## Тема 7. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ТЕПЛА НА БЕСКОНЕЧНОЙ ПРЯМОЙ

### 1. Постановка краевых задач для уравнения теплопроводности

Уравнение теплопроводности в общем случае имеет вид:

$$c\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+F(x,t)\,. \tag{7.1}$$

Если коэффициенты $k$, $c$, $\rho$ постоянные, то уравнение записывают в виде

$$u_t=a^2u_{xx}+f(x,t)\,, \tag{7.2}$$

где: $f(x,t)=\dfrac{F(x,t)}{c\rho}$,

$a^2=\dfrac{k}{c\rho}$ - называется ***коэффициентом температуропроводности***.

Для выделения единственного решения уравнений параболического типа необходимо к уравнению добавить начальные и граничные условия.

Рассмотрим постановку краевой задачи на примере уравнения теплопроводности однородного стержня длины $l$. Начальное условие состоит лишь в задании значений функции $u(x,t)$ в начальный момент времени $t=0$

(начального распределения температуры вдоль стержня):

$$u(x,t)\big|_{t=0}=\varphi(x)\,. \tag{7.3}$$

Граничные условия могут быть различными в зависимости от температурного режима на границах $x=0$ и $x=l$.

**Простейшие типы граничных условий**:

1. На конце стержня $x=0$ задана температура $\mu(t)$:

$$u(0,t)=\mu(t)\,. \tag{7.4}$$

2. На конце $x=0$ задана величина теплового потока, протекающего через торцевое сечение стержня:

$$u_x(0,t)=q(t). \tag{7.5}$$

3. На конце $x=0$ задан теплообмен стержня с окружающей средой по закону Ньютона, температура которой $\theta(t)$ известна.

Граничное условие записывается в таком виде

$$u_x(0,t)=h[u(0,t)-\theta(t)]. \tag{7.6}$$

Для конца $x=l$ аналогичное условие имеет вид

$$u_x(l,t)=-h[u(l,t)-\theta(t)]. \tag{7.7}$$

Аналогичные условия задаются и на конце $x=l$ стержня.

## 2. Задача Коши. Фундаментальное решение уравнения теплопроводности

Рассмотрим на бесконечной прямой задачу с начальными условиями (задачу Коши): *найти ограниченную функцию* $u(x,t)$, *определённую в области* $x\in(-\infty,\infty)$, $t\geq 0$, *удовлетворяющую однородному уравнению теплопроводности*

$$u_t=a^2u_{xx},\ x\in(-\infty,\infty),\ t>0 \tag{7.8}$$

*и начальному условию*

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad x\in(-\infty,\infty). \tag{7.9}$$

**Решение** ищем в виде произведения $u(x,t)=X(x)T(t)$.

Подставляя в (7.8) и разделяя переменные, получаем:

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{1}{a^2}\frac{T'(t)}{T(t)}=-\lambda^2,$$

где $\lambda^2$ - параметр разделения. Отсюда следует:

$$\begin{cases} T'(t)+a^2\lambda^2T(t)=0, \\ X''(x)+\lambda^2X(x)=0. \end{cases}$$

Решая полученную систему, находим решение уравнения (7.8)

$$u_\lambda(x,t) = A(\lambda)\exp(-\lambda^2 a^2 t + i\lambda x), \tag{7.10}$$

удовлетворяющие условию ограниченности. Здесь $\lambda \in (-\infty, \infty)$ - любое действительное число. Образуем функцию

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\lambda)\exp(-a^2\lambda^2 t + i\lambda x)d\lambda. \tag{7.11}$$

Требуя выполнения начального условия при $t = 0$, будем иметь

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda. \tag{7.12}$$

Воспользуемся формулой обратного преобразования Фурье:

$$A(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi)e^{-i\lambda\xi}d\xi. \tag{7.13}$$

Подставляя (7.13) в (7.11) и меняя порядок интегрирования, получим:

