Тема 8. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ТЕПЛА НА ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ПРЯМОЙ

1. Виды краевых условий

Рассмотрим задачу нахождения решения уравнения теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx}, \ x \in (0, \infty), \ t > 0 \tag{8.1}$$

на полубесконечной прямой $x \in (0, \infty)$ для значений $t > 0$, удовлетворяющего начальному условию

$$u(x, 0) = \varphi(x), \ x \in (0, \infty) \tag{8.2}$$

и граничному условию, которое, в зависимости от заданного характера граничного режима, берётся в одном из следующих видов:

1) $u(0, t) = \mu(t)$ - на торце $x = 0$ задан тепловой режим, описываемый функцией $\mu(t)$.

2) $u_x(0, t) = q(t)$ - на конце $x = 0$ задана величина теплового потока $q(t)$, протекающего через торцевое сечение стержня.

3) $u_x(0, t) = h[u(0, t) - \theta(t)]$ - на конце $x = 0$ задан теплообмен с внешней средой, изменяющийся по закону Ньютона.

2. Первая краевая задача для уравнения теплопроводности

Рассмотрим первую краевую задачу, заключающуюся в отыскании решения уравнения теплопроводности при граничном условии

$$u(0, t) = \mu(t), \ t \geq 0. \tag{8.3}$$

Будем предполагать, что функция $u(x, t)$ всюду ограничена.

Решение $u(x, t)$ поставленной задачи представим в виде суммы (метод редукции):

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t),$$

- $u_1(x,t)$ удовлетворяет неоднородному начальному и однородному граничному условиям:

$$u_1(x,0)=\varphi(x)\,,\quad u_1(0,t)=0\,, \tag{8.4}$$

- $u_2(x,t)$ - удовлетворяет однородному начальному и неоднородному граничному условиям:

$$u_2(x,0)=0\,,\qquad u_2(0,t)=\mu(t)\,. \tag{8.5}$$

Докажем две леммы относительно функции $u(x,t)$, определяемой интегралом

$$u(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{a^2t}}\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right)\psi(\xi)d\xi\,. \tag{8.6}$$

Лемма 1. Если функция $\psi(\xi)$ является нечётной функцией, то функция (8.6) обращается в нуль при $x=0$.

Доказательство следует из того, что подынтегральная функция в (8.6) при $x=0$ является нечётной функцией, а пределы интегрирования - симметричны относительно $\xi=0$.

Лемма 2. Если функция $\psi(\xi)$ является чётной функцией при $x=0$, то производная функции $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)$ обращается в нуль при $x=0$ для всех $t>0$.

Доказательство следует из того, что

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x-\xi}{2(a^2t)^{3/2}}\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right)\psi(\xi)d\xi\,|_{x=0}=0\,,$$

поскольку, если $\psi(\xi)$ - чётная, то при $x=0$ подынтегральная функция нечётная.

Найдём теперь функцию $u_1(x,t)$, удовлетворяющую условиям (8.4).

Введём вспомогательную функцию $U(x,t)$, определённую на бесконечной прямой $x\in(-\infty,\infty)$, удовлетворяющей уравнению теплопроводности и условиям

$$U(0,t)=0\,,\ U(x,0)=\varphi(x)\,,\ x>0\,.$$

Определим функцию $\Phi(x)$, совпадающей с $\varphi(x)$ при $x > 0$ и являющейся нечётным продолжением $\varphi(x)$ для $x < 0$:

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x > 0, \\ -\varphi(-x), & x < 0, \end{cases}$$

$$U(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right) \Phi(\xi) d\xi .$$

Из определения функции $\Phi(x)$ получим:

$$U(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right) \Phi(\xi) d\xi + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right) \Phi(\xi) d\xi =$$

[в первом интеграле делаем замену $\xi \to -\xi$ и используем равенство $\Phi(\xi) = -\varphi(-\xi) = -\varphi(\xi)$] =

$$= -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} \exp\left(-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}\right) \varphi(\xi) d\xi + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right) \varphi(\xi) d\xi$$

При $x \ge 0$ функция $U(x,t) = u(x,t)$ и поэтому

$$u_1(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} \left\{ \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right) - \exp\left(-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}\right) \right\} \varphi(\xi) d\xi \qquad (8.7)$$

Аналогично, пользуясь леммой 2, можно построить решение уравнения теплопроводности с однородным граничным условием

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}(0,t) = 0, \quad t > 0$$

и начальным условием

$$u_1(x,0) = \varphi(x), \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

$$u_1(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} \left\{ \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right) + \exp\left(-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}\right) \right\} \varphi(\xi) d\xi \qquad (8.8)$$

Пример 8.1. Решить задачу об остывании равномерно нагретого стержня, на границе которого поддерживается нулевая температура.

Математическая постановка задачи: Найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую уравнению теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx},\ x \in (0,\infty),\ t > \tau$$

и дополнительным условиям

$$u(x,\tau) = T, \qquad u(0,t) = 0.$$

Начальное условие задано при $t = \tau$.

Решение. Формула (8.7) приводит к следующему результату

$$u(x,t) = \frac{T}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2(t-\tau)}} \left\{ \exp\left(\frac{-(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)} \right) - \exp\left(\frac{-(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)} \right) \right\} d\xi \tag{8.9}$$

В первом интеграле делаем замену переменной $y = \dfrac{\xi - x}{2\sqrt{a^2(t-\tau)}}$,

а во втором – $z = \dfrac{\xi + x}{2\sqrt{a^2(t-\tau)}}$.

Решение (8.9) можно записать в более простом виде

$$u(x,t) = T \cdot \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a^2(t-\tau)}} \right). \tag{8.10}$$

Полученное решение (8.10) помогает решить вторую часть поставленной задачи: найти решение $u_2(x,t)$, удовлетворяющее дополнительным условиям (8.5).

Для этого интервал (τ, t) разбивается на n частей, а функция $\mu(t)$ заменяется кусочно-ступенчатой так, чтобы на каждом интервале (t_i, t_{i+1}) функция $\mu(t)$ равнялась бы $\mu(t) = \mu_i = \text{const}$.

Для интервалов (t_i, t_{i+1}) строится решение вида (8.10), затем все решения суммируются, и осуществляется стандартный предельный переход от суммы к интегралу.

Приведём окончательный результат:

$$u_2(x,t) = \frac{a^2}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{x}{[a^2(t-\tau)]^{3/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right) \mu(\tau) d\tau . \quad (8.11)$$

Функция

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t) ,$$

даёт решение первой краевой задачи (8.1) – (8.3), где

$u_1(x,t)$ определяется формулой (8.8), $u_2(x,t)$ – формулой (8.11).

Пример 8.2. Найти решение краевой задачи для уравнения теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad x \in (0; +\infty), \quad t > 0$$

$$u(x,0) = u_0, \quad x \in (0, +\infty), \; u(0,t) = u_1.$$

Решение. Выполним замену $u(x,t) = u_1 + v(x,t)$.

Краевое условие для $v(x,t)$ станет однородным. Получаем задачу:

$$v_t = a^2 v_{xx}, \; x \in (0; +\infty), \; t > 0$$

$$v(x,0) = u_0 - u_1, \quad x \in (0, +\infty), \quad v(0,t) = 0 , \; t > 0 .$$

По формуле (8.10)

$$v(x,t) = (u_0 - u_1) \cdot \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right).$$

Следовательно $u(x,t) = u_1 + (u_0 - u_1) \cdot \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)$.