Тема 6. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ.

МЕТОД РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ

Основным методом решения линейных дифференциальных уравнений математической физики является ***метод разделения переменных***. В его основе лежит метод приведения уравнения в частных производных к краевой задаче Штурма – Лиувилля с последующим нахождением собственных значений и собственных функций задачи по заданным граничным условиям. Если уравнение неоднородное или заданы неоднородные дополнительные условия, то соответствующие функции представляются рядом Фурье по собственным функциям задачи. В этом случае метод часто называют ***методом собственных функций***.

1. Метод разделения переменных для однородного уравнения

Рассмотрим волновое уравнение

$$\rho(x)u_{tt} = [k(x)u_x]_x - q(x)u\,,\ \ x \in [0,l]\,,\ t > 0\,. \tag{6.1}$$

Пусть имеются дополнительные условия:

начальные

$$u(x,0) = \varphi(x)\,,\ \ u_t(x,0) = \psi(x)\,,\ \ x \in [0,l]\,, \tag{6.2}$$

и граничные

$$\Gamma(u) = 0\,,\ \ t \ge 0\,, \tag{6.3}$$

где $\Gamma(u) = 0$ заменяет одно из однородных граничных условий (1-го, 2-го или 3-го типов):

1. $u = 0$ при $x = 0$ или $x = l$;

2. $u_x = 0$ при $x = 0$ или $x = l$;

3. $u_x - hu = 0$ при $x = 0$ или $u_x + hu = 0$ при $x = l$.

Будем искать решение волнового уравнения (6.1) в виде произведения

$$u(x,t) = X(x)T(t). \tag{6.4}$$

Подставляя (6.4) в уравнение (6.1) и разделив полученное уравнение на произведение $\rho(x)X(x)T(t)$, получим равенство

$$\frac{[k(x)X_x(x)]_x - q(x)X(x)}{\rho(x)X(x)} = \frac{T_{tt}(t)}{T(t)}. \tag{6.5}$$

Чтобы функция (6.4) была решением уравнения (6.1), равенство (6.5) должно удовлетворяться тождественно, т.е. для всех значений независимых переменных $x \in [0,l]$, $t > 0$.

Правая часть равенства (6.5) является функцией только переменной t, а левая – только переменной x. Но это возможно тогда, когда обе части этого равенства при изменении своих аргументов сохраняют постоянное значение

$$\frac{[k(x)X_x(x)]_x - q(x)X(x)}{\rho(x)X(x)} = \frac{T_{tt}(t)}{T(t)} = -\lambda, \tag{6.6}$$

где λ - постоянная.

Из (6.6) получаем два дифференциальных уравнения

$$[k(x)X_x]_x - q(x)X + \lambda\rho(x)X = 0,\ X(x) \not\equiv 0, \tag{6.7}$$

$$T_{tt}(t) + \lambda T(t) = 0,\ T(t) \not\equiv 0. \tag{6.8}$$

Граничные условия (6.3) дают: $\Gamma(X)T(t) = 0,\ t \ge 0$.

Отсюда следует, что для получения нетривиального решения функция $X(x)$ должна удовлетворять условиям

$$\Gamma(X) = 0,\ t > 0.$$

Получаем задачу Штурма – Лиувилля:

$$[k(x)X_x]_x - q(x)X + \lambda\rho(x)X = 0,\ \Gamma(X) = 0, \tag{6.9}$$

Ранее было показано, что нетривиальное решение существует только при некоторых собственных значениях $\lambda_n \ge 0$ при $q(x) \ge 0$. Для каждого собственного значения $\lambda_n \ge 0$ существует одна действительная дважды непрерывно дифференцируемая собственная функция $X_n(x)$ такая, что последовательность собственных функций, соответствующих различным собственным значениям, удовлетворяет свойству ортогональности:

$$\int_0^l X_n(x)X_m(x)\rho(x)dx = 0, \ n \neq m.$$

Определив собственные значения и собственные функции краевой задачи (6.9), приступаем к решению уравнения (6.8) при заданных начальных условиях (6.2).

