## Тема 2. КЛАССИФИКАЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ. КАНОНИЧЕСКИЕ ФОРМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ.

### 1. Классификация уравнений

**Определение.** Соотношение между неизвестной функцией $u(x,y)$ и её частными производными до 2-го порядка называется дифференциальным уравнением с частными производными второго порядка:

$$F(x,y,u,u_x,u_y,u_{xx},u_{xy},u_{yy})=0 .$$

**Определение.** Уравнение называется линейным относительно старших производных, если оно имеет вид

$$au_{xx}+2bu_{xy}+cu_{yy}+F(x,y,u,u_x,u_y)=0 . \qquad (2.1)$$

Коэффициенты $a,b,c$ уравнения являются функциями от $x,y$.

**Определение.** Уравнение (2.1) называется линейным, если оно имеет вид

$$au_{xx}+2bu_{xy}+cu_{yy}+b_1u_x+b_2u_y+b_3u+f=0 . \qquad (2.2)$$

Для упрощения уравнения (2.1) составляем ***характеристическое*** уравнение

$$a(dy)^2-2bdxdy+c(dx)^2=0 \qquad (2.3)$$

Разрешая относительно производной, получаем уравнения

$$\frac{dy}{dx}=\frac{b+\sqrt{b^2-ac}}{a}, \qquad (2.4)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{b-\sqrt{b^2-ac}}{a}. \qquad (2.5)$$

Знак дискриминанта $D=b^2-ac$ определяет тип уравнения.

**Определение.** Уравнение (2.1)называется уравнением

- ***гиперболического типа***, если $D=b^2-ac>0$;
- ***параболического типа***, если $D=b^2-ac=0$;

- ***эллиптического типа***, если $D = b^2 - ac < 0$.

## 2. Приведение уравнения к каноническому виду

**1).** Пусть уравнение (2.1) в области $G$ гиперболического типа.

Пусть общее решение характеристического уравнения (2.3) имеет вид:

$$\varphi(x,y) = C_1, \quad \psi(x,y) = C_2$$

Эти решения называются ***характеристиками***.

Выполним замену переменных $\begin{cases} \xi = \varphi(x,y), \\ \eta = \psi(x,y). \end{cases}$

Уравнение (2.1) можно привести к каноническому виду

$$u_{\xi\eta} = F_1(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) \tag{2.6}$$

Другая форма канонического вида (гиперболический тип):

Замена $\begin{cases} \alpha = (\xi + \eta)/2, \\ \beta = (\xi - \eta)/2 \end{cases}$

приводит уравнение (2.6) к виду

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = \tilde{F}_1(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta) \tag{2.7}$$

**2).** Пусть уравнение (2.1) в области $G$ параболического типа.

Уравнения (2.4) и (2.5) совпадают, поскольку $D = b^2 - ac = 0$.

Пусть общее решение характеристического уравнения (2.3) имеет вид: $\varphi(x,y) = C$.

Выполним замену переменных $\begin{cases} \xi = \varphi(x,y), \\ \eta = \eta(x,y), \end{cases}$

где $\eta = \eta(x,y)$ - произвольная функция, не зависящая от $\varphi$.

Уравнение (2.1) можно привести к каноническому виду

$$u_{\eta\eta} = F_1(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) \tag{2.8}$$

**3).** Пусть уравнение (2.1) в области $G$ эллиптического типа.

В этом случае характеристическое уравнение (2.3) имеет два комплексно-сопряженных решения

$$\varphi(x,y) \pm i\psi(x,y) = C$$

Выполним замену переменных $\begin{cases} \xi = \varphi(x,y), \\ \eta = \psi(x,y). \end{cases}$

Уравнение (2.1) можно привести к каноническому виду

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = F_1(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) \tag{2.9}$$

**Канонические типы уравнений:**

- $b^2 - ac > 0$ (гиперболический тип) $\left[\begin{array}{l} u_{xx} - u_{yy} = F(x, y, u, u_x, u_y), \\ \qquad u_{xy} = F(x, y, u, u_x, u_y) \end{array}\right.$
- $b^2 - ac = 0$ (параболический тип) $u_{xx} = F(x, y, u, u_x, u_y)$;
- $b^2 - ac < 0$ (эллиптический тип) $u_{xx} + u_{yy} = F(x, y, u, u_x, u_y)$.

