Тема 1. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ. ЗАДАЧА ШТУРМА- ЛИУВИЛЛЯ

1. Понятие краевой задачи

Для определения постоянных, входящих в общее решение дифференциального уравнения, необходимо задавать дополнительные условия.

Задача Коши:

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0, \tag{1.1}$$

начальные условия для определения постоянных

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \tag{1.2}$$

В задаче Коши начальные условия (1.2) задаются в одной точке x_0.

В приложениях часто возникают задачи, когда дополнительные условия задаются в двух точках, обычно на концах того промежутка, на котором производится интегрирование уравнения. Такого рода условия называются ***граничными*** или ***краевыми*** условиями. Их число должно равняться порядку уравнения.

Пример 1.1. (Задача о попадании материальной точки массы m под действием внешней силы $F(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}})$ в заданную точку).

Найти закон движения материальной точки, если в начальный момент $t = t_0$ точка находилась в положении $\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$, а в момент $t = t_1$ должна попасть в точку $\vec{r}(t_1) = \vec{r}_1$.

Задача сводится к интегрированию уравнения

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = F(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}}) \tag{1.3}$$

с краевыми условиями $\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$, $\vec{r}(t_1) = \vec{r}_1$.

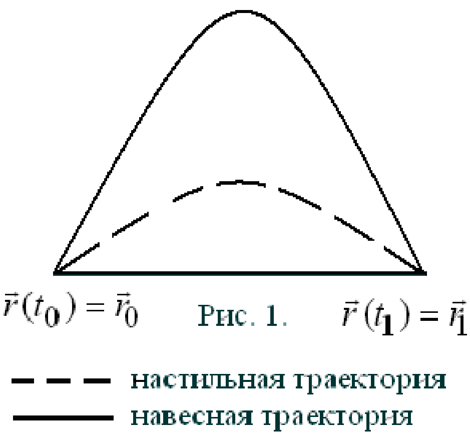

Рис. 1.

Эта задача имеет неоднозначное решение (рис. 1).

Если удаётся найти общее решение дифференциального уравнения краевой задачи, то для получения частного решения задачи надо определить произвольные постоянные из граничных условий. При этом далеко не всегда существует действительное решение, а если существует, то оно не обязательно единственное.

2. Общая схема решения краевой задачи

Пусть имеется линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с однородными краевыми условиями:

$$(k(x)y')'+[\lambda r(x)-q(x)]y=0, \quad x\in[a,\, b] \tag{1.4}$$

где $k(x)\geq 0$, $r(x)$ и $q(x)\geq 0$ - функции, непрерывные на конечном отрезке $[a,\, b]$, λ числовой параметр.

Пусть на концах отрезка заданы краевые условия

$$\begin{cases} \alpha y(a)+\beta y'(a)=0, \\ \gamma y(b)+\delta y'(b)=0 \end{cases} \tag{1.5}$$

Пусть $y_1(x,\lambda)$, $y_2(x,\lambda)$ линейно независимые решения уравнения (1.4).

Общее решение уравнения (1.4) имеет вид

$$y(x,\lambda)=C_1 y_1(x,\lambda)+C_2 y_2(x,\lambda) \tag{1.6}$$

Для простоты, рассмотрим частный случай краевых условий (1.5):

$$y(a)=0,\ y(b)=0 \tag{1.7}$$

Для определения постоянных C_1, C_2 из краевых условий получаем однородную линейную систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} C_1 y_1(a,\, \lambda)+C_2 y_2(a,\, \lambda)=0, \\ C_1 y_1(b,\, \lambda)+C_2 y_2(b,\, \lambda)=0. \end{cases} \tag{1.8}$$

Если значение параметра λ таково, что система (1.8) имеет только нулевое решение $y(x,\, \lambda)\equiv 0$, то решение называется ***тривиальным***.