Это задача Коши для обыкновенного линейного дифференциального уравнения второго порядка. После нахождения частного решения

$$T(t) = T_n(t) = A_n \cos\sqrt{\lambda_n}t + B_n \sin\sqrt{\lambda_n}t \tag{6.10}$$

уравнения (6.8) решение задачи записываем в виде ряда

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)X_n(x). \tag{6.11}$$

Формальная схема выполнения начальных условий (6.2) основывается на теореме разложения В. А. Стеклова. Из равенств

$$u(x,0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x),$$

$$u_t(x,0) = \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sqrt{\lambda_n} X_n(x)$$

находим

$$A_n = \varphi_n, \quad B_n = \frac{\psi_n}{\sqrt{\lambda_n}},$$

где φ_n, ψ_n - коэффициенты Фурье функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ при разложении по собственным функциям $X_n(x)$ с весом $\rho(x)$.

Решение задачи (6.1), (6.2), (6.3) запишем в виде

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi_n \cos\sqrt{\lambda_n}t + \frac{\psi_n}{\sqrt{\lambda_n}} \sin\sqrt{\lambda_n}t) X_n(x) \tag{6.12}$$

Решение неоднородного уравнения вида

$$\rho(x)u_{tt} = [k(x)u_x]_x - q(x)u + f(x,t),\ x \in (0,l),\ t > 0$$

ищется по этой же схеме, представляя функцию $f(x,t)$ рядом Фурье по собственным функциям $X_n(x)$ с весом $\rho(x)$.

Рассмотрим примеры применения метода разделения переменных для решения различных уравнений математической физики.

Пример 6.1. Найдите решение однородного волнового уравнения (1 краевая задача)

$$u_{tt} = a^2 u_{xx},\ x \in (0,l),\ t > 0$$

с начальными условиями

$$u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x),\ x \in (0,l) \qquad (6.13)$$

и однородными граничными условиями

$$u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0, \quad t > 0. \qquad (6.14)$$

Решение. Будем искать решение задачи в виде произведения $u(x,t) = X(x)T(t)$.

Подставляя это выражение в уравнение и разделяя переменные, получим уравнение:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)}.$$

Правая часть равенства является функцией переменного t, а левая ─ только x, и, следовательно, обе части сохраняют постоянное значение.

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda,$$

Граничные условия дают

$$u(0,t) = X(0)T(t) = 0, \quad X(0) = 0.$$

$$u(l,t) = X(l)T(t) = 0, \quad X(l) = 0.$$

Получаем систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ X(x) = 0, \;\; X(l) = 0, \\ T''(t) + a^2 \lambda T(t) = 0. \end{cases} \tag{6.15}$$

Эта система имеет нетривиальное решение только в случае $\lambda > 0$.

$$X(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda} x + C_2 \sin \sqrt{\lambda} x$$

Из граничных условий получаем

$$X(0) = 0 \;\Rightarrow C_1 = 0$$

$$X(l) = 0 \Rightarrow \sin \sqrt{\lambda} l = 0,$$

$$\lambda = \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2, \; n \in N$$

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi}{l} x,$$

$$T_n(t) = A_n \cos(a\sqrt{\lambda_n} t) + B_n \sin(a\sqrt{\lambda_n} t).$$

В результате приходим к функции

$$u_n(x,t) = T_n(t) X_n(x) = (A_n \cos(a\sqrt{\lambda_n} t) + B_n \sin(a\sqrt{\lambda_n} t)) \sin \frac{n\pi}{l} x$$

В силу линейности и однородности уравнения сумма частных решений также удовлетворяет уравнению и граничным условиям.

