Тема7. Стохастические модели управления запасами.

Стохастические, или вероятностные модели позволяют наиболее точно описать ситуации, с которыми приходится сталкиваться на практике, а значит – найти более точные решения возникающих задач. Они базируются на рассмотренных ранее трех подходах к управлению запасами, но предполагают использование более сложного математического аппарата. Кроме того, меняется один из важнейших принципов, заложенных в основу формирования моделей: если в детерминированных моделях дефицит ресурса на складе был полностью исключен, то в стохастических – его возникновение допускается с некоторой вероятностью. Вводится новый параметр управления: P_o – вероятность бездефицитной работы. Очевидно, что чем больше средств вложено в создание резервного запаса на складе, тем ближе его значение к единице, т. е. тем меньше вероятность возникновения дефицита: $(1–P_o)$, и наоборот. Во всех трех типах стохастических моделей интенсивность потребления ресурса со склада рассматривается как величина случайная, распределенная по нормальному закону.

Управление запасом с фиксированной партией поставки. Пусть интенсивность потребления ресурса – величина случайная, распределенная нормально с параметрами M_I и σ_I, где: M_I – математическое ожидание и σ_I – среднеквадратичное отклонение случайной величины. Договором с поставщиком зафиксированы срок поставки *и* партия поставки (размер партии может быть оптимизирован с помощью уже известной модели EOQ), также установлен основной для данного способа параметр управления – точка заказа. С какой вероятностью на складе не возникнет дефицита ресурса? В уже принятых обозначениях нам требуется найти значения P_o. Отправной точкой для дальнейших рассуждений является известная из теории вероятности формула нахождения нормированного отклонения случайной величины от среднего:

$$\xi(P_o) = (H_{тз} – M_I^*)/\sigma_I^*,$$

где M_I^* – ожидаемое потребление ресурса за время исполнения заказа $(T_{пост})$;

σ_I* – среднеквадратичное отклонение этой случайной величины; $P_о$ – вероятность того, что эта случайная величина примет любое значение, не превышающее $H_{тз}$; $\xi(P_о)$ – нормированное отклонение, или квантиль, величина которого для заданного значения вероятности отыскивается по таблицам интегральной или накопленной вероятности.

Из правила суммирования независимых, одинаково распределенных случайных величин следует:

$$M_I^* = T_{пост}\, M_I\,,$$

$$(\sigma_I^*)^2 = T_{пост}\, \sigma_I^{\,2}, \ \Rightarrow \sigma_I^* = \sigma_I \sqrt{T_{пост}}$$

Выполнив необходимые расчеты и получив значение квантиля, по таблице находим соответствующую ему величину $P_о$. Это вероятность того, что к моменту получения очередной партии склад не окажется пустым. Для полноты картины можно определить вероятность того, что запас не будет исчерпан уже за день до поставки, или значение P_1. Для получения результата выполним следующую последовательность действий:

$$\xi(P_1) = (H_{тз} - (T_{пост} - 1)\, M_I)/\sigma_I \sqrt{T_{пост} - 1} \Rightarrow P_1.$$

Этот и подобные ему расчеты, выполненные для других сроков, могут пригодиться при установлении оптимального уровня резервного запаса.

Необходимо отметить, что возникновение дефицита на складе за день, за два, за три дня до поставки – зависимые случайные величины, поэтому P_1 – это часть $P_о$, P_2 – часть P_1 и т.д. Следовательно, для расчета $H_{тз}$ достаточно знать только $P_о$, и наоборот.

Рассмотрим решение обратной задачи: по заданной вероятности бездефицитной работы найти точку заказа:

$$P_о \ \Rightarrow \ \xi(P_о) \ \Rightarrow \ H_{тз} = M_I^* + \xi(P_о)\, \sigma_I^* = T_{пост}\, M_I + \xi(P_о)\, \sigma_I \sqrt{T_{пост}}$$

Величина $\xi(P_о)\sigma_I \sqrt{T_{пост}}$ представляет собой резервный запас, обеспечивающий с вероятностью $P_о$ бездефицитность работы склада. Очень важна задача нахождения его оптимального уровня. Существующие методы основаны на том, что с ростом $P_о$ увеличиваются затраты на создание и содержание резервного запаса ресурса, но снижаются потери ввиду его дефицита. Сложность практического применения этих методов состоит в том, как оценивать потери от дефицита ресурса и затраты на резервирование. Разные подходы к такой оценке формируют разные алгоритмы решения задачи оптимизации.