Если же λ удовлетворяет уравнению

$$\begin{vmatrix} y_1(a,\lambda) & y_2(a,\lambda) \\ y_1(b,\lambda) & y_2(b,\lambda) \end{vmatrix} = 0, \qquad (1.9)$$

то система (1.8), а, следовательно, и задача (1.4), (1.7) имеет решение, отличное от нулевого, определенное с точностью до постоянного множителя. Других решений при заданном значении λ задача не имеет, так как все решения, имеющие корень $x = a$, линейно зависимы.

Аналогично решается общая задача с краевыми условиями (1.5).

Задача нахождения значений параметра λ, при которых уравнение

$$(k(x)y')' + [\lambda r(x) - q(x)]y = 0, \quad x \in [a,\, b]$$

с краевыми условиями

$$\alpha \cdot y(a) + \beta \cdot y'(a) = 0, \quad \gamma \cdot y(b) + \delta \cdot y'(b) = 0$$

имеет ненулевое решение, называется ***задачей Штурма – Лиувилля***.

Значения параметра λ, при которых данная задача имеет решение $y(x,\lambda)$, отличное от тривиального решения, называются ***собственными значениями*** задачи.

Решения $y(x,\lambda)$, отвечающие данному собственному значению λ, называются ***собственными функциями*** задачи.

Пример 1.2. Рассмотрим задачу $y'' + \lambda y = 0$, $x \in [0, l]$,

$$y(0) = 0, \ y(l) = 0.$$

Решение.

1. Пусть $\lambda < 0$. Тогда общее решение уравнения будет

$$y = C_1 e^{-\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{\sqrt{-\lambda}x}.$$

Из краевых условий получаем систему для определения постоянных C_1, C_2:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 e^{-\sqrt{-\lambda}l} + C_2 e^{\sqrt{-\lambda}l} = 0 \end{cases}.$$

Приравнивая определитель системы к нулю, получаем уравнение:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{-\sqrt{-\lambda}l} & e^{\sqrt{-\lambda}l} \end{vmatrix} = 0, \qquad e^{2\sqrt{-\lambda}l} - 1 = 0, \qquad \lambda = 0,$$

что противоречит принятому условию $\lambda < 0$.

2. Пусть $\lambda = 0$. Тогда общее решение уравнения имеет вид $y = C_1 x + C_2$.

Из краевых условий получаем $C_1 = C_2 = 0$, $y(x) \equiv 0$.

3. Рассмотрим положительные значения $\lambda > 0$. Общее решение уравнения:

$$y(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x.$$

Из краевых условий получаем систему:

$$\begin{cases} C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 = 0, \\ C_1 \cos\sqrt{\lambda}l + C_2 \sin\sqrt{\lambda}l = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения следует $C_1 = 0$. Из второго уравнения получаем $C_2 \sin\sqrt{\lambda}l = 0$. Постоянная $C_2 \neq 0$, так как иначе получаем $y(x) \equiv 0$. Следовательно, для определения собственных значений λ получаем уравнение

$$\sin\sqrt{\lambda}l = 0, \quad \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \; n \in N.$$

Соответствующие собственные функции: $y_n(x) = C_n \sin\frac{n\pi}{l}x$, где C_n - произвольные постоянные.

Замечание. Если в уравнении (1.3) функция $k(x)$ обращается в нуль на одном из концов отрезка $x \in [a, b]$, например $k(a) = 0$, то соответствующее этому концу краевое условие в (1.4) заменяется условием ограниченности решения $y(x)$ на этом конце.

3. Общие свойства собственных функций и собственных значений задачи Штурма – Лиувилля

1. Существует бесчисленное множество собственных значений $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots$,

которым соответствуют собственные функции $y_1(x),\ y_2(x), \ldots,\ y_n(x), \ldots.$.

2. При $q(x) \geq 0$ все собственные значения неотрицательные $\lambda_n \geq 0$.

