Тема 3. ПОСТАНОВКА КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим постановку краевой задачи на примере малых поперечных колебаний струны длиной l. Уравнение колебаний имеет вид

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t),\ x \in [0,l]. \tag{3.1}$$

Отклонение $u(x,t)$ точек струны от равновесного положения зависит от ***начальных условий*:**

1. начальной формы струны

$$u(x,0) = \varphi(x) \tag{3.2}$$

2. начальной скорости точек

$$u_t(x,0) = \psi(x), \tag{3.3}$$

и *граничных условий* на концах струны, т.е. от состояния, в которых находятся точки $x = 0$ и $x = l$.

Существуют разнообразные граничные условия. Рассмотрим простейшие из них.

1. Однородные граничные условия

1. Пусть концы струны закреплены (***жесткое закрепление***, рис.2)

Это означает, что должны выполняться условия $u(0,t) = 0,\quad u(l,t) = 0$. (3.4)

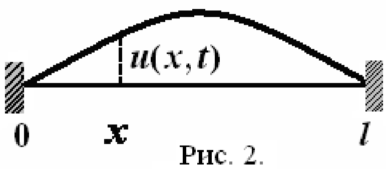

Рис. 2.

2. Один из концов струны, например $x = l$, ***свободен*** от действия на него внешних сил (рис.3).

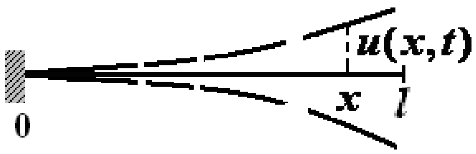

Рис. 3.

Натяжение струны в этой точке $T_0 u_x(l,t) = 0$, и

$$u_x(l,t) = 0. \tag{3.5}$$

3. Один из концов, например $x = l$, ***закреплён упруго***.

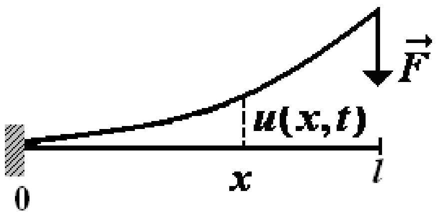

Рис.4

Следовательно, на этот конец действует упругая сила $\vec{F}$, пропорциональная смещению точки и стремящаяся вернуть точку струны в начальное состояние (рис. 4).

$$u_x(l,t) + hu(l,t) = 0, \tag{3.6}$$

где h - коэффициент жёсткости закрепления.

Условие упругого закрепления конца $x = 0$ имеет вид

$$u_x(0,t) - hu(0,t) = 0. \tag{3.7}$$

2. Общий случай (неоднородные граничные условия)

Если концы струны движутся по заданному закону, то граничные условия принимают вид

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(l,t) = \mu_2(t), \tag{3.8}$$

$$u_x(0,t) = \psi_1(t), \quad u_x(l,t) = \psi_2(t), \tag{3.9}$$

$$u_x(0,t) = h[u(0,t) - U_0(t)], \tag{3.10}$$

$$u_x(l,t) = -h[u(l,t) - U_0(t)], \tag{3.11}$$

где $\mu_i(t)$, $\psi_i(t)$, $U_0(t)$ заданные функции времени. Условия (3.8) – (3.11) называются ***неоднородными.***

Возможны различные комбинации перечисленных типов граничных условий.

3. Метод редукции общей задачи

Редукция означает сведение решения сложной задачи к решению более простых задач. Этот способ применяется к линейному уравнению с линейными дополнительными условиями.

В качестве примера рассмотрим первую краевую задачу для волнового уравнения:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), \ (0 < x < l, \quad t > 0), \\ u(x,0) = \varphi(x), \qquad u_t(x,0) = \psi(x), \\ u(0,t) = \mu_1(t), \qquad u(l,t) = \mu_2(t). \end{cases} \tag{3.12}$$

Решение общей краевой задачи (3.12) может быть представлено в виде суммы

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t) + u_3(x,t) + u_4(x,t), \tag{3.13}$$

где u_1, u_2, u_3, u_4 - решения частных краевых задач:

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \qquad (i = 1,2,3), \tag{3.14}$$

$$\begin{cases} u_1(x,0) = \varphi(x), \\ u_{1t}(x,0) = \psi(x), \\ u_1(0,t) = 0, \\ u_1(l,t) = 0. \end{cases} \begin{cases} u_2(x,0) = 0, \\ u_{2t}(x,0) = 0, \\ u_2(0,t) = \mu_1(t), \\ u_2(l,t) = 0. \end{cases} \begin{cases} u_3(x,0) = 0, \\ u_{3t}(x,0) = 0, \\ u_3(0,t) = 0, \\ u_3(l,t) = \mu_2(t). \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 u_4}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u_4}{\partial x^2} + f(x,t) \tag{3.15}$$

$$\begin{cases} u_4(x,0) = 0, \\ u_{4t}(x,0) = 0, \\ u_4(0,t) = 0, \\ u_4(l,t) = 0. \end{cases}$$

- u_1 является решением однородного уравнения (3.14) с ненулевыми начальными и однородными краевыми условиями;
- u_2 является решением однородного уравнения (3.14) с нулевыми начальными условиями и однородным краевым условием на правом конце $x = l$;
- u_3 является решением однородного уравнения (3.14) с нулевыми начальными условиями и однородным краевым условием на левом конце $x = 0$;
- u_4 является решением неоднородного уравнения (3.15) с нулевыми начальными условиями и однородными краевыми условиями на правом и левом концах.