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)e^{-i\lambda\xi}d\xi\right)\exp(-a^2\lambda^2 t + i\lambda x)d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-a^2\lambda^2 t + i\lambda(x-\xi))d\lambda\right)\varphi(\xi)d\xi. \tag{7.14}$$

Вычислим внутренний интеграл, выделяя полный квадрат в показателе:

$$-a^2\lambda^2 t + i\lambda(x-\xi) = -a^2 t\left(\lambda + i\frac{x-\xi}{2a^2 t}\right)^2 - \frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}.$$

Воспользуемся значением интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha z^2}dz = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$. (В данном случае $\alpha = a^2 t$)

Приведём окончательный результат вычисления интеграла:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-a^2\lambda^2 t + i\lambda(x-\xi))d\lambda = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}}\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right). \tag{7.15}$$

Подставляя (7.15) в (7.14), приходим к интегральному представлению искомого решения задачи Коши:

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty} G(x,\xi;t)\varphi(\xi)d\xi\,, \tag{7.16}$$

$$G(x,\xi;t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}}\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right). \tag{7.17}$$

Функцию $G(x,\xi;t)$ называют ***фундаментальным решением*** уравнения теплопроводности. Функция

$$G(x,\xi;t-\tau)=\frac{1}{2\sqrt{\pi a^2(t-\tau)}}\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right) \tag{7.18}$$

удовлетворяет уравнению теплопроводности по переменным $(x,t)$, что проверяется дифференцированием. Действительно

$$G_x=-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\frac{x-\xi}{2[a^2(t-\tau)]^{3/2}}\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right),$$

$$G_{xx}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left[-\frac{1}{2[a^2(t-\tau)]^{3/2}}+\frac{(x-\xi)^2}{4[a^2(t-\tau)]^{5/2}}\right]\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right)$$

$$G_t=\frac{a^2}{2\sqrt{\pi}}\left[-\frac{1}{2[a^2(t-\tau)]^{3/2}}+\frac{(x-\xi)^2}{4[a^2(t-\tau)]^{5/2}}\right]\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right)$$

$$G_t=a^2G_{xx}\,.$$

*Физический смысл* функции $G(x,\xi;t-\tau)$ состоит в следующем:

функция $\frac{Q}{c\rho}G(x,\xi;t-\tau)$ описывает температуру в точке $x$ в момент времени $t>\tau$, если в момент времени $t=\tau$ в точке $\xi$ выделяется $Q=c\rho$ количества тепла.

Функция $G(x,\xi;t-\tau)$ зависит от времени только через аргумент $\theta=a^2(t-\tau)$, так что эту функцию можно записать в виде

$$G = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\theta}} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4\theta}\right).$$

На рис. 8 изображён график этой функции в зависимости от $x-\xi$ для различных значений $\theta$.

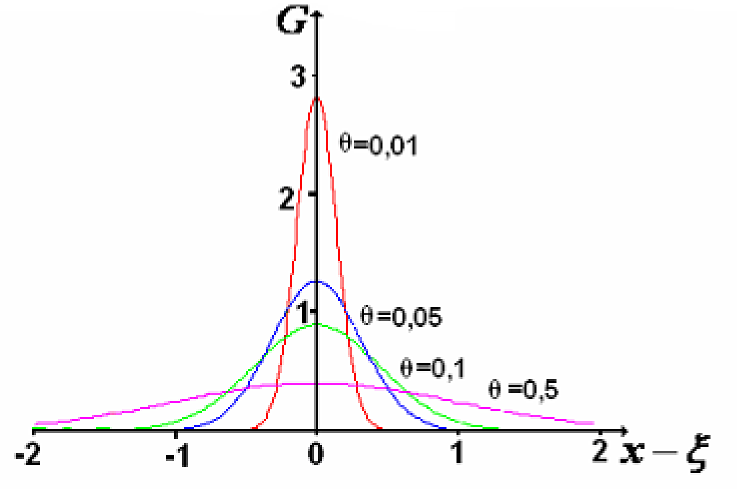


Рис. 8.