3. Собственные функции $y_n(x)$ и $y_m(x)$, соответствующие разным собственным

значениям λ_n и λ_m, ортогональны между собой с весом $r(x)$:

$$(y_n, y_m) = \int_a^b y_n(x) y_m(x) r(x) dx = 0, \quad n \neq m.$$

4. Справедлива **теорема разложения В. А. Стеклова**: функция $f(x)$, дважды

непрерывно дифференцируемая и удовлетворяющая краевым условиям (1.4), разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по собственным функциям $y_n(x)$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n y_n(x), \quad f_n = \frac{(f, y_n)}{(y_n, y_n)}, \tag{1.10}$$

если $f(x)$:

- имеет при $a < x < b$ непрерывную первую и кусочно-непрерывную вторую производные;
- удовлетворяет граничным условиям задачи;
- при этом если $k(a) = 0$, то $|f(a)| < \infty$ при $0 \leq q(a) < \infty$ и $f(a) = 0$ при $q(x) \xrightarrow[x \to a]{} \infty$.

4. Неоднородная краевая задача

Задача может быть неоднородной вследствие дифференциального уравнения или вследствие краевых условий. Рассмотрим неоднородное уравнение с однородными краевыми условиями

$$Ly(x) + \omega r(x) y(x) = f(x) \tag{1.11}$$

в области Ω, где $Ly(x) = (k(x)y')' - q(x)y$, $y(x)$ подчиняется однородным граничным условиям (1.5), ω - заданная постоянная.

Решаем задачу Штурма – Лиувилля для однородной задачи:

$$(k(x)y_n')' + [\lambda_n r(x) - q(x)]y_n = 0,$$

$$\alpha y_n(a) + \beta y_n'(a) = 0, \ \gamma y_n(b) + \delta y_n'(b) = 0,$$

и находим собственные значения и собственные функции дифференциального оператора L.

Разложим $y(x)$ и $f(x)$ в ряд по собственным функциям оператора L:

$$y(x) = \sum_n c_n y_n(x), \qquad f(x) = \sum_n f_n y_n(x) \tag{1.12}$$

и подставим в уравнение (1.11):

$$\sum_n c_n(\lambda_n - \omega^2) y_n(x) = \sum_n f_n y_n(x).$$

Так как собственные функции $y_n(x)$ линейно независимы, то

$$c_n = \frac{f_n}{\lambda_n - \omega^2}, \quad \text{или} \qquad c_n = \frac{(f, y_n)}{\lambda_n - \omega^2},$$

где $y_n(x)$ рассматриваются как нормированные функции. Поэтому

$$y(x) = \sum_n \frac{y_n(x)(f, y_n)}{\lambda_n - \omega^2} = \sum_n \frac{y_n(x)}{\lambda_n - \omega^2} \int_\Omega y_n(\xi) f(\xi) d\xi. \tag{1.13}$$

Это выражение можно записать по-другому

$$y(x) = \int_\Omega G(x, \xi) f(\xi) d\xi, \tag{1.14}$$

где $G(x, \xi)$ называется ***функцией Грина*** или ***фундаментальным решением краевой задачи:***

$$G(x, \xi) = \sum_n \frac{y_n(x) y_n(\xi)}{\lambda_n - \omega^2}. \tag{1.15}$$

Вид функции Грина зависит от дифференциального оператора L, области Ω и краевых условий.

Таким образом, знание функции Грина $G(x, \xi)$ позволяет записать решение неоднородного уравнения с правой частью $f(x)$. Нахождение функции Грина поясним на примере.

Пример 1.3. Найти функцию Грина краевой задачи:

$$y''+\omega^2 y = 0, \ x \in [0, l],$$

$$y(0) = 0, \ y(l) = 0.$$

Решение. Собственные значения задачи найдены в примере 1.2 и равны $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$, нормированные собственные функции $y_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi}{l} x$.

Следовательно, функция Грина равна:

$$G(x,\xi) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{l} x \sin \frac{n\pi}{l} \xi}{\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 - \omega^2}.$$