Тема 4. УРАВНЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ БЕСКОНЕЧНОЙ СТРУНЫ. ФОРМУЛА ДАЛАМБЕРА

1. Задача Коши для уравнения колебаний бесконечной струны. Вывод формулы Даламбера

Рассмотрим задачу с начальными условиями для неограниченной струны:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad x \in (-\infty, +\infty), \; t > 0 \tag{4.1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad u_t(x,0) = \psi(x). \tag{4.2}$$

Функция $\varphi(x)$ задает начальное отклонение струны от положения равновесия,

$\psi(x)$ - начальную скорость точек струны.

Введём новые переменные: $\xi = x + at$, $\eta = x - at$.

В результате такой замены уравнение приводится к виду

$$\tilde{u}_{\xi\eta} = 0. \tag{4.3}$$

Интегрируя (4.3) по ξ, получим

$$\tilde{u}_\eta(\xi,\eta) = f(\eta),$$

где $f(\eta)$ - некоторая дифференцируемая функция одной переменной. Интегрируя последнее равенство по η при фиксированном значении ξ, получим:

$$\tilde{u}(\xi,\eta) = \int f(\eta)d\eta + f_1(\xi) = f_1(\xi) + f_2(\eta). \tag{4.4}$$

Таким образом, функция $\tilde{u}(\xi,\eta)$, определяемая формулой (4.4), представляет общее решение уравнения (4.3). Следовательно, функция

$$u(x,t) = f_1(x + at) + f_2(x - at) \tag{4.5}$$

является общим интегралом уравнения (4.1).

Определим f_1 и f_2 таким образом, чтобы удовлетворялись начальные условия (4.2):

$$\begin{cases} u(x,0)=\varphi(x), \\ u_t(x,0)=\psi(x), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_1(x)+f_2(x)=\varphi(x), \\ af_1'(x)-af_2'(x)=\psi(x), \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_1(x)+f_2(x)=\varphi(x), \\ f_1(x)-f_2(x)=\dfrac{1}{a}\displaystyle\int_{x_0}^{x}\psi(\xi)d\xi+C. \end{cases}$$

где x_0 и C - постоянные. Из полученных равенств находим:

$$\begin{cases} f_1(x)=\dfrac{1}{2}\varphi(x)+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x_0}^{x}\psi(\xi)d\xi+\dfrac{C}{2}, \\ f_2(x)=\dfrac{1}{2}\varphi(x)-\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x_0}^{x}\psi(\xi)d\xi-\dfrac{C}{2}. \end{cases} \tag{4.6}$$

Подставляя в (4.5) найденные значения f_1 и f_2, получим:

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\left[\int_{x_0}^{x+at}\psi(\xi)d\xi-\int_{x_0}^{x-at}\psi(\xi)d\xi\right]$$

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi. \tag{4.7}$$

Формулу (4.7) называют ***формулой Даламбера***.

Функция $u(x,t)$, определяемая формулой Даламбера, представляет процесс распространения начального отклонения и начальной скорости.

Функция $f(x-at)$ описывает волну, распространяющуюся вправо, $f(x+at)$ - влево от начального профиля, причём скорости движения волн равны параметру a.

Выводы: Общее решение $u(x,t)$ задачи Коши – это суперпозиция двух волн $f_1(x+at)+f_2(x-at)$, одна из которых $f_1(x+at)$ распространяется налево со скоростью *a*, а вторая $f_1(x-at)$ – направо с той же скоростью. При этом $f_1(x+at)=\dfrac{1}{2}\varphi(x+at)+\Psi(x+at)$,

$f_2(x-at)=\dfrac{1}{2}\varphi(x-at)-\Psi(x-at)$, где обозначено $\Psi(x)=\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x_0}^{x}\psi(\xi)d\xi$.

Рассмотрим частные случаи.

1) Допустим, что начальная скорость равна нулю:

$$u_t(x,0)=\psi(x)=0.$$

В этом случае отклонение $u(x,t)$ выразится формулой

$$u(x,t)=u_1(x,t)=\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)] \qquad (4.8)$$

и является суммой левой и правой бегущих волн.

Начальная форма каждой волны определяется функцией $\frac{1}{2}\varphi(x)$, равной половине начального отклонения.

2) Допустим, что начальное отклонение равно нулю:

$$u(x,0)=\varphi(x)=0.$$

В этом случае отклонение $u(x,t)$ выразится формулой

$$u(x,t)=u_2(x,t)=\Psi(x+at)-\Psi(x-at)=\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi, \qquad (4.9)$$

и представляет возмущение струны, создаваемое начальной скоростью.

Пример 4.1. Рассмотрим распространение начального отклонения, заданного в виде *равнобедренного треугольника*. Такой начальный профиль можно получить, если оттянуть струну в середине отрезка $[x_1,x_2]$.

На рис. 5 показаны последовательные положения струны через промежутки времени $\Delta t = (x_2 - x_1)/8a$.