**Пример 2.1.**Привести уравнение к каноническому виду

$$u_{xx} + 2u_{xy} + 4u_{yy} = 0. \tag{2.10}$$

**Решение.** Определим тип уравнения $D = b^2 - ac = 1^2 - 1 \cdot 4 = -3 < 0$.

Уравнение эллиптического типа. Составляем характеристическое уравнение (2.3):

$$(dy)^2 - 2dxdy + 4(dx)^2 = 0,$$

$$(y')^2 - 2y' + 4 = 0.$$

$$y' = 1 \pm i\sqrt{3}$$

Интегрируя, получим комплексное решение $y - x \pm ix\sqrt{3} = C$

Замена переменных: $\begin{cases} \xi = y - x, \ \xi_x = -1, \quad \xi_y = 1, \\ \eta = x\sqrt{3}. \ \eta_x = \sqrt{3}, \quad \eta_y = 0. \end{cases}$

Вычисляем производные по правилу дифференцирования сложной функции:

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = -u_\xi + \sqrt{3} u_\eta, \quad u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = u_\xi,$$

$$u_{xx} = (u_x)_\xi \xi_x + (u_x)_\eta \eta_x = u_{\xi\xi} - 2\sqrt{3} u_{\xi\eta} + 3u_{\eta\eta}, \; u_{xy} = (u_x)_\xi \xi_y + (u_x)_\eta \eta_y = -u_{\xi\xi} + \sqrt{3} u_{\xi\eta},$$

$$u_{yy} = (u_y)_\xi \xi_y + (u_y)_\eta \eta_y = u_{\xi\xi}.$$

Подставляя в уравнение (2.10), получим канонический вид (эллиптический тип):

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = 0.$$

**Пример 2.2.** Определить тип уравнения и привести к каноническому виду

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \tag{2.11}$$

**Решение.** Определим тип уравнения $D = b^2 - ac = 0 + a^2 > 0$.

Уравнение гиперболического типа. Составляем характеристическое уравнение (2.3):

$$(dx)^2 - a^2 (dt)^2 = 0, \quad \frac{dx}{dt} = \pm a.$$

Характеристики: $x - at = C_1, \quad x + at = C_2.$

Замена переменных: $\begin{cases} \xi = x - at, \; \xi_x = 1, \quad \xi_t = -a, \\ \eta = x + at. \; \eta_x = 1, \quad \eta_t = a. \end{cases}$

Вычисляем производные:

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = u_\xi + u_\eta, \; u_t = u_\xi \xi_t + u_\eta \eta_t = a(-u_\xi + u_\eta),$$

$$u_{xx} = (u_x)_\xi \xi_x + (u_x)_\eta \eta_x = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}, \; u_{tt} = (u_t)_\xi \xi_t + (u_t)_\eta \eta_t = a^2 (u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}).$$

Подставляя в уравнение (2.11), получим канонический вид (гиперболический тип)

$$u_{\xi\eta} = 0.$$

**Пример 2.3.** Привести к каноническому виду уравнение

$$u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} = 0. \tag{2.12}$$

**Решение.** Определим тип уравнения $D = b^2 - ac = (-1)^2 - 1 \cdot 1 \equiv 0$.

Уравнение параболического типа. Составляем характеристическое уравнение (2.3):

$$(dy)^2 + 2dxdy + (dx)^2 = 0,$$

$$(dy + dx)^2 = 0.$$

Характеристика: $x + y = C$.

Замена переменных: $\begin{cases} \xi = x + y, & \xi_x = 1, & \xi_y = 1, \\ \eta = y. & \eta_x = 0, & \eta_y = 1. \end{cases}$

Вычисляем производные:

$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = u_\xi$, $u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = u_\xi + u_\eta$, $u_{xx} = (u_x)_\xi \xi_x + (u_x)_\eta \eta_x = u_{\xi\xi}$,

$u_{xy} = (u_x)_\xi \xi_y + (u_x)_\eta \eta_y = u_{\xi\xi} + u_{\xi\eta}$, $u_{yy} = (u_y)_\xi \xi_y + (u_y)_\eta \eta_y = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}$.

Подставляя в уравнение (2.12), получим канонический вид $u_{\eta\eta} = 0$.