Предположим, что точка заказа установлена, но поместится ли на склад емкостью $H_{скл}$ очередная поступающая партия ресурса?

Переполнения склада не произойдет с вероятностью $P_с$, если за срок поставки будет потреблено ресурса более чем $H_{тз} + n_{пост} - H_{скл}$.

По аналогии с предыдущими рассуждениями запишем:

$$\xi(P) = (H_{тз} + n_{пост} - H_{скл} - M_I^*)/\sigma_I^*,$$

где P – вероятность того, что потребление ресурса за время $T_{пост}$ не превысит указанной величины.

Искомая вероятность является дополнением к найденной, т.е. $P_с = 1 - P$.

Тогда окончательно формула примет вид:

$$\xi(1-P_c) = (H_{тз} + n_{пост} - H_{скл} - T_{пост} M_I)/\sigma_I \sqrt{T_{пост}}\ .$$

Для решения обратной задачи следует выполнить следующие действия:

$$P_с \Rightarrow 1-P_c \Rightarrow \xi(1-P_c) \Rightarrow H_{скл} = H_{тз} + n_{пост} - T_{пост} M_I - \xi(1-P_c)\, \sigma_I \sqrt{T_{пост}}$$

Но, что случится, если срок поставки будет постоянно нарушаться и в конце концов тоже окажется случайной величиной, распределенной нормально с параметрами M_T и σ_T?

В этом случае вместо значения $T_{пост}$ в расчетах используется M_T, а значение σ_I^* определяется из соотношения

$$(\sigma_I^*)^2 = M_T\, \sigma_I^{\,2} + M_I^2\, \sigma_T^{\,2}$$

Из анализа приведенной модели можно сделать следующий вывод. Вероятность бездефицитной работы склада определяет только точку заказа и величину резервного запаса. Следовательно, уменьшать партию поставки, а с ней и емкость склада можно, не снижая уровня надежности склада. Это свойство используется при расчете оптимальной партии поставки с помощью модели EOQ.

Управление запасом с фиксированным ритмом поставки. Пусть, как и в предыдущей модели, интенсивность потребления ресурса − величина случайная, распределенная нормально с параметрами M_I и σ_I. Договором с поставщиком установлены срок и ритм поставки.

Требуется определить емкость склада, исходя из двух условий:

1) с вероятностью $P_о$ должна обеспечиваться бездефицитность его работы;

2) с вероятностью $P_с$ должно быть исключено его переполнение.

Как было показано выше, бездефицитность работы склада обеспечивается на интервале $T_{пост} + R_{пост}$, причем за это время должно быть потреблено ресурса не более чем $H^*_{скл}$. Здесь потребление ресурса − величина случайная, распределенная нормально с параметрами M_I^{**} *и* σ_I^{**}, где

$$M_I^{**} = M_I\,(T_{пост} + R_{пост}),$$

$$(\sigma_I^{**})^2 = \sigma_I^2\,(T_{пост} + R_{пост}) \;\Rightarrow\; \sigma_I^{**} = \sigma_I \sqrt{T_{пост} + R_{пост}}\;.$$

Формула расчета квантиля, соответствующего вероятности $P_о$, в этом случае имеет вид:

$$\xi(P_o) = (H^*_{скл} - M_I^{**})/\sigma_I^{**}.$$

Тогда при известном значении $P_о$ можно найти условный максимальный запас $H^*_{скл}$:

$$P_o \Rightarrow \xi(P_o) \Rightarrow H^*_{скл} = M_I^{**} + \xi(P_o)\sigma_I^{**} = M_I(T_{пост} + R_{пост}) + \xi(P_o)\sigma_I\sqrt{T_{пост} + R_{пост}}$$

Реальная емкость склада может быть меньше величины $H^*_{скл}$ на то количество ресурса, которое будет потреблено за срок поставки. Это тоже случайная величина, распределенная нормально с параметрами M_I^* *и* σ_I^*. Для того, чтобы не произошло переполнения склада, она должна принимать любые значения, не меньшие $H^*_{скл} - H_{скл}$, т. е. $\xi(1–P_c) = (H^*_{скл} - H_{скл} - M_I^*)/\sigma_I^*$.

