Тема 5. УРАВНЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ СТРУНЫ. МЕТОД ПРОДОЛЖЕНИЯ

1. Распространение волн на полубесконечной прямой

Рассмотрим задачу о распространении волн на полуограниченной прямой $x \geq 0$. Эта задача имеет значение при изучении процессов отражения волн от концов и ставится следующим образом.

Постановка задачи. Найти решение волнового уравнения

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad x \in (0, \infty), \ t > 0, \tag{5.1}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \ x \in [0, \infty) \tag{5.2}$$

и граничному условию

$$u(0,t) = \mu(t) \ (\text{или } u_x(0,t) = \nu(t)), \ t \geq 0. \tag{5.3}$$

Рассмотрим сначала случай однородного граничного условия

$$u(0,t) = 0 \quad (\text{или } u_x(0,t) = 0), \ t \geq 0, \tag{5.4}$$

т.е. задачу о распространении начального возмущения по струне с жёстко закреплённым концом $x = 0$ (или свободным концом).

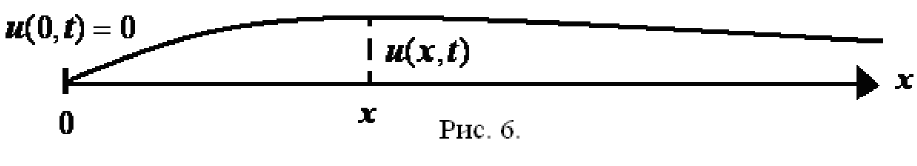

Рис. 6.

Леммы о свойствах решений волнового уравнения для бесконечной прямой:

1. Если начальные условия в задаче о распространении колебаний на неограниченной прямой являются *нечётными* функциями относительно некоторой точки x_0, то соответствующее решение в этой точке x_0 равно нулю.

2. Если начальные условия в задаче о распространении колебаний на неограниченной прямой являются *чётными* функциями относительно некоторой точки x_0, то производная по x соответствующего решения в точке x_0 равна нулю.

Доказательство 1. Пусть x_0 - начало координат, т.е. $x_0 = 0$. Условия нечётности начальных данных запишутся в виде

$$\varphi(x) = -\varphi(-x), \quad \psi(x) = -\psi(-x).$$

Функция $u(x,t)$, определённая формулой Даламбера (4.7), при $x = 0$ и $t > 0$ равна

$$u(0,t) = \frac{\varphi(at) + \varphi(-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{-at}^{at}\psi(\xi)d\xi \equiv 0,$$

так как первое слагаемое равно нулю в силу нечётности $\varphi(x)$, а второе – в силу свойства определённого интеграла от нечётной функции $\psi(x)$ в симметричных пределах.

Доказательство 2. Продолжим начальные данные $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ на всю прямую чётным образом:

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x > 0, \\ \varphi(-x), & x < 0. \end{cases} \quad \Psi(x) = \begin{cases} \psi(x), & x > 0, \\ \psi(-x), & x < 0. \end{cases}$$

Условия чётности начальных данных имеют вид

$$\varphi(x) = \varphi(-x), \quad \psi(x) = \psi(-x).$$

Заметим, что производная чётной функции является нечётной функцией

$$\varphi'(x) = -\varphi'(-x).$$

Из формулы Даламбера (4.7) следует:

$$u_x(0,t) = \frac{\varphi'(at) + \varphi'(-at)}{2} + \frac{1}{2a}[\psi(at) - \psi(-at)] \equiv 0, \ t > 0,$$

так как первое слагаемое равно нулю в силу нечётности $\varphi'(x)$, а второе – в силу чётности $\psi(x)$. Леммы доказаны.

При помощи этих лемм решим вспомогательную задачу:

найти решение волнового уравнения

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad x \in (0,\infty),\ t > 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad x \in [0,\infty) \tag{5.5}$$

и однородному граничному условию

$$u(0,t) = 0,\ t > 0. \tag{5.6}$$

Продолжим начальные данные $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ на всю прямую нечётным образом:

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x > 0, \\ -\varphi(-x), & x < 0, \end{cases} \qquad \Psi(x) = \begin{cases} \psi(x), & x > 0, \\ -\psi(-x), & x < 0. \end{cases} \tag{5.7}$$

Функция

$$u(x,t) = \frac{\Phi(x+at) + \Phi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \Psi(\xi)d\xi \tag{5.8}$$

определена при всех $x \in (-\infty,\infty)$ и $t > 0$.

В силу леммы 1 $u(0,t) = 0$.

Кроме того, функция $u(x,t)$, определенная формулой (5.8) при $t = 0$ и $x > 0$ равна

$$u(x,0) = \Phi(x) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \Psi(x) = \psi(x).$$

Таким образом, рассматривая $u(x,t)$ только при $x \ge 0$, $t \ge 0$, получим функцию, удовлетворяющую всем условиям поставленной вспомогательной задачи.