Запишем решение задачи в виде ряда

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(a\sqrt{\lambda_n} t) + B_n \sin(a\sqrt{\lambda_n} t)) \sin \frac{n\pi}{l} x \tag{6.16}$$

Для определения постоянных интегрирования A_n, B_n воспользуемся начальными условиями:

$$u(x,0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{\pi n}{l} x$$

$$u_t(x,0)=\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty} B_n a\frac{\pi n}{l}\sin\frac{\pi n x}{l}.$$

По формулам для коэффициентов Фурье находим постоянные A_n, B_n:

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{\pi n}{l}x\,dx, \tag{6.17}$$

$$B_n=\frac{2}{\pi n a}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{\pi n}{l}x\,dx. \tag{6.18}$$

Функции $u_n(x,t)$ для волнового уравнения называют собственными колебаниями или гармониками, а $\omega_n=\frac{an\pi}{l}$, $n=1,2,...$ - собственными частотами.

Подставляя (6.17), (6.18) в (6.16), получим решение искомой задачи.

2. Метод разделения переменных для неоднородного уравнения

Рассмотрим неоднородное волновое уравнение

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,\ t),\quad x\in(0,l),\ \ t>0.$$

начальные условия

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad u_t(x,0)=\psi(x),\ x\in[0,l]$$

однородные граничные условия

$$u(0,t)=0,\quad u(l,t)=0,\ t>0$$

Решение ищем в виде разложения в ряд Фурье по собственным функциям $X_n(x)=\sin\lambda_n x$:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\sin\lambda_n x,\qquad \lambda_n=\frac{n\pi}{l}. \tag{6.19}$$

Представим функцию $f(x,t)$ и начальные условия $\varphi(x)$, $\psi(x)$ в виде рядов Фурье:

$$\begin{cases} f(x,t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin\lambda_n x, \\ \varphi(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varphi_n \sin\lambda_n x, \\ \psi(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\psi_n \sin\lambda_n x. \end{cases} \tag{6.20}$$

Коэффициенты разложения определены формулами

$$\begin{cases} f_n(t)=\dfrac{2}{l}\int\limits_0^l f(\xi,t)\sin\lambda_n\xi d\xi, \\ \varphi_n=\dfrac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(\xi)\sin\lambda_n\xi d\xi, \\ \psi_n=\dfrac{2}{l}\int\limits_0^l \psi(\xi)\sin\lambda_n\xi d\xi \end{cases} \tag{6.21}$$

Подставляя разложения (6.20) в уравнение, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\lambda_n x\left\{u_n''(t)+a^2\lambda_n^2 u_n(t)-f_n(t)\right\}=0,$$

$$u_n''(t)+a^2\lambda_n^2 u_n(t)=f_n(t),$$

начальные условия для функции $u_n(t)$ имеют вид:

$$u_n(0)=\varphi_n, \quad u_n'(0)=\psi_n.$$

Получили задачу Коши для линейного неоднородного дифференциального уравнения 2-го порядка. Решение представим в виде:

$$u_n(t)=u_n^{(I)}(t)+u_n^{(II)}(t).$$

Функция $u_n^{(I)}(t)$ - общее решение однородного уравнения:

$$u_n^{(I)}(t)=\varphi_n\cos(a\lambda_n t)+\frac{1}{a\lambda_n}\psi_n\sin(a\lambda_n t)$$

Функция $u_n^{(II)}(t)$ - частное решение неоднородного уравнения, которое можно найти методом вариации постоянных. Опуская выкладки, находим:

$$u_n^{(II)}(t) = \frac{1}{a\lambda_n}\int_0^t \sin a\lambda_n(t-\tau) f_n(\tau)d\tau .$$

Искомое решение $u(x,t)$ запишется в виде ряда:

$$u(x,t) = u^{(I)}(x,t) + u^{(II)}(x,t)$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\varphi_n \cos a\lambda_n t + \frac{\psi_n}{a\lambda_n}\sin a\lambda_n t\right)\sin\lambda_n x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a\lambda_n}\int_0^t \sin a\lambda_n(t-\tau)\sin\lambda_n x\, f_n(\tau)d\tau \qquad (6.22)$$

- Первая сумма $u^{(I)}(x,t)$ есть решение задачи о *свободных* колебаниях струны при заданных начальных условиях;
- вторая сумма $u^{(II)}(x,t)$ представляет вынужденные колебания струны под действием внешней силы.