Тогда при известном значении $P_с$ можно выразить $H_{скл}$ через $H^*_{скл}$:

$$P_c \;\Rightarrow\; 1-P_c \;\Rightarrow\; \xi(1-P_c) \;\Rightarrow\; H_{скл} = H^*_{скл} - M_I^* - \xi(1-P_c)\sigma_I^*.$$

Подставив в эту формулу выражение, выведенное ранее для расчета $H^*_{скл}$, получим:

$$H_{скл} = M_I (T_{пост} + R_{пост}) + \xi(P_o)\sigma_I\sqrt{T_{пост}+R_{пост}} - M_I T_{пост} - \xi(1-P_c)\,\sigma_I\sqrt{T_{пост}} =$$

$$M_I R_{пост} + \sigma_I\sqrt{T_{пост}}\,\left(\xi(P_o)\sqrt{1+R_{пост}/T_{пост}} - \xi(1-P_c)\right)$$

Таким образом, емкость склада зависит одновременно от значений обоих параметров $P_о$ и $P_с$.

При задании емкости склада решается обратная задача, т. е. рассчитывается вероятность его бездефицитного функционирования или вероятность его не переполнения:

$$\xi(P_o)\sqrt{1+R_{пост}/T_{пост}} - \xi(1-P_c) = (H_{скл} - M_I R_{пост})/\sigma_I\sqrt{T_{пост}}$$

Очевидно, что одна из этих вероятностей должна быть задана, иначе обратная задача окажется неопределенной. При ее решении должно также соблюдаться условие $H_{скл} - M_I R_{пост} > 0$.

Зная значение $H^*_{скл}$, можно найти величину текущей партии поставки ресурса на склад: $n_{тек} = H^*_{скл} - H_{тек}$.

Теоретически размер партии может достигать значения $H^*_{скл}$, практически же на него накладывается ограничение $H_{скл} \geq n_{тек}$, нарушение которого ведет к несостоятельности приведенных выше выкладок. Может быть также задана нижняя граница изменения названной величины – $(n_{тек})_{min}$. В этом случае определяется вероятность P_n того, что размер текущей партии не выйдет за нее.

Известно, что заказывается для очередной поставки столько ресурса, сколько его потребляется за время $R_{пост}$ относительно уровня $H^*_{скл}$

Тогда:

$$\xi(1-P_n) = ((n_{тек})_{min} - M_I R_{пост})/\sigma_I\sqrt{R_{пост}} \Rightarrow 1-P_n \Rightarrow P_n .$$

На основании записанной формулы может быть решена и обратная задача.

Комбинированный способ управления запасом.

Комбинированная модель и в стохастической постановке сочетает в себе черты двух других моделей управления запасами. Резервирование бездефицитной работы, как в первой модели, осуществляется на интервале $T_{пост}$;

значения $H_{тз}$ и $H_{рез}$ рассчитываются по соответствующим формулам, приведенным выше. Но в отличие от этой модели размер партии поставки меняется в зависимости от ожидаемой интенсивности потребления ресурса на интервале $T_{пост}$. Предполагая, что емкость склада фиксирована на уровне $H_{скл}$ и его переполнение запрещено с вероятностью P_c, найдем величину текущей партии поставки. Случайная величина − потребление ресурса на интервале $T_{пост}$ − для исключения переполнения склада должна принимать любые значения, превышающие $H_{тз} + n_{тек} - H_{скл}$.

Тогда:

$$\xi(1-P_c) = (H_{тз} + n_{тек} - H_{скл} - T_{пост}\, M_I)/\sigma_I \sqrt{T_{пост}}$$

откуда:

$$n_{тек} = H_{скл} - H_{тз} + T_{пост}\, M_I + \sigma_I\, T_{пост}\, \xi(1-P_c).$$

Как уже отмечалось, эта модель очень близка модели с фиксированной партией поставки. Это подтверждает и приведенная выше формула расчета $n_{тек}$. Из нее видно, что величина текущей партии поставки меняется только при изменении параметров распределения случайной величины − интенсивности потребления ресурса со склада (M_I, σ_I), условий договора с поставщиком ($T_{пост}$), параметров управления запасом ($H_{скл}$, P_c , P_o) т. е. достаточно редко. В то же время значение $n_{тек}$ не оптимизируется с помощью модели EOQ, что резко снижает практическую значимость этого способа управления запасом.