Возвращаясь к прежним функциям, можно написать:

$$u(x,t) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)d\xi, & t < x/a, \quad x > 0 \\ \dfrac{\varphi(at+x) - \varphi(at-x)}{2} + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{at-x}^{at+x} \psi(\xi)d\xi, & t > x/a, \quad x > 0 \end{cases} \tag{5.9}$$

В области $t < x/a$ влияние граничных условий не сказывается, и выражение для $u(x,t)$ совпадает с решением, полученным по формуле Даламбера (4.7) для бесконечной прямой.

Пусть при $x = 0$ мы имеем свободный конец $u_x(0,t) = 0$ (рис. 7):

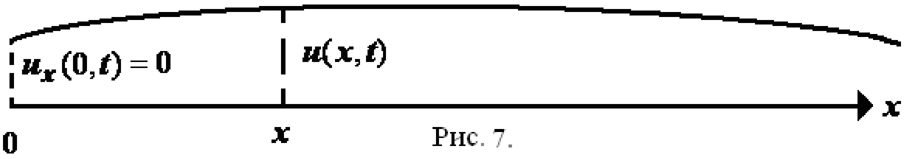

Рис. 7.

$$u(x,t) = \frac{\Phi(x+at)+\Phi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\Psi(\xi)d\xi \tag{5.10}$$

Рассматривая $u(x,t)$ только для $x \ge 0$, $t \ge 0$, получим функцию, удовлетворяющую всем условиям поставленной вспомогательной задачи со свободным концом:

$$u(x,t) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2} + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi, \quad t < x/a,\ x > 0, \\ \dfrac{\varphi(at+x)+\varphi(at-x)}{2} + \dfrac{1}{2a}\left[\displaystyle\int_{0}^{at+x}\psi(\xi)d\xi + \int_{0}^{at-x}\psi(\xi)d\xi\right],\ t > x/a, t > 0. \end{cases} \tag{5.11}$$

Сформулируем полученные результаты в виде правил.

1.Для решения задачи на полуограниченной прямой с граничным условием $u(0,t) = 0$ начальные данные необходимо продолжить на всю прямую нечётно.

2.Для решения задачи на полуограниченной прямой с граничным условием $u_x(0,t) = 0$ начальные данные необходимо продолжить на всю прямую чётно.

2. Решение волнового уравнения с неоднородными граничными условиями

При рассмотрении задачи с неоднородными граничными условиями воспользуемся *методом редукции*, представляя решение в виде суммы, каждое слагаемое которой удовлетворяет только одному из поставленных условий.

$$u(x,t) = v(x,t) + \bar{u}(x,t).$$

Функция $v(x,t)$ определяется по формуле (5.11)

Рассмотрим задачу определения функции $\bar{u}(x,t)$:

найти решение однородного волнового уравнения

$$\bar{u}_{tt} = a^2\bar{u}_{xx}, \quad x \in (0,\infty), \; t > 0, \tag{5.12}$$

удовлетворяющее нулевым начальным условиям

$$\bar{u}(x,0) = 0, \quad \bar{u}_t(x,0) = 0, \quad x \in [0,\infty) \tag{5.13}$$

и неоднородному граничному условию

$$\bar{u}(0,t) = \mu(t), \; t > 0. \tag{5.14}$$

Граничный режим вызовет волну, распространяющуюся вдоль струны направо со скоростью a. Это подсказывает аналитическую форму решения:

$$\bar{u}(x,t) = f(x - at).$$

Определим функцию f из граничного условия (5.14).

$$\bar{u}(0,t) = f(-at) = \mu(t),$$

$$f(t) = \mu(-t/a)$$

$$\bar{u}(x,t) = f(x-at) = \mu\left(-\frac{x-at}{a}\right) = \mu\left(t - \frac{x}{a}\right). \tag{5.15}$$

Функция $\bar{u}(x,t)$ определена для положительных значений аргумента: $t - \dfrac{x}{a} \geq 0$.

Чтобы найти $\bar{u}(x,t)$ для всех значений аргументов, продолжим функцию $\mu(t)$ на отрицательные значения t, полагая, например, $\mu(t) = 0$ при $t < 0$. Тогда функция

$$\bar{u}(x,t) = \begin{cases} 0, & t < \dfrac{x}{a}, \\ \mu\left(t - \dfrac{x}{a}\right), & t > \dfrac{x}{a} \end{cases} \tag{5.16}$$

будет определена для всех значений аргумента, и будет удовлетворять нулевым начальным условиям.

Сумма функции $\bar{u}(x,t)$ из (5.16) и функции $v(x,t)$ из (5.11) представляет решение задачи (5.1), (5.2), (5.3) с неоднородным граничным условием

$$u(x,t)=\begin{cases} \dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi, \quad t<\dfrac{x}{a},\ x>0, \\ \mu\left(t-\dfrac{x}{a}\right)+\dfrac{\varphi(at+x)+\varphi(at-x)}{2}+ \\ \qquad +\dfrac{1}{2a}[\displaystyle\int_{0}^{at+x}\psi(\xi)d\xi+\int_{0}^{at-x}\psi(\xi)d\xi], \quad t>\dfrac{x}{a},\ x>0. \end{cases} \tag{5.17}$$