi+B\sin\sqrt{\lambda}\varphi=A\cos\sqrt{\lambda}(\varphi+2\pi)+B\sin\sqrt{\lambda}(\varphi+2\pi),$$

$$2\sin\sqrt{\lambda}\pi[A\sin\sqrt{\lambda}(\varphi+2\pi)-B\sin\sqrt{\lambda}(\varphi+2\pi)]=0.$$

$$\sin\sqrt{\lambda}\pi=0\ \Rightarrow\ \lambda_n=n^2,\ n=0,1,2,\ldots.$$

Функцию $R(\rho)$ ищем в виде $R(\rho)=\rho^{\mu}$.

Подставляя во второе уравнение системы (9.5), определяем показатель μ

$$\rho^{\mu}\left[\mu(\mu-1)+\mu-n^2\right]=0,\quad \mu^2=n^2,\quad \mu=\pm n$$

Запишем общее решение

$$R_n(\rho)=C_n\rho^n+D_n\rho^{-n}.$$

Частное решение $u_n(\rho,\varphi)$ имеет вид:

$$u_n(\rho,\varphi) = R_n(\rho)\Phi_n(\varphi)$$

Общее решение запишется в виде ряда

$$u(\rho,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}(C_n\rho^n + D_n\rho^{-n})(A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi). \qquad (9.6)$$

4. Математическая постановка задачи Дирихле внутри круга

Найти функцию $u(\rho,\varphi)$ *- однозначную и непрерывную в области* $\rho\in[0,a]$, $\varphi\in[0,2\pi]$, *удовлетворяющую уравнению Лапласа и граничному условию*

$$u(\rho,\varphi)\big|_{\rho=a} = f(\varphi).$$

Из (9.6) и условия конечности функции $u(\rho,\varphi)$ в точке $\rho=0$ следует, что $D_n=0$,

следовательно

$$u(\rho,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\rho^n(A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\rho^n(A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi) \qquad (9.7)$$

Из граничного условия $u(a,\varphi)=f(\varphi)$ следует, что

$$f(\varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}a^n(A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi),$$

Разложим $f(\varphi)$ в ряд Фурье:

$$f(\varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\cos n\varphi + \beta_n\sin n\varphi,$$

где коэффициенты определяются формулами Фурье:

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\varphi)d\varphi, \quad \alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\varphi)\cos n\varphi d\varphi, \quad \beta_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\varphi)\sin n\varphi d\varphi \qquad (9.8)$$

Сравнивая разложения, находим коэффициенты:

$$A_0 = \alpha_0, \qquad A_n = \frac{\alpha_n}{a^n}, \qquad B_n = \frac{\beta_n}{a^n}.$$

Подставляя в (9.7), получим решение внутренней задачи Дирихле в виде ряда

$$u(\rho,\varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^n (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi), \quad \rho \le a \tag{9.9}$$

5. Математическая постановка задачи Дирихле вне круга

Найти функцию $u(\rho,\varphi)$ - *однозначную и непрерывную в области* $\rho \ge a$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, *ограниченную при* $\rho \to \infty$, *удовлетворяющую уравнению Лапласа и граничному условию* (9.1).

Из (9.6) и условия ограниченности при $\rho \to \infty$ получаем $C_n = 0$. В результате получим решение внешней задачи Дирихле в виде ряда

$$u(\rho,\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{\rho}\right)^n (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi), \quad \rho \ge a \tag{9.10}$$

где коэффициенты определяются формулами (9.8).

6. Интеграл Пуассона

Рассмотрим внутреннюю задачу Дирихле для круга.

Подставляя выражения (9.8) для коэффициентов Фурье в решение (9.9) и интегрируя ряд почленно, получим:

$$u(\rho,\varphi) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\left\{\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^n \left(\cos n\theta \cos n\varphi + \sin n\theta \sin n\varphi\right)\right\}d\theta =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\left\{\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^n \cos n(\varphi-\theta)\right\}d\theta.$$

Преобразуем выражение в скобках, обозначив $t = \frac{\rho}{a} < 1$:

$$\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} t^n \cos n(\varphi-\theta) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} t^n \left[e^{in(\varphi-\theta)}+e^{-in(\varphi-\theta)}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(te^{i(\varphi-\theta)}\right)^n+\left(te^{-i(\varphi-\theta)}\right)^n\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[1+\frac{te^{i(\varphi-\theta)}}{1-te^{i(\varphi-\theta)}}+\frac{te^{-i(\varphi-\theta)}}{1-te^{-i(\varphi-\theta)}}\right] = \frac{1}{2}\frac{1-t^2}{1-2t\cos(\varphi-\theta)+t^2}.$$

Подставим полученное выражение в интеграл:

$$u(\rho,\varphi) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\frac{a^2-\rho^2}{\rho^2-2a\rho\cos(\varphi-\theta)+a^2}d\theta, \quad \rho < a \tag{9.11}$$

Формула (9.11), дающая решение первой краевой задачи внутри круга, называется ***формулой Пуассона***.

Аналогично, получаем формулу, выражающую решение первой краевой задачи вне круга:

$$u(\rho,\varphi) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\frac{\rho^2-a^2}{\rho^2-2a\rho\cos(\varphi-\theta)+a^2}d\theta, \quad \rho > a \tag{9.12}$$