Пользуясь выражением для $f_n(t)$, вторую сумму можно записать виде

$$u^{(II)}(x,t) = \int_0^t\int_0^l G(x,\xi,t-\tau) f(\xi,\tau)d\xi d\tau ,$$

$$G(x,\xi,t-\tau) = \frac{2}{a\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\lambda_n x \sin\lambda_n\xi \sin a\lambda_n(t-\tau) .$$

Функция $G(x,\xi,\tau)$ называется функцией Грина.

3. Сведение задачи с неоднородными граничными условиями к задаче с однородными условиями

До сих пор решались задачи с однородными граничными условиями методом разделения переменных. Рассмотрим первую краевую задачу для волнового уравнения

$$\rho(x)u_{tt} = [k(x)u_x]_x - q(x)u + f(x,t),\ x\in(0,l),\ t>0$$

с начальными условиями

$$u(x,0) = \varphi(x),\quad u_t(x,0) = \psi(x),\ x\in[0,l]$$

и неоднородными граничными условиями

$$u(0,t)=\mu_1(t),\ u(l,t)=\mu_2(t),\ t>0.$$

Введём новую неизвестную функцию $v(x,t)$:

$$u(x,t)=v(x,t)+U(x,t). \tag{6.23}$$

Функцию $U(x,t)$ подбираем с тем расчетом, чтобы граничные условия для функции $v(x,t)$ стали однородными.

Для этого подставляем (6.23) в уравнение и дополнительные условия:

$$\rho v_{tt}=(kv_x)_x-qv+\bar f(x,t),$$

$$\bar f(x,t)=f(x,t)-[\rho U_{tt}-(kU_x)_x+qU],$$

$$v(x,0)=\bar\varphi(x), \qquad \bar\varphi(x)=\varphi(x)-U(x,0),$$

$$v_t(x,0)=\bar\psi(x), \qquad \bar\psi(x)=\psi(x)-U_t(x,0),$$

$$v(0,t)=\bar\mu_1(t), \qquad \bar\mu_1(t)=\mu_1(t)-U(0,t),$$

$$v(l,t)=\bar\mu_2(t), \qquad \bar\mu_2(t)=\mu_2(t)-U(l,t).$$

Чтобы $\bar\mu_i(t)=0,\ \ i=1,2$, достаточно положить

$$U(x,t)=\mu_1(t)+\frac{x}{l}[\mu_2(t)-\mu_1(t)].$$

Тем самым, первая краевая задача с неоднородными граничными условиями для функции $u(x,t)$ сведена к краевой задаче с однородными граничными условиями для функции $v(x,t)$.

Для других условий можно проверить, что неоднородные граничные условия сводятся к однородным граничным условиям с помощью выбора функции $U(x,t)$:

1. $u(0,t)=\mu_1(t)$, $\quad u(l,t)=\mu_2(t)$, $\qquad U(x,t)=\mu_1(t)+\frac{x}{l}[\mu_2(t)-\mu_1(t)]$.
2. $u(0,t)=\mu_1(t)$, $\quad u_x(l,t)=\mu_2(t)$, $\qquad U(x,t)=\mu_1(t)+x\mu_2(t)$.
3. $u_x(0,t)=\mu_1(t)$, $\quad u(l,t)=\mu_2(t)$, $\qquad U(x,t)=(x-l)\mu_1(t)+\mu_2(t)$.
4. $u_x(0,t)=\mu_1(t)$, $\quad u_x(l,t)=\mu_2(t)$, $\qquad U(x,t)=x\mu_1(t)+\frac{x^2}{2l}[\mu_2(t)-\mu_1(t)]$.