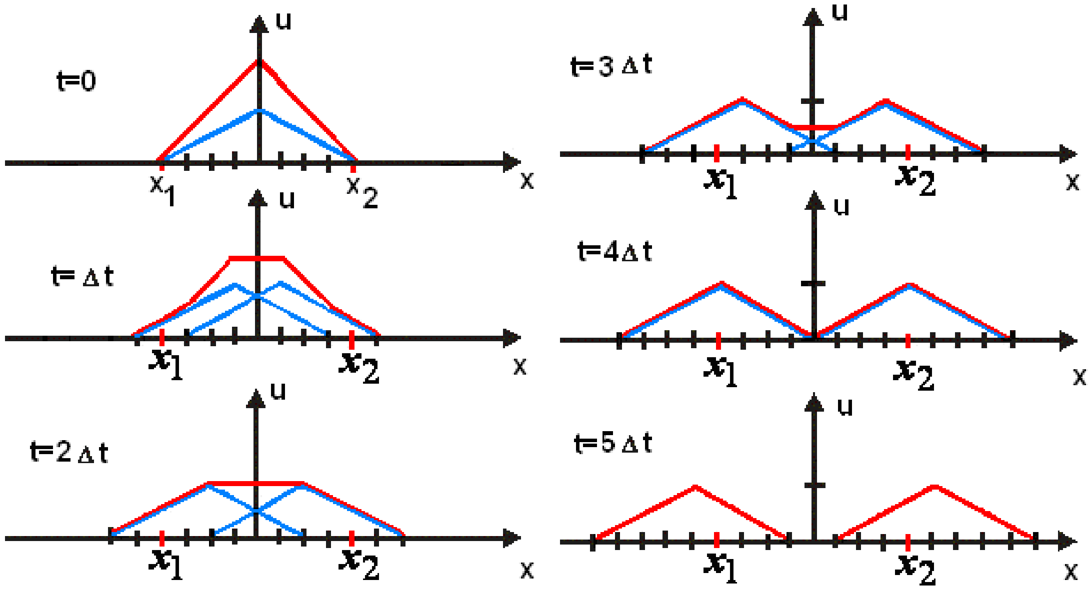

Рис. 5.

2. Задача Коши для неоднородного уравнения колебаний

Рассмотрим неоднородное уравнение колебаний струны

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad x \in (-\infty, +\infty), \ t > 0, \tag{4.10}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \ u_t(x,0) = \psi(x), \ x \in (-\infty, \infty). \tag{4.11}$$

Используя метод редукции, представим решение в виде

$$u(x,t) = u^{(I)}(x,t) + u^{(II)}(x,t), \tag{4.12}$$

Задача *A*

$$\left.\begin{array}{c} u_{tt}^{(I)} = a^2 u_{xx}^{(I)}, \\ x \in (-\infty,\infty), \ t > 0 \\ u^{(I)}(x,0) = \varphi(x), \\ u_t^{(I)}(x,0) = \psi(x) \end{array}\right\} \tag{4.13}$$

Задача *B*

$$\left.\begin{array}{c} u_{tt}^{(II)} = a^2 u_{xx}^{(II)} + f(x,t), \\ x \in (-\infty,\infty), \ t > 0 \\ u^{(II)}(x,0) = 0, \\ u_t^{(II)}(x,0) = 0 \end{array}\right\} \tag{4.14}$$

Решение задачи A (4.13) можно найти по формуле Даламбера (4.7).

Для нахождения $u^{(II)}(x,t)$ найдем функцию $w(x,t,\tau)$, являющейся решением вспомогательной задачи Коши:

$$w_{tt} = a^2 w_{xx}, \quad x \in (-\infty,\infty),\ t > \tau, \tag{4.15}$$

$$\left.\begin{aligned} & w(x,\tau,\tau) = 0, \\ & \frac{\partial w}{\partial t}(x,\tau,\tau) = f(x,\tau) \end{aligned}\right\} \ t = \tau,\ x \in (-\infty,\infty).$$

Решение вспомогательной задачи Коши (4.15) можно найти по формуле Даламбера, только если заменить t на $t-\tau$:

$$w(x,t,\tau) = \frac{1}{2a}\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi. \tag{4.16}$$

Лемма. Решением задачи B (4.14) является функция

$$u^{(II)}(x,t) = \int\limits_0^t w(x,t,\tau)d\tau. \tag{4.17}$$

Доказательство. Очевидно, что $u^{(II)}(x,0) = 0$.

$$\frac{\partial u^{(II)}(x,t)}{\partial t} = w(x,t,t) + \int\limits_0^t \frac{\partial w(x,t,\tau)}{\partial t}d\tau = \int\limits_0^t \frac{\partial w(x,t,\tau)}{\partial t}d\tau. \tag{4.18}$$

Из равенства (4.18) и условий (4.15) на функцию $w(x,t,\tau)$ следует:

$$u_t^{(II)}(x,0) = 0.$$

Покажем, что $u^{(II)}(x,t)$ удовлетворяет уравнению (4.14).

Вычислим вторые частные производные:

$$\frac{\partial^2 u^{(II)}}{\partial t^2} = \frac{\partial w}{\partial t}(x,t,t) + \int\limits_0^t \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x,t,\tau)d\tau = f(x,t) + \int\limits_0^t \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x,t,\tau)d\tau = f(x,t) + a^2\int\limits_0^t \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,t,\tau)d\tau$$

$$\frac{\partial^2 u^{(II)}}{\partial x^2} = \int\limits_0^t \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,t,\tau)d\tau.$$

Из полученных соотношений следует, что

$$u_{tt}^{(II)} - a^2 u_{xx}^{(II)} = f(x,t).$$

Лемма доказана.

Подставляя выражения $u^{(I)}(x,t)$, $u^{(II)}(x,t)$ в (4.13), окончательно запишем решение задачи Коши для неоднородного волнового уравнения:

$$\boxed{u(x,t) = \frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi + \frac{1}{2a}\int_{0}^{t}d\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)d\xi} \quad (4.19)$$