Окончательно запишем общее решение задачи Коши

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right) \varphi(\xi)d\xi. \quad (7.19)$$

**Пример 7.1.** Найдите решение уравнения теплопроводности, если начальная температура имеет постоянные, но различные значения при $x > 0$ и $x < 0$:

$$\varphi(x) = \begin{cases} T_1, & x > 0, \\ T_2, & x < 0. \end{cases}$$

**Решение.** Из формулы (7.19) имеем

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right) \varphi(\xi)d\xi =$$

$$=\frac{T_2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{0}\frac{d\xi}{2\sqrt{a^2t}}\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right)+\frac{T_1}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{+\infty}\frac{d\xi}{2\sqrt{a^2t}}\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right)=$$

$$=\left|\frac{\xi-x}{2\sqrt{a^2t}}=z,\ d\xi=2\sqrt{a^2t}dz\right|=$$

$$=\frac{T_2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{-\frac{x}{2\sqrt{a^2t}}}e^{-z^2}dz+\frac{T_1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\frac{x}{2\sqrt{a^2t}}}^{+\infty}e^{-z^2}dz= \qquad \frac{T_1+T_2}{2}+\frac{T_1-T_2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{-\frac{x}{2\sqrt{a^2t}}}e^{-z^2}dz\ .$$

Поскольку $\qquad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{+\infty}e^{-z^2}dz=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{0}e^{-z^2}dz=\frac{1}{2},$

то, полагая $y=\frac{x}{2\sqrt{a^2t}}$, можно записать:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{-y}e^{-z^2}dz=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{0}e^{-z^2}dz-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{y}e^{-z^2}dz=\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{y}e^{-z^2}dz$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-y}^{+\infty}e^{-z^2}dz=\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-y}^{0}e^{-z^2}dz=\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{y}e^{-z^2}dz\ .$$

Функция

$$\operatorname{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{x}e^{-\xi^2}d\xi \qquad (7.20)$$

носит название ***интеграла ошибок***.

Некоторые свойства функции $\operatorname{erf}(x)$:

- нечётная $\quad \operatorname{erf}(-x)=-\operatorname{erf}(x)$;
- монотонно возрастает и ограничена;
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{erf}(x)=-1,\ \lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{erf}(x)=1.$

График функции представлен на рис. 9.

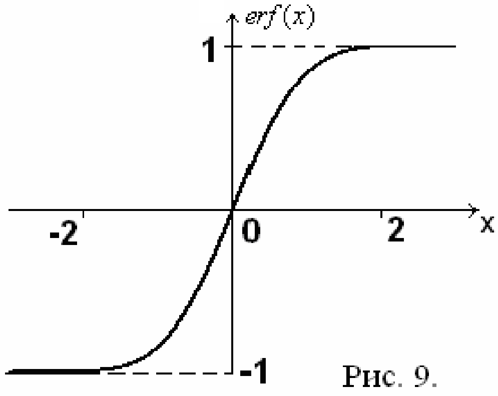

Рис. 9.

Решение при помощи интеграла ошибок можно записать в виде

$$u(x,t) = \frac{T_1 + T_2}{2} + \frac{T_1 - T_2}{2} \operatorname{erf}\left( \frac{x}{2\sqrt{a^2 t}} \right). \tag{7.21}$$

Отсюда видно, что в точке $x = 0$ температура всё время постоянна и равна полусумме значений справа и слева. Эта же температура является установившейся (при $t \to \infty$).

### 3. Решение неоднородного уравнения теплопроводности

Рассмотрим неоднородное уравнение теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \qquad x \in (-\infty, \infty),\ t > 0$$

с нулевым начальным условием

$$u(x,0) = 0, \qquad x \in (-\infty, \infty).$$

Воспользуемся фундаментальным решением $G(x,\xi,t)$.

Искомое решение можно записать в виде

$$u(x,t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} G(x,\xi;t-\tau) f(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau, \qquad (7.21)$$

$$G(x,\xi;t-\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 (t-\tau)}} \exp\left( -\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)